REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.-NÚMS. 1, 2 Y 3

(Julio, Agosto y Septiembre de 1909)

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
271372
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1909

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII

271372

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1909

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NÚMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*
Zurbano, 44.

Excmo. Sr. D. Eduardo Saavedra, *Vicepresidente.*
Fuencarral, 74.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo.
Fuentes, 9.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.
Velázquez, 16.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*
Orellana, 10.

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*
Valverde, 26.

Excmo. Sr. D. Julián Calleja y Sánchez, *Tesorero.*
Argensola, 6.

Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*
Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.
Carrera de San Jerónimo, 53.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.
Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.
Mendizábal, 30.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.
Ventura de la Vega, 8.

Sr. D. Pedro Palacios.
Monte Esquinza, 9.

Sr. D. Blas Lázaro é Ibiza.
Palafox, 19.

Ilmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.
Quintana, 38.

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.
Válgame Dios, 3.

Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario*.
Zurbano, 18.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.
Piamonte, 14.

Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.
Campomanes, 8.

Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.
Génova, 17.

Sr. D. José Gómez Ocaña.
Atocha, 127 dupdo.

Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.
Amnistía, 10.

Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.
Mayor, 3.—Alcalá de Henares.

Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández y Rodríguez.
San Bernardo, 2.

Sr. D. Vicente de Garcini.
Juan de Mena, 19.

Sr. D. Miguel Vegas.
Pez, 1.

Ilmo. Sr. D. Juan Fages y Virgili.
San Bernardo, 18.

ACADÉMICOS ELECTOS

Sr. D. Eduardo Mier y Miura.
Serrano, 29.

Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.
Paseo de Martínez Campos, 17.

Ilmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sagasta.
Casa de Oficios.—Moncloa.

Ilmo. Sr. D. Pedro de Avila y Zumarán.
Travesía de la Ballesta, 8.

Sr. D. Ignacio González Martí.
Hernán Cortés, 7.

Excmo. Sr. D. Manuel Benítez y Parodi.
Plaza de la Lealtad, 4.

Sr. D. Eduardo León y Ortiz.
Fuencarral, 19 y 21.

Sr. D. Enrique Hauser.
Zorrilla, 33.

Sr. D. Blas Cabrera.
Serrano, 112.

La Academia está constituída en tres Secciones:

1.ª CIENCIAS EXACTAS.—Sres. Saavedra, *Presidente;* Torres, *Secretario;* Arrillaga, Torroja, Navarro-Reverter, Ventosa, Ugarte, Fernández y Rodríguez, Garcini y Vegas.

2.ª CIENCIAS FÍSICAS.—Sres. Carracido, *Presidente;* Mourelo, *Secretario;* Echegaray, Salvador, Muñoz del Castillo, Madariaga, Marvá y Fages.

3.ª CIENCIAS NATURALES.—Sres. Hidalgo, *Presidente;* Gómez Ocaña, *Secretario;* Cortázar, Calleja, Mallada, Cajal, Palacios, Lázaro y Sánchez Lozano.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr. D. Andrés Poey. *París.*
Excmo. Sr. D. Silvino Thos y Codina. *Madrid.*
Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. *Valencia.*
Sr. D. Luis Mariano Vidal. *Madrid.*
Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. *Madrid.*
Excmo. Sr. D. Rogelio de Inchaurrandieta. *Madrid.*
Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. *Sevilla.*
Excmo. Sr. D. Modesto Domínguez Hervella. *Madrid.*
Sr. D. Salvador Calderón y Arana. *Madrid.*
Ilmo. Sr. D. Ricardo Vázquez-Illá y Martínez. *Valladolid.*
Sr. D. Zoel García de Galdeano. *Zaragoza.*
Sr. D. Eduardo J. Navarro. *Málaga.*
Ilmo. Sr. D. José María Escribano y Pérez. *Murcia.*
Sr. D. Lauro Clariana y Ricart. *Barcelona.*

Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. *Segovia.*
Excmo. Sr. D. Joaquín María de Castellarnáu y Lleopart. *Segovia.*
Excmo. Sr. D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde de Villamar. *San Fernando.*
Excmo. Sr. D. Rafael Pardo de Figueroa. *Puerto Real.*
Sr. D. Juan Vilaró Díaz. *Habana.*
Excmo. Sr. D. Pablo Alzola y Minondo. *Bilbao.*
Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. *Salamanca.*
Excmo. Sr. D. José J. Landerer. *Valencia.*
Sr. D. José Eugenio Ribera. *Madrid.*
Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. *Barcelona.*
Sr. D. Eugenio Mascareñas. *Barcelona.*
Sr. D. Juan J. Durán Lóriga. *Coruña.*

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

Anguiano (A.). *Méjico.*
Lemoine (V.). *Reims* (?).
Collignon (E.). *París.*
Barrois (Ch.). *Lille.*
Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de). *Río de Janeiro* (?).
Gomes Teixeira (F.). *Porto.*
Príncipe de Mónaco (S. A. el). *Mónaco.*
Choffat (P.). *Lisboa.*
Arata (P. N.). *Buenos Aires.*
Carvallo (M.). *París.*
Laisant (C. A.). *París.*
Eneström (G.). *Estocolmo.*
Ferreira da Silva (A. J.). *Porto.*
Pina Vidal (A. A. de). *Lisboa.*
Brocard (H.). *Bar-le-Duc.*
Ocagne (M. d'). *París.*
Romiti (G.). *Pisa.*
Wettstein Ritter von Westersheim (R.). *Viena.*
Engler (A.). *Berlín.*

Guedes de Queiróz, Conde de Foz (G.). *Lisboa.*
Rayleigh (Lord). *Salisbury.*
Arrhenius. (S.). *Estocolmo.*
Ramsay (G.). *Londres.*
Castanheira das Neves (J.). *Lisboa.*
Pilsbry (E.). *Filadelfia.*
Porter (C. E.). *Santiago de Chile.*
Herrero Ducloux (E.). *La Plata (República Argentina).*
Academia Mejicana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. *Méjico.*

I.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY

Conferencia primera.

SEÑORES:

Antes de entrar en la materia propia de este curso, séame permitido hacer un resumen rapidísimo de los principales problemas tratados en los cursos anteriores.

En el primero de ellos, que fué como una introducción á la Física matemática, y, en que, como ejemplos, presenté algunos problemas de las ramas principales de dicha ciencia, me esforcé, sobre todo, en marcar el carácter propio de la Física experimental y de la Física matemática, de donde se deducían sus diferencias y relaciones.

La Física experimental, decía entonces, estudia el mundo inorgánico en sí, se pone en contacto con la realidad, su método es el de observación y experimentación, prescindiendo, á ser posible, de toda hipótesis, ó reduciéndolas á un número mínimo, y en todo caso, dándoles un lugar secundario.

En cada grupo de fenómenos de los que constituyen, ó por su identidad, ó por sus relaciones, ó por sus analogías, lo que pudiéramos llamar una familia, estudia la variedad en el grupo contenida, y procurando reducir ciertas magnitudes á medida y expresarlas por números, obtiene el físico diferentes parámetros, que unos son independientes, que otros

dependen de los primeros; y de aquí se deducen leyes que se expresan matemáticamente por medio de fórmulas, las cuales ponen en relación unos parámetros con otros.

De este modo, podemos decir que los fenómenos de la Naturaleza se expresan simbólicamente por números, y sus leyes por relaciones matemáticas, que, por el procedimiento que se ha seguido para obtenerlas, serán leyes y relaciones empíricas.

Así recordarán los que siguieron aquel primer curso, y podrán ver en el tomo de aquellas conferencias, correspondiente al curso del 905 al 906, que presentamos como ejemplo tipo el problema de un gas que cambia de volumen bajo la acción del calor, y que decíamos: todos los accidentes del fenómeno físico dependen de tres parámetros, el volumen, la presión y la temperatura, y la fórmula fundamental es la que liga estas tres variables.

En suma; la Física experimental prescinde en lo posible de toda hipótesis, y tomando esta Ciencia en toda su pureza, de todas debe prescindir.

Se limita á observar los hechos, y, á ser posible, á reproducirlos para ampliar y ordenar las observaciones; después marca magnitudes del fenómeno que representa por parámetros, escogiendo para cada uno una unidad conveniente, y reduciéndolos á números, marca los parámetros independientes, y deduce experimentalmente relaciones matemáticas entre éstos y los restantes.

Y es claro, y casi no necesitamos advertirlo, que en cada grupo de fenómenos influirá el resto de los fenómenos de la Naturaleza, de suerte que esta división en grupos, al parecer aislados, es una división artificial y un aislamiento hipotético, pero impuesto por lo limitado de las facultades humanas.

Pero es evidente, á la vez, que esta limitación se impone, y hasta es de buen sentido. En la combustión del carbón en el hogar de una locomotora, influirán las agitaciones de una

nebulosa lejana; pero no será de buen juicio, y hasta sería caso de demencia, pretender tenerlas en cuenta al prender fuego al combustible acumulado en el hogar.

*
* *

La Física matemática tiende al mismo objeto que la Física experimental; pero por un procedimiento esencialmente distinto.

Parte de una hipótesis que, generalmente, es la hipótesis mecánica, al menos ésta ha sido la hipótesis dominante en el siglo anterior.

A problemas de Mecánica reduce los fenómenos del mundo inorgánico, y suponiendo que el fondo de tal ó cual fenómeno consiste en el movimiento, ó á veces en el equilibrio, de ciertas masas sujetas á la acción de fuerzas que sobre ellas actúan, aplica los principios de la Dinámica ó de la Estática, integra las ecuaciones que resultan, que casi siempre son ecuaciones diferenciales, y las integrales que obtiene son las que expresan las leyes teóricas del fenómeno en cuestión.

Como en este proceso matemático se van introduciendo constantes, determina sus valores experimentalmente, de suerte que de la experiencia no prescinde la Física matemática; pero la aplica al término de su labor, cuando ha obtenido las fórmulas generales. El método experimental le da, pues, un número limitado de constantes, no las relaciones analíticas entre parámetros que varían al variar las condiciones del fenómeno que se estudia, y esta es una diferencia esencial.

Por fin, y este es el término de todos los problemas de la Física matemática, y es el coronamiento, y es muchas veces el triunfo de la Física matemática, las fórmulas obtenidas se interpretan poniéndolas en contacto, por decirlo de este modo, con la realidad, y viendo si representan fielmente y

sistemáticamente, sin violencia, y á ser posible sin nuevas hipótesis, todos los accidentes del fenómeno que la Física matemática ha resuelto ó ha pretendido resolver.

Y la Ciencia, no sólo debe explicar de esta manera los hechos conocidos, sino que por interpretación, aún más profunda de las fórmulas finales, debe anunciar y predecir nuevos hechos á que el método experimental no halla llegado todavía.

Pero este triunfo lo ha obtenido repetidas veces la Física matemática, valga el ejemplo de la refracción cónica de Hamilton.

La Física experimental es más sólida, no abandona nunca el terreno firme de la experimentación, nunca pierde contacto con la relidad; pero, en cambio, no satisface por completo las ansias y las ambiciones de la inteligencia humana.

En cambio, la Física matemática sólo acude á la experiencia al final de sus empresas matemáticas para comprobación de sus fórmulas y determinación de sus constantes.

Y en todo caso, porque todo hay que decirlo, acude al principio para forjar la hipótesis de que ha de partir, y entonces sí, para forjar esa hipótesis, claro es que busca inspiración en la realidad misma, como en la Naturaleza busca inspiración el poeta al elevarse á sus regiones ideales.

***

Si las leyes del mundo inorgánico forman un sistema, por decirlo así, único, parece á primera vista, y por tendencias del espíritu humano hacia la unidad, que el método para descubrir estas leyes, fuera único también; y entonces, ¿por qué dos métodos ó dos Ciencias para una misma clase de fenómenos; por qué la Física experimental, por una parte, y por otra la Física matemática, siquiera ambas concurran para la resolución de los mismos problemas?

Séame permitido exponer sobre este punto algunas consideraciones.

Los fenómenos del mundo físico y sus leyes, dijérase que están fuera de nosotros, que de nosotros no dependen, que la inteligencia humana no las puede crear, que para conocerlas, necesitamos en cierto modo ponernos con ellas en contacto por medio de los sentidos.

Por ejemplo: para saber que las masas ponderables se atraen, ó que las cosas pasan como si se atrajesen, en razón inversa de los cuadrados de las distancias, necesitamos ponernos en contacto con la realidad, y por la observación de los astros, ó por conocidas experiencias de gabinete, comprobar esta ley.

Y no nos extrañaría, que las atracciones fueran en razón inversa de otra potencia cualquiera, ó según otra función más complicada, ó que en la expresión de estas fuerzas atractivas reales ó aparentes, entrasen las velocidades de las masas.

Esto último sucede, precisamente, en las atracciones ó repulsiones de masas eléctricas en movimiento, sistemas que se supone en la teoría moderna, que equivalen á corrientes eléctricas.

Otro ejemplo.

Experimentalmente, determinamos para un punto del globo terráqueo la constante g de la gravedad, y no nos extraña que venga expresada por el número 9 y una fracción; ni nos extrañaría que fuese este número 10, ó 15, ó 20.

La experiencia da dicho número y no repugnaría á nuestro entendimiento que fuera un número distinto.

Tampoco nos repugna que el oxígeno y el hidrógeno, combinados en cierta proporción, den el líquido vulgar que se llama agua.

Todos estos son hechos que no pretendemos gobernar, ni pretendemos adivinar tampoco, porque no hay nadie que encerrándose en su gabinete, cerrando los ojos y pensando,

pretenda establecer *à priori*, sin el auxilio de la experiencia, que exista el oxígeno y el hidrógeno y que de su combinación resulte el agua.

Que la gravedad actuando un segundo de tiempo sobre una masa, le comunique una velocidad g y no una velocidad $\frac{1}{2} g$ ó $100\, g$.

Que exista una cosa llamada electricidad cuyas, atracciones y repulsines dependan no sólo de la distancia, sino de la velocidad de las masas eléctricas, cuando esta velocidad es comparable á la de la luz.

O que la atracción newtoniana sea precisamente en razón inversa del cuadrado de las distancias.

En suma; los hechos del mundo físico, ni los adivina, ni los construye *à priori* el entendimiento del hombre.

Esta pretensión tuvieron los filósofos griegos, creando *à priori* multitud de hipótesis, que demostraban el ingenio de la raza y que eran, en cierto modo, adivinaciones poéticas, aunque siempre en un campo de nebulosa vaguedad y sin descender á términos precisos y numéricos de peso y medida.

Estas pretensiones tuvo también la vieja Metafísica, pero tan desatentadas ambiciones cayeron ante la realidad; á veces se deshicieron en el ridículo, y ante sueños sin consistencia, se afirmaron los métodos de la Ciencia positiva, fundados en la observación y la experiencia.

El mundo no se inventa como se inventa un drama: se observa, se estudia, se pesa y se mide.

***

Y, sin embargo, hay una Ciencia, de la cual, con razón ó sin ella, y pongo este dilema para salir al encuentro de ciertas críticas, de la cual se puede decir todo lo contrario de lo que hemos dicho hasta aquí.

Esta Ciencia es la Matemática.

Las verdades matemáticas podrán brotar al contacto del mundo real, y sin él no brotarían.

Los conceptos matemáticos procederán todos ellos de la sensación, como hoy se pretende, no lo discutimos; pero las verdades matemáticas en la Ciencia pura no se demuestran por el método experimental, se demuestran directamente *à priori*, por la intuición, por la lógica, por el método deductivo: no analizo todo esto, lo indico tan sólo, que no explico lecciones de Filosofía científica.

Un hombre, encerrándose en su gabinete y cerrando los ojos, ó cuando más haciendo signos en un papel, no crea la Astronomía, ni la Física, ni la Química: intentarlo sería ataque de demencia.

Pero en su despacho, sin observatorios, ni gabinetes, ni aparatos, sólo con pensar, crea las Ciencias matemáticas, como Pascal creaba la Geometría cuando era niño.

Y las crea de tal modo, que si la experiencia alguna vez pusiera en duda los conceptos matemáticos, nuestro entendimiento se sentiría desquiciado, y antes que dudar de sí mismo, dudaría de la exactitud de la experiencia.

Si al hacer el dibujo esmeradísimo de un triángulo rectángulo, y al medir sus lados encontrase, que el cuadrado de la hipotenusa era igual á 20 veces la suma de los cuadrados de los catetos, pensaría que se había vuelto loco ó que la Creación se había desquiciado.

Esta diferencia que señalo entre la manera de conocer las leyes del mundo exterior y la manera de demostrar las verdades matemáticas, podrá explicarse como se quiera, podrá acudirse á la acumulación de sensaciones concordantes sobre la raza humana durante siglos y siglos hasta fabricar cerebros que piensen como piensan los cerebros de los matemáticos; pero que entre la manera de demostrar una ley física y la manera de demostrar una ley matemática, media un abismo, tal y como hoy estamos constituídos; esto me parece evidente con la mayor de las evidencias.

Es porque es, sin que yo pretenda por el momento averiguar el por qué es.

Se dirá que el mundo exterior es un conjunto de realidades, y que el mundo de las matemáticas es un mundo creado por el matemático mismo, combinando libremente productos de la sensación, creando conceptos y entidades matemáticas; que esta ciencia vive de invenciones, de convencionalismos y de definiciones *à priori;* y que todas las verdades matemáticas no son otra cosa que fachadas de un monumento que hemos levantado en nuestra imaginación, como castillo en el aire.

Estas explicaciones me parecen de una pobreza lastimosa, de una mezquindad más lastimosa todavía, y de una insuficiencia patente; pero tampoco las discuto.

Para mi objeto me importa poco que sean exactas.

Lo que yo digo es, que sin ninguna experiencia, demuestro, por varios métodos, y entre otros, por una recurrencia hasta el infinito, que el orden de dos factores enteros no altera el producto: por ejemplo, partiendo de dos números, para los cuales compruebo que la ley es cierta y agregando unidades sucesivas, y sin límite.

Y cuando he terminado esta demostración ú otra intuitiva, que es la vulgar, tengo seguridad tan firme de esta verdad matemática, que la menor duda anularía mi inteligencia ó me hundiría en el más absoluto excepticismo.

Y en cambio, si me niegan ó me modifican cualquier ley física deducida de la experiencia, ó me alteran las constantes físicas que en ella entran en juego, mi inteligencia queda tan señora de sí misma como antes, y el Universo sigue su marcha regular.

*
* *

Y aquí se plantea ante la inteligencia humana este problema: sea cual fuere la validez da las demostraciones matemá-

ticas, dado que existe una diferencia inmensa entre estas demostraciones y el método experimental; ¿no podríamos descubrir las leyes de la Naturaleza inorgánica, como demostramos las leyes matemáticas, ó aproximarnos al menos á este ideal, no llegando á él seguramente, pero aproximándonos todo lo posible, reduciendo la esclavitud en que nos tiene la experiencia é invadiendo su campo por la creación matemática?

A impulso de estas ambiciones, que siempre han existido, se ha creado la Física matemática.

Aún podríamos decir que la Física experimental y la Física matemática nacieron juntas, y que en la evolución de la Ciencia total se han ido deslindando sus campos y se han ido separando sus aspiraciones.

¿Y de qué modo puede realizarse este anhelo de la intellgencia humana de imponer sus leyes á los fenómenos del mundo exterior?

¿No es una empresa vana, y más que vana, insensata?

No lo es, seguramente.

Porque hay un elemento común á todos los fenómenos del mundo físico y á todas las lucubraciones matemáticas, ó al menos á la mayor parte de ellas.

En suma; hay un concepto que existe á la vez en la Naturaleza y en el entendimiento.

Hay varios; pero fijémonos en uno principalmente.

Este concepto es el de *cantidad.*

El concepto *cantidad* es inseparable de los fenómenos del mundo físico, es el fundamento de la Ciencia experimental y de toda Ciencia positiva.

La Ciencia positiva mide y pesa cantidades de la Naturaleza y las reduce á números y establece relaciones, que son las leyes empíricas de que antes hablábamos.

Se ha observado, en efecto, que todos los accidentes y manifestaciones de un fenómeno de la Naturaleza dependen de ciertas magnitudes, á que dábamos el nombre de parámetros.

Podemos decir, en términos sintéticos, que la Ciencia experimental, ó, si se quiere, la Ciencia positiva, es la Ciencia de determinadas cantidades; la Ciencia positiva, repetimos, prescinde de las *cualidades* y se fija en las cantidades, ó, si se quiere, reduce las primeras á las segundas, y expresa aquéllas midiendo éstas y reduciéndolas á números.

Yo bien sé que hay una tendencia modernísima, que trata de restablecer el concepto de cualidad, y que obedeciendo á esta corriente de ideas, se ha fundado la energética, ó, si se quiere, la energética como Ciencia aristotélica; pero problemas son éstos en que no podemos detenernos; atengámonos, pues, á las Ciencias positivas, tal como están constituídas, y aceptando este punto de vista, es evidente lo que antes indicábamos: que la Física experimental reconoce como elemento principalísimo el de *cantidad.*

*
* *

Pero la *cantidad* es uno de los conceptos primordiales de las Ciencias matemáticas.

Luego todas las leyes matemáticas, todas las leyes abstractas de la cantidad, podrán aplicarse al mundo exterior.

Y podrán aplicarse sin consultar á la experiencia, como leyes *à priori,* como leyes necesarias del entendimiento, que á la vez serán leyes necesarias de la realidad.

Luego ya tenemos, por decirlo así, un puente para imponer nuestros idealismos matemáticos á todos los fenómenos de la Naturaleza y aun para adivinarlos sin más que consultar las combinaciones matemáticas, que en la soledad de nuestro pensamiento realizamos.

Y sin entrar en más pormenores, se comprende en qué se fundaban las ambiciones y las esperanzas de la Física matemática en el siglo precedente.

Mas para realizar este propósito, para convertir la idea general en un organismo científico, fué necesaria una hipó-

tesis, y esta hipótesis fué en toda la Física matemática clásica, la que hemos llamado la hipótesis mecánica.

Se suponía que cualquier orden de fenómenos era un problema de Mecánica; de la Mecánica de una substancia material determinada, la materia ponderable ó la electricidad ó el éter, y á estas substancias se les aplicaba las leyes del equilibrio ó del movimiento de la Mecánica clásica; y todos los fenómenos del mundo material se decía que no eran otra cosa que materia, fuerza y movimiento; y algunos, simplificando aun más, reducían el Universo inorgánico á materia y movimiento tan sólo.

Claro es que la Mecánica no era una Ciencia abstracta como las Matemáticas puras; en ella existían ciertos elementos tomados de la realidad, ó, si se quiere, ciertas hipótesis elementales, ciertas sencillísimas experiencias y un corto número de principios elementales.

Pero admitidos estas substancias hipotéticas y estos principios, el resto, puede decirse, que es puramente matemático: un desarrollo de cálculo ó sea la aplicación del idealismo matemático á la realidad palpitante.

Porque, como hemos dicho, el elemento matemático es el que domina en la Mecánica racional.

Verdad es, como decíamos en el primer curso de esta asignatura, que el eminente matemático Mr. Poincaré, ha hecho una crítica severa de la hipótesis mecánica, demostrando que, si un fenómeno de la Naturaleza puede explicarse por una hipótesis mecánica, puede explicarse por otras infinitas; con lo cual la teoría tendrá importancia y aun valor representativo y simbólico, pero no por eso ha de creerse que penetra en la esencia íntima de los problemas físicos.

Sobre esto hicimos algunas observaciones en el momento oportuno, y nada agregaremos ahora, teniendo en cuenta que sólo hacemos historia y no formulamos doctrina.

De todas maneras, es un hecho que durante el siglo XIX en la Física matemática dominó la hipótesis mecánica.

De las Matemáticas puras se pasaba á la Cinemática; de la Cinemática á la Mecánica racional, y mediante esta última se crearon admirables teorías, que en el orden intelectual son glorias y triunfos de la inteligencia humana; por ejemplo: la Astronomía en los espacios siderales, y la Optica matemática en el océano del éter.

A desarrollar estas ideas consagramos el primer curso de esta asignatura, pasando en los otros tres al estudio elemental de la elasticidad por tres métodos distintos:

Primero, por el método de Cauchy.

Segundo, por el método de Lamé.

Tercero, por el método de Poincaré.

Dábamos esta importancia á la teoría de la elasticidad, en primer lugar, por la importancia que en sí tiene; y en segundo lugar, porque es en cierto modo un esquema matemático de casi todos los problemas de la Física.

Como que es una aplicación de la mecánica clásica: masas ponderables y fuerzas que entre ellas actúan y que son acciones á distancia, de efecto instantáneo, independientes de las velocidades de las masas, funciones tan sólo de dichas distancias y del producto de las masas de cada dos puntos.

Y, por último, fuerzas exteriores.

¿Qué problema de la Física matemática y aun de la Astronomía, según las ideas del siglo XIX, no puede reducirse á este tipo?

Variarán tan sólo las formas de las ecuaciones diferenciales y los procedimientos de integración; pero éstos no son ya en rigor problemas de Física, sino problemas de Matemáticas puras.

Y en estos problemas, al obtener las fórmulas generales, basta tan sólo para las aplicaciones hallar experimentalmente determinado número de constantes.

La experiencia, como hemos dicho tantas veces, en los problemas de Física matemática, ó mejor dicho, en los hechos

materiales, está al principio del método para inspirar las hipótesis, y al fin para determinar las constantes y para la interpretación de la fórmula, aplicando dicha interpretación de modo que explique satisfactoriamente los accidentes y aspectos diversos de cada fenómeno.

***

Pero en el último curso, al explicar el método de Mr. Poincaré, anticipamos algunas ideas que hemos de desarrollar en los cursos restantes.

La aplicación de la Mecánica racional á los problemas de la Física matemática, que es natural, sencilla, que parece irreemplazable y definitiva, y en que las dificultades son puramente del orden matemático, encuentra dificultades más graves y de un orden, por decirlo así, más profundo, cuando en los problemas interviene la electricidad ó el éter.

Por el pronto, Mr. Poincaré prescinde de la hipótesis de las fuerzas centrales; pero esto no basta para que en los nuevos problemas el espíritu quede completamente satisfecho.

La nueva Física matemática ya no se refiere tan sólo á las masas ponderables, sino que ha de tener en cuenta el movimiento de la electricidad y el estado de los campos eléctricos y magnéticos.

Según anticipábamos en el curso anterior, al llegar estos fenómenos, la Mecánica racional resulta impotente para explicarlos, y se hace sentir la necesidad, ó de crear una nueva Mecánica, ó de ensanchar los límites de la Mecánica clásica, que en el fondo es lo mismo; porque muchos de los principios admitidos en la Ciencia tradicional y clásica, han sido puestos en entredicho por la crítica moderna.

Prescindamos de si las fuerzas son ó no centrales, porque de esta hipótesis puede prescindirse sin gran dificultad.

Prescindamos de la acción á distancia, problema formidable, y que, dígase lo que se quiera, es de fondo metafísico; y admitamos que existen las fuerzas como si obrasen á distancia, aunque esto no sea más que una apariencia.

Pues aún quedan tres puntos graves.

1.° Que tampoco se admite que la acción de las fuerzas sea instantánea, sino que, por el contrario, se supone que esta acción se transmite con velocidad determinada, siquiera haya de ser muy grande para que la hipótesis clásica, al menos como primera aproximación, no caiga en defecto.

2.° Se supone que las masas ponderables van acompañadas de masas eléctricas, y que la inercia total se descompone en dos partes; inercia propia de la masa ponderable, y acción del campo electro-magnético sobre la masa eléctrica que acompaña á la masa ponderable: acción esta última, que finge una nueva inercia, la cual depende de la velocidad.

Cuando esta velocidad no es comparable á la de la luz, sino más pequeña, puede prescindirse de dicho efecto, y puede considerarse la inercia del sistema como una cantidad constante, dependiente sólo de la masa ponderable.

Donde vemos, y lo vemos en toda esta enumeración de las fuerzas, de las masas y de la inercia, que la Mecánica clásica queda firme y valedera, al menos como primera aproximación y en los fenómenos que están á nuestro alcance, incluyendo los fenómenos astronómicos, mientras las velocidades de los diferentes puntos de un sistema no sean comparables á la velocidad de la luz, sino mucho menores.

Y aquí vemos también que el problema mecánico se complica y se extiende de una manera enorme; ya no se trata de individualidades, por decirlo de este modo, quiero decir, de masas ponderables aisladas, sino que hay que tener en cuenta el campo que las rodea, que es el éter, y es, si se me permite la imagen, el cuarto estado de la materia que entra en juego.

Al problema clásico y sencillo, base de toda la Mecánica,

que consiste en un elemento de materia con determinada masa é inercia, y que camina bajo la acción de ciertas fuerzas, sin tener en cuenta para nada el espacio, que es inerte, hay que sustituir con una realidad, más real y más profunda, el movimiento del átomo eléctrico, ó sea del electrón, en el seno del éter, y bajo la acción del campo que él engendra y de otros campos eléctricos que sobre él pueden actuar.

Ya no es la inercia del átomo la que regula su velocidad; esta velocidad resulta de otra complicación de causas, quiero decir, de las acciones del campo eléctrico-magnético.

La dinámica del electrón es un problema enorme.

3.° Y es enorme por otro motivo, que no existía en la Mecánica clásica, que es una novedad, si puedo expresarme de este modo, en la Mecánica moderna.

Y me refiero á esta circunstancia, circunstancia importantísima.

En la Mecánica clásica, cuando una fuerza actuaba sobre una masa ponderable, la intensidad de dicha fuerza, *sólo dependía del estado actual del sistema.*

Importaba poco cómo hubiera podido llegar tal sistema á tal situación; importaba poco, repito, su historia, su pasado.

¿El punto material tiene una masa m?

¿La distancia á otro punto atractivo M es d?

Pues la acción de la fuerza sobre m es, siendo f la constante de atracción,

$$f\frac{mM}{d^2}.$$

E importa poco, repetimos, que el punto m llegue á su posición actual con una velocidad v ó una velocidad V, caminando en un sentido ó en otro sentido cualquiera: la fuerza que sobre él actúe siempre será la misma, la que antes hemos escrito.

Y esto simplificaba enormemente los problemas de la vieja Mecánica.

Pues en los nuevos problemas de la electricidad y el éter, ya no pueden admitirse estas simplificaciones. La velocidad, el pasado, la historia de la molécula, influye en la acción presente.

Esta gran novedad y este gran problema fué el que se encontró al estudiar las acciones de unas corrientes sobre otras.

Y aquí era imposible que las hipótesis de la vieja Mecánica explicasen los nuevos fenómenos.

Todas eran dudas, contradicciones insuperables para acomodar los fenómenos de la electro-dinámica á los viejos cánones de la Mecánica clásica.

Dependían las atracciones ó repulsiones eléctricas de las corrientes, de la intensidad de éstas, que vale tanto como decir de la velocidad del éter en los conductores, y decimos esto último admitiendo ciertas hipótesis.

Y si las velocidades eran en el mismo sentido, las fuerzas eran atractivas; y si continuaban siendo paralelas, pero en sentido contrario, la fuerza elemental era repulsiva.

Jamás nada parecido se había visto en los problemas de la Mecánica clásica, no siendo en problemas muy complejos, que no son de este momento.

Para elementos sencillos, jamás se había presentado nada parecido, y ya vimos en el primer curso, que en esta clase de problemas á que antes me refería, todavía aparecen fuerzas que no son centrales.

Es decir, la vieja Mecánica en completa derrota.

*
* *

Y si comparamos la sencillez del problema elemental en la Mecánica clásica y el problema equivalente en la Mecánica moderna de la electricidad y del éter, veremos que la diferencia es enorme.

En la Mecánica clásica, el movimiento de un punto material de masa determinada, que es el problema elemental á que antes nos referíamos, es de extraordinaria sencillez.

No hay que tener en cuenta más que la masa del punto, que es, si se me permite la expresión, el parámetro de su inercia, ó que representa su inercia, reguladora de su velocidad, y la fórmula

$$mv = Ft$$

es en cierto modo toda la Dinámica y toda la Física matemática clásica; me atrevería á decir que el resto son desarrollos de cálculo.

No hay que contar para nada con el espacio; el espacio es inerte y está vacío; sólo sirve para que por él camine la masa m y para medir distancias.

Nada importa tampoco, para calcular la fuerza F y su acción sobre la masa m, la velocidad con que la masa m llegue al punto que se considera, ni la dirección de dicha velocidad, es decir, el pasado, la historia de la masa en cuestión.

El momento actual lo determina todo.

En el problema elemental, equivalente al que hemos señalado, es decir, en el movimiento de un electrón, todo cambia, como antes explicábamos.

El espacio ya no es inerte, hay que contar con él, y por eso se halla y se define la condición de los campos electromagnéticos.

El movimiento de la cantidad de electricidad e depende de todo el espacio, como antes explicábamos, y de la velocidad y de la dirección de e, de suerte que en *cada momento* hay que tener en cuenta todo el campo magnético y todo el tiempo anterior.

Sólo con esto se comprende la complicación del problema que ahora presentamos de una manera vaga, pero que en su día estudiaremos más detenidamente.

Y con lo dicho, hemos hecho el resumen de las materias

tratadas en los cursos anteriores, y aun hemos anunciado algo de lo que hemos de estudiar, si nos es posible, en los cursos próximos.

En la próxima conferencia indicaremos cuál ha de ser la materia de estudio del presente curso.

II.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros.

Por Vicente Ventosa.

(Continuación.)

IX

Dando por cierto que las ondulaciones observadas en el borde de los astros, mediante nuestro método, están, en general, producidas por los *prismas de aire* de que habla Mr. Wadsworth, nos pareció natural averiguar, por experiencia directa, si podrían enfocarse según fuera su distancia al objetivo del anteojo, y se verificaba, por tanto, en ellas la propiedad de los focos conjugados. Para realizar dicha experiencia, nos ocurrió aprovechar una idea emitida por el propio M. Exner.

Dice este señor que pueden imitarse muy bien los fenómenos del centelleo por medio de un vidrio ó cristal de ventana, ordinario ó de mediana calidad. Mirando al través de este vidrio un objeto terminado por líneas rectas, estas líneas perderán su figura regular y parecerán sinuosas; tanto más, cuanto más lisa sea la superficie del vidrio. Si entonces movemos el ojo paralelamente á una de estas líneas, se verá correr á lo largo de ella una serie de ondas que, por su aspecto, reproducen con bastante fidelidad el movimiento ondulatorio observado en el borde de los astros. Claro es que se llegaría al mismo resultado si, dejando fijo el ojo, se hiciera mover el cristal.

Nuestros experimentos, realizados con los escasos medios materiales de que podíamos disponer, efectuáronse en los

días 4, 9 y 19 de Agosto, y 14 de Octubre de 1897, utilizando para ello la amplia sala de la biblioteca del Observatorio. Tomóse como manantial de luz la que acertaba á pasar por los intersticios que dejaban las latas de una persiana colocada delante de una ventana de la misma sala. Los bordes horizontales de dichas latas querían simular el limbo del Sol, y eran observados desde lejos con un anteojo. Entre éste y la persiana se colocaron á distancias variables, según conviniese, uno ó dos vidrios (como sugería el profesor Exner) de igual tamaño (56 $\times$ 29 centímetros), puestos en bastidor y en suspensión bifilar transversal, de tal modo, que sólo pudieran oscilar en su propio plano, el cual debía ser paralelo al plano de la ventana.

En los tres primeros días de observación se empleó un pequeño anteojo de Dollond, de 52 milímetros de abertura y 428,^{mm}5 de distancia focal, escrupulosamente medida de antemano. Los objetos estaban amplificados 43 diámetros. En el cuarto día se utilizó un buscador de cometas de Utzschneider y Fraunhofer, que lleva un objetivo de 77 milímetros, siendo su distancia focal 644,^{mm}3. Este anteojo ampliaba linealmente las imágenes 55 veces. Ambos instrumentos tienen excelentes cualidades ópticas.

He aquí, en breves términos expuesto, el orden de las operaciones efectuadas:

1.° Comenzábase por colgar y poner en oscilación uno solo de los vidrios; después hacíase deslizar suavemente el tubo porta-ocular hasta que las ondas producidas por el movimiento de vaivén del vidrio en la imagen de las latas de la persiana apareciesen con la mayor limpieza. Entonces se señalaba con un trazo en el tubo esta posición del ocular. Repetíase luego la misma operación con el segundo vidrio, puesto también separadamente en oscilación y suspendido á distancia diferente del primero. Todo esto debía simular el caso de existir una sola corriente atmosférica, observada á diferentes altitudes. (Aunque parece inútil consignarlo, antes

de emprender estas operaciones, al determinar en cada anteojo la posición del foco principal del objetivo, se hizo también otro trazo en el tubo.)

2.° Realizado lo que antecede, se procedía á otra operación semejante, pero combinada con ambos vidrios, interponiéndolos á la vez, apartados uno de otro. Observábanse entonces los fenómenos visibles en estas condiciones cuando se alteraba la posición del ocular, procurando siempre poner alternativamente en foco las ondas producidas por cada vidrio. De esta manera tratábase de reproducir las apariencias debidas á la coexistencia de dos corrientes atmosféricas.

3.° Y, *en último lugar*, para evitar la influencia perjudicial en los resultados de cualquier idea concebida de antemano, medíanse directamente las distancias al objetivo del anteojo, tanto de los vidrios como de la persiana, y la extensión focal respectiva por la posición de los trazos señalados en el tubo del ocular, con relación al otro trazo correspondiente al foco principal.

Los resultados más importantes, y siempre acordes, de estos experimentos, sucintamente expuestos, fueron los siguientes:

1.° Cuando entre el anteojo y la persiana se interponía y se hacía oscilar el vidrio, que llamaremos *a*, ó el más distante del observador, se llegaba á ver con la mejor definición posible las ondas producidas así, cuando el ocular estaba enfocado á la distancia del vidrio, y volvíanse cada vez más confusas conforme se alejaba el ocular del objetívo. Las mismas apariencias se presentaron con el vidrio más cercano *b*: siempre la mejor posición del ocular para percibir bien definidas las ondas correspondía al foco conjugado de la distancia del vidrio.

Prescindiendo de toda teoría, bastan estas solas experiencias, si no interpretamos mal sus resultados, para establecer que cada vidrio actúa por su parte como lo haría un manan-

tial de luz propia, puesto que las ondas que él origina son susceptibles de concentración en un solo foco, con arreglo á su distancia al anteojo que sirve para observarlas. Nos inclinamos á creer que lo mismo debe de suceder con las ondas aéreas vistas de esta manera, y por consiguiente, que la ley de los focos conjugados es también aplicable á esta clase de fenómenos.

2.° La interposición del vidrio *b*, en reposo, hacía perder gran parte de su claridad á las ondas producidas por el movimiento del vidrio *a*; sin embargo, todavía se les podía observar bien, vistas desde su propio foco conjugado. Por el contrario, cuando se enfocaba con el ocular el vidrio *b*, apenas si se vislumbraban las mismas ondas *a* como sombras errantes y difusas.

3.° Por último, poniendo simultáneamente en oscilación ambos vidrios, las dos series de ondas, *a* y *b*, miradas desde el foco conjugado de *a*, eran casi tan intensas una como otra y seguíanse sus movimientos sin la menor dificultad; pero en el foco conjugado de *b* las ondas *a* se desvanecían casi del todo, mientras que las ondas *b* se dejaban ver todavía mejor definidas. Este último resultado puede variar en gran manera, según sea el grado de homogeneidad de cada vidrio (ó según la fuerza relativa de las corrientes, refiriéndonos al aire). Si, por ejemplo, la superficie del vidrio más próximo al observador hubiera sido más lisa, ninguna duda cabe de que las ondas lejanas habrían ganado en definición, no obstante el estar desenfocadas.

La distancia relativa entre ambos vidrios puede también ejercer influencia muy apreciable en la visibilidad de las ondas. Con el fin de patentizarla, y al mismo tiempo obtener un sistema de ondas más regulares, hicimos uso, el día 4 de Agosto, para estos experimentos, de vidrios ondulados de mejor calidad, como se les encuentra en el comercio, y cuyas estrías rectilíneas, espaciadas exactamente de 10 en 10 milímetros, habían de quedar en posición casi vertical cuando

los cristales estuvieran suspendidos. La interposición de los vidrios ondulados produjo, como era de esperar, los mismos efectos antes descriptos, pero más enérgicos; y siendo, por lo mismo, excesiva la refracción que los rayos luminosos experimentaban entonces, la observación de las ondas procedentes del vidrio más lejano, miradas á través del otro vidrio, llegaba á ser casi imposible; dificultad que se eludió en gran parte acortando la distancia que entre ambos había.

Consiguióse de este modo ver simultáneamente las dos series de ondas, aunque no tan bien como con los vidrios ordinarios. Por lo demás, al hacer la observación aisladamente con cada cristal, se adquirió la certeza de poder enfocar con precisión las ondas respectivas. Estos experimentos arrojan mucha claridad sobre algunos fenómenos observados á menudo en el borde del Sol, y cuya explicación parecía difícil.

El siguiente cuadro, entresacado de la Memoria (*) en que primeramente dimos á conocer dichos experimentos, resume los resultados numéricos principales conseguidos en estas pruebas, á fin de cotejar las distancias de los cristales al objetivo, obtenidas por mensuración directa, con las mismas distancias calculadas, tomando por base la extensión focal indicada en el tubo del ocular:

1897		Extensión focal.	Distancia del vidrio *a* al objetivo.		Diferencia.	Extensión focal.	Distancia del vidrio *b* al objetivo.		Diferencia.
			Calculada.	Medida	c—m		Calculada.	Medida	c—m
		mm.	m	m	m	mm.	m	m	m
Agosto 4.	Vidrios ondulados..	10,0	18,69	19,29	— 0,60	19,5	9,82	10,33	— 0,51
Idem 19.	Vidrios ordinarios..	13,5	13,98	13,52	+ 0,46	42,7	4,72	4,63	+ 0,09
Octubre 14.		23,2	18,52	18,02	+ 0,50	49,2	9,08	9,14	— 0,06

(*) *La direction du vent et la scintillation. Reponse aux objections faites a la méthode d'observation des vents supérieurs par les ondulations du bord des astres. (Ciel et Terre).*—Bruxelles, 1899.

La distancia del vidrio *a*, ó más lejano del observador, á la persiana, estuvo siempre comprendida entre 1,67 y 1,86 metros.

Según se ve en el cuadro, las diferencias entre las distancias medidas y las calculadas, aunque pequeñas, acaso habrían resultado menores si se hubiese podido, en cada experiencia, determinar con exactitud la posición del ocular. En efecto, dichas diferencias disminuyen, en general, conforme aumenta la extensión de la distancia focal, y es lo que debe suceder, porque el error cometido al hacer el trazo en el tubo debe entonces ejercer menos influencia en el cálculo de la posición del foco conjugado respectivo.

No nos pareció suficiente el resultado que habíamos obtenido, sino que quisimos dejar un recuerdo indeleble, un testimonio fiel y vivo, por decirlo así, de estas experiencias por medio de la fotografía. Siendo imposible reproducir los movimientos oscilatorios de los cristales (problema que acaso el cinematógrafo habría resuelto), hubimos de limitarnos á obtener la imagen de la persiana vista á través de uno de los vidrios, mantenido en reposo, y enfocando alternativamente el vidrio ó la persiana. El resultado obtenido de este modo fué muy notable, como puede juzgarse examinando algunas reproducciones que acompañan á esta Memoria.

Las pruebas I*a* y I*b* fueron obtenidas el 20 de Enero de 1898 con un vidrio ordinario y una cámara fotográfica provista de un teleobjetivo de 50 milímetros de abertura. El objetivo distaba del bastidor del cristal 4,08 metros, y de la persiana 6,78. En I*a* se enfocó la persiana y en I*b* el cristal. Colocadas ambas pruebas una al lado de otra, como lo están en la lámina adjunta, es notable la diferencia de aspecto. I*a* presenta, casi sin deformación, las latas de la persiana, aun vistas al través del cristal, cuyas imperfecciones de forma apenas se notan, por el contrario. En cambio, I*b* muestra las latas desenfocadas en totalidad y, además, con extrañas

Fig. I*a*. Fig. I*b*.

Fig. III*a*.

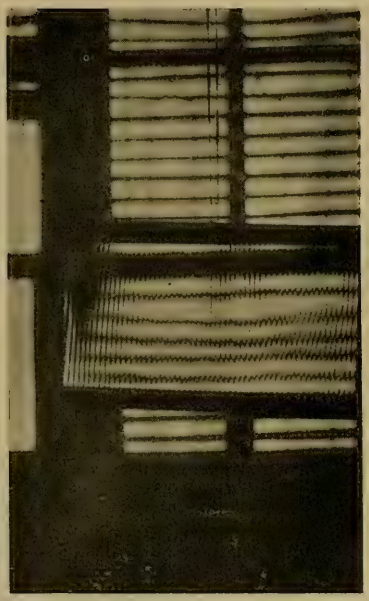


Fig. III*b*.

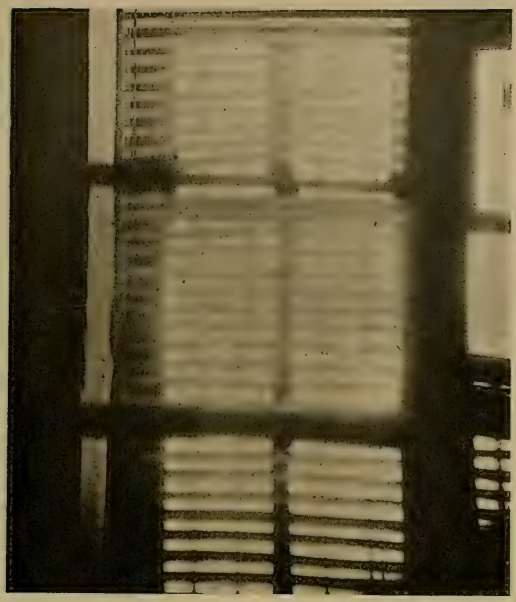


Fig. II*a*.

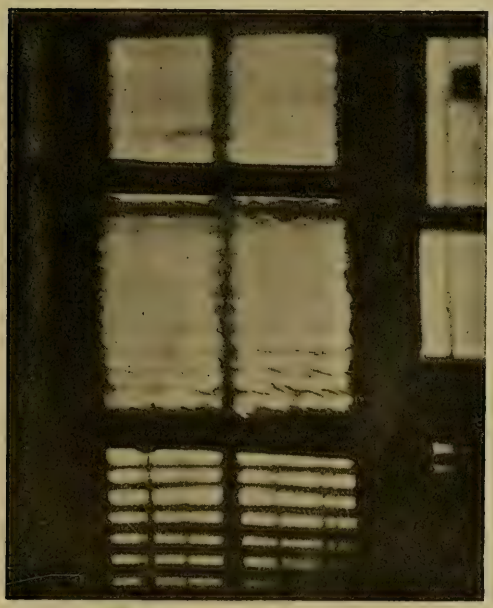


Fig. II*b*.

deformaciones en la parte interceptada por el cristal, destacándose claramente en éste las irregularidades de su estructura.

En cuanto á las fotografías II*a*, II*b*, III*a*, III *b*, todas hechas el día 7 de Febrero siguiente, he aquí de qué manera fueron realizadas. El mismo teleobjetivo y el mismo cristal de antes sirvieron para la obtención de II*a* y II*b*, pero colocados á mayores distancias, siendo $5^m,70$ la del objetivo al cristal, y $16^m,22$ la del objetivo á la persiana. Para III*a* y III*b*, se empleó un objetivo ordinario de 54 milímetros de abertura y un vidrio ondulado. En este caso, las distancias ya mencionadas fueron $4^m,12$ y $6^m,82$, respectivamente.

Túvose especial cuidado en la ejecución de todas las pruebas fotográficas (que para su publicación han tenido que ser reducidas de tamaño, *pero sin sufrir ningún retoque)*, de operar con el objetivo completamente descubierto, pues la acción de los diafragmas habría tendido á anular el efecto que perseguíamos, poniendo en foco, al mismo tiempo, objetos situados á distancias muy diferentes.

El atento examen de las fotografías II*a*, II*b*, III*a*, III*b*, conduce á las mismas conclusiones inferidas de la confrontación de las pruebas I*a* y I*b*. El contraste es todavía más sorprendente en las pruebas III*a* y III*b* sacadas con el vidrio ondulado, quizá por efecto de la mayor regularidad de las ondas que en él se originan, ó de su estructura prismática, mientras que en las asperezas irregulares del vidrio común pueden existir muchas que sean de naturaleza globular.

De todas maneras, si no nos equivocamos, esas fotografías proporcionan la demostración palpable de que *las ondas producidas en lugar determinado de un medio transparente y observadas con anteojo, son susceptibles, en general, de formar su imagen bien definida en*

el foco conjugado, correspondiente á la distancia que separa aquel lugar del objetivo. Tal fué también la opinión de las personas que presenciaron estos experimentos (*).

X.

Desde el momento en que la anterior proposición queda demostrada, la objeción capital del profesor Exner cae por su base, y la presencia simultánea en la imagen del Sol de los círculos de difusión (Zerstreuungskreise) de diámetros diferentes, ya sospechada por el Dr. Trabert, da la explicación racional de las apariencias observadas, según que se utiliza toda la abertura de un objetivo de grandes dimensiones, ó que se la reduce, en el grado que se quiera, por la interposición de un diafragma.

Para fundamentar esta explicación basta traer á la memoria los principios más elementales de la óptica geométrica, que enseñan, que todos los rayos procedentes de un punto luminoso y capaces de ser concentrados sensiblemente en un mismo foco por un objetivo acromático, al salir de este objetivo forman inmediatamente un cono, cuyo vértice es la imagen del punto, y la base la abertura del objetivo, el cual supondremos siempre de figura circular. La sección hecha á este cono por un plano cualquiera, paralelo á la base, será un círculo, que es precisamente el *círculo de difusión* de la imagen, cuyo diámetro dependerá á la vez del diámetro del objetivo y de la posición del plano á lo largo del eje del cono.

(*) En su día ya expresamos, y reiteramos aquí, nuestro agradecimiento á nuestros compañeros del Observatorio por su desinteresada cooperación en estas investigaciones, y particularmente en la obtención de las pruebas fotográficas.

Consideremos ahora una de dichas secciones, realizadas por la interposición de una pantalla, y sean:

a ..... el radio de la abertura libre del objetivo;
r ..... el radio del círculo de difusión;
y ..... la distancia de la pantalla al punto nodal de emergencia del objetivo;
φ ..... la distancia de la imagen del punto luminoso al mismo punto nodal.

La consideración del cono cortado por la pantalla conduce en el acto á la relación siguiente:

$$r = \frac{a(\varphi - y)}{\varphi} \quad \ldots\ldots (1) \qquad (*)$$

Desde luego se ve que el valor de r depende del de a, ó de la magnitud de la abertura del objetivo, de manera que, en una misma posición de la pantalla, conforme esa abertura va disminuyendo, decrece también el círculo de difusión, y las imágenes de todos los puntos del espacio, cualquiera que sea la distancia de éstos al anteojo, tienden, por esta sola razón, á resultar mejor definidas ó con más claridad perceptibles. Tal es precisamente una de las propiedades del diafragma, bien conocida de los fotógrafos: aumentar la *profundidad del foco*. Si nos fuera posible reducir la abertura á un agujero infinitamente pequeño, el cono emergente se convertiría en una simple línea recta, en la cual el foco llegaría á quedar indeterminado del todo, y la *profundidad del foco* sería infinita. Entonces, cualquiera que fuese la distancia de un objeto al observador, la imagen de ese objeto resultaría siempre enfocada: en este principio sencillo se funda, cabalmente, el procedimiento fotográfico *sin objetivo*.

(*) La admirable *Theorie der optischen Instrumente nach Abbe* del Dr. S. Czapski (Primera edición, Breslau, 1893) contiene un análisis más científico de los círculos de difusión, pero los resultados númericos de él coinciden casi con los deducidos de nuestra fórmula.

Según lo que acabamos de manifestar, bastará que nos aproximemos á ese estado ideal para que las imágenes de los objetos observados con un anteojo se presenten sensiblemente enfocadas en todas las posiciones del ocular; no siendo, por tanto, cosa rara é inexplicable que los señores Exner y Trabert llegaran á ver, casi con igual claridad ó definición, las ondulaciones del borde del Sol, lo mismo dentro que fuera del foco, cuando redujeron la abertura del objetivo á *tres centímetros* nada más; y que, por el contrario, encontraran resultados tan diferentes de aquellos al dejar libre toda la abertura. Además, en los casos contradictorios, no se ha tenido en cuenta la influencia de los rayos no acromatizados, los cuales, parcialmente por lo menos, según sea la posición del ocular, pueden concurrir en un punto, cuando los rayos que la lente principal acromatiza estén como esparcidos dentro de su círculo de difusión, y, de consiguiente, en su conjunto, muy debilitados. Esto quizás diera razón de algunas anomalías advertidas á veces, y entre ellas, el cambio de coloración de la imagen del borde solar, observada por M. Trabert, y también por nosotros con frecuencia, al introdncir el ocular.

Muchos observadores han notado igualmente, que las imágenes de los astros suelen parecer más tranquilas dentro del foco que fuera de él; fenómeno que nuestras observaciones comprueban, y depende, sin duda alguna, de que no estando, en la primera posición del ocular, enfocadas las ondulaciones producidas por la agitación del aire, sus imágenes tienden á desvanecerse y borrarse por efecto del gran diámetro que entonces toman sus círculos de difusión.

Cuando se proyecta sobre una pantalla la imagen del Sol, los rayos luminosos de él emanados han de atravesar el sistema óptico múltiple de las lentes de que está compuesto un anteojo, experimentando dicha imagen la ampliación debida al ocular. Los círculos de difusión proyectados en la pantalla, es indudable que se verán allí ampliados también en la

misma proporción; de manera que si, en general, se designa por

R..... el radio de la imagen del Sol formada en el plano focal del objetivo,
r..... el radio de un círculo de difusión en el mismo plano,

y por las mismas letras, acentuadas, las proyecciones de dichos radios en la pantalla, después de haber atravesado las lentes del ocular, se tendrá:

$$\frac{r'}{r} = \frac{R'}{R} \quad \text{ó} \quad r' = \frac{R'}{R}\, r.$$

Por otra parte, si ρ denota el valor angular del semidiámetro del Sol, y f la distancia focal del anteojo, se tendrá también $R = f \operatorname{tang} \rho$, y, en consecuencia,

$$r' = \frac{R' r}{f} \operatorname{cotang} \rho \;..... \qquad (2)$$

Refiriéndonos siempre al plano focal del objetivo, cuando se observe el Sol, será menester substituir f á y en la expresión (1), que entonces tomará esta forma:

$$r = \frac{a(\varphi - f)}{\varphi} \;..... \qquad (3)$$

Las fórmulas (2) y (3) permitirán resolver el siguiente problema:

¿Qué valor tendrá la extensión focal $\varphi - f$ *en dos anteojos diferentes, cuando el radio* r' *del círculo de difusión, medido en la pantalla, sea igual para ambos anteojos?*

Designemos por $a_1\ \varphi_1\ f_1\ r_1\ R'_1$ las cantidades referentes á uno de los anteojos.
y por $a_2\ \varphi_2\ f_2\ r_2\ R'_2$ las mismas cantidades relativas al otro anteojo.

Entonces, de (2) se sacará:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{R'_2 f_1}{R'_1 f_2}$$

Pero de (3) se deduce además:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{a_1 \varphi_2 (\varphi_1 - f_1)}{a_2 \varphi_1 (\varphi_2 - f_2)}$$

y eliminando entre estas dos ecuaciones la relación $\frac{r_1}{r_2}$, tendremos:

$$\frac{R'_1 a_1 (\varphi_1 - f_1)}{\varphi_1 f_1} = \frac{R'_2 a_2 (\varphi_2 - f_2)}{\varphi_2 f_2}$$

esto es, en general, para cualquier anteojo;

$$\frac{\varphi - f}{\varphi f} R' a = \text{constante.}$$

Y si se tiene en cuenta la pequeñez de la diferencia $\varphi - f$, respecto de f, cuando se observan objetos muy lejanos, será lícito substituir f á φ, sin error apreciable, en el denominador de la última fórmula precedente, que, de este modo tendrá la forma:

$$\frac{\varphi - f}{f^2} R' a = C \ldots \qquad (4)$$

Tal es la solución que buscábamos del problema enunciado y que nos servirá para ir algo más allá en nuestras conjeturas. En la página 696 de esta Memoria hallamos la fórmula (A) (ligeramente modificada en la notación):

$$X = \frac{1000 f^2}{\varphi - f} \ldots\ldots \qquad (5)$$

que expresa, aproximadamente, la relación conocida entre un punto X del espacio y su foco conjugado φ. Combinando

las dos fórmulas (4) y (5) se llega á la siguiente, sobre la cual debemos llamar la atención:

$$X = \frac{1000\, R' a}{C} \ldots\ldots \qquad (6)$$

Observando que C es una cantidad constante, si hubiera posibilidad de conocer su valor numérico para un anteojo determinado, fácil sería calcular para otro anteojo el valor de X, valor que podría tener significación importante en la observación de las corrientes atmosféricas. Felizmente esa posibilidad en nuestro caso existe, porque, según resulta de comparaciones reiteradas, las lecturas de ángulos de posición de las ondulaciones, hechas en el buscador de la ecuatorial de Merz del Observatorio de Madrid, estando su ocular próximamente ajustado en el foco principal de su objetivo, tienden á coincidir con las lecturas obtenidas en el anteojo mayor, cuando el ocular de éste ha sido sacado de foco unos 10 á 12 milímetros; ó, lo que es igual, cuando se apunta á objetos situados á la distancia de 2.000 metros, poco más ó menos. «Es—como ya advertimos en nuestras primeras investigaciones—lo que útilmente puede profundizar en la atmósfera el objetivo del buscador, salvo en circunstancias muy excepcionales.» Esta indicación nos abre camino para rastrear la determinación numérica de la constante deseada.

En el mencionado buscador se tiene: $R' = 100$ mm., $a =$ 32,5 mm.; de modo que, suponiendo á $X = 2.000$ m., la expresión (6) dará:

$$\left.\begin{aligned} K &= \frac{1000}{C} = 0{,}61539 \\ X &= K R' a \ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \qquad (7)$$

Los instrumentos ordinariamente utilizados en nuestras observaciones, fueron la ecuatorial de Merz (con diafragma de 19 cm. de diámetro libre), su buscador y una ecuatorial

de Steinheil de 121 mm. de abertura. En los últimos tiempos se empleó toda la abertura (27 cm.) del objetivo del anteojo de Merz, sin que se notara el menor inconveniente de resultas de esta innovación.

La aplicación de las fórmulas (7) á estos casos particulares conduce á los resultados siguientes:

	Buscador de Merz.	Ecuatorial de Merz con diafragma.	Ecuatorial de Merz sin diafragma.	Ecuatorial de Steinheil.
a	32,5 mm.	95 mm.	135 mm.	60,5 mm.
R'	100	355	355	310
f	850	4.870	4.870	2.000
$\varphi - f$	0,361	1,143	0,804	0,347
X	2.000 m.	20.754 m.	29.493 m.	11.542 m.

Las observaciones hechas en la ecuatorial de Steinheil permitieron analizar las corrientes atmosféricas que existían á diversas altitudes, casi con la misma seguridad que utilizando la ecuatorial más potente de Merz; por lo que nos inclinamos á creer que los últimos valores de X hallados expresan lo que podríamos llamar *poder de separación* de cada instrumento, esto es, su máximo alcance ó la mayor distancia que es capaz de medir en la atmósfera. Para la ecuatorial de Steinheil, en las condiciones que fué empleada (conforme se ve en el cuadro precedente), dicha distancia excedería de 11.000 metros, ó lo que es igual, que cerca del cenit, este anteojo podría sondar la región de los cirros, conclusión que está de acuerdo con el resultado de las observaciones.

Parece, pues, si nuestra conjetura no es desacertada, que estos valores deben representar una cosa análoga á lo que los fotógrafos llaman *distancia hiperfocal*, más allá de la cual todos los objetos parecen situados en un mismo plano. Y en tal hipótesis, las $\varphi - f$ correspondientes, deducidas de la fórmula (5), serían la *extensión focal* necesaria en cada ins-

trumento para que dichos objetos comenzasen á resaltar en planos diferentes ó á adquirir relieve.

Vimos anteriormente que, con el fin de efectuar ciertas experiencias, habiamos colocado en el objetivo de la ecuatorial de Merz varios diafragmas provistos, respectivamente, de agujeros de 8 y 3 centímetros de diámetro. Las fórmulas (7) aplicadas á estos casos, darán:

$a = 40$ mm.	$\varphi = 2{,}714$ mm.	$X = 8.739$ metros.
$a = 15$ »	$\varphi = 7{,}238$ »	$X = 3.277$ »

Luego, si la interpretación dada á esas fórmulas es verdadadera, el diafragma de 3 cm. no permitiría separar las ondulaciones producidas á más de tres kilómetros de distancia, hasta en anteojos de dimensiones tan grandes como las de la ecuatorial de Merz perteneciente al Observatorio de Madrid. Más allá, todos los movimientos parecerían como enmarañados unos con otros, cualquiera que fuese la posición del ocular. Este efecto debe aumentar en los instrumentos más pequeños, tales como los *escintilómetros* (*) que se emplean generalmente para la observación de los fenómenos del centelleo. Además, dichos instrumentos, por sus cortas dimensiones, no permiten grande amplificación de las imágenes, de manera que los objetos muy lejanos difícilmente pueden llegar á verse con suficiente claridad.

En la revista *The Observatory* (vol. XII, p. 194) se lee que el Dr. Pernter, de Viena, queriendo cerciorarse de si el centelleo de las estrellas en realidad se originaba en las capas inferiores del aire, conforme generalmente se creía, observó una vez el centelleo aparente de Sirio, con un escintilómetro de Exner, al pie y en la cumbre del Sonnblick (á 3.100 metros de altitud), y halló que el centelleo era más débil al pie que en la cumbre de dicha montaña; de lo cual dedujo que

(*) Del verbo latino *scintillare*, centellear.

el fenómeno en cuestión se producía en las altas regiones de la atmósfera.

Pero si admitimos con el Dr. See (*Astr. Nachr.*, número 3.455) que la verdadera causa del centelleo de las estrellas reside en la agitación del aire, ó en los fenómenos ondulatorios á que esta agitación da origen, es probable que el centelleo pueda producirse á cualquier altitud, según sean el estado y condiciones de las corrientes aéreas á la sazón existentes. Partiendo de tal hipótesis, bastaría que solamente fueran las capas superiores atmosféricas las que estaban agitadas, en el caso de M. Pernter, para que los hechos debiesen presentarse tal como fueron observados por este sabio meteorologista con un anteojo de dimensiones muy pequeñas. La misma causa condujo, sin duda, á M. Exner en sus primeros trabajos á la creencia errónea, más tarde por él lealmente rectificada, que las ondulaciones del borde del Sol seguían una dirección paralela á la del viento señalada cerca del suelo por los anemómetros.

Los razonamientos precedentes acerca del *poder de separación* de los instrumentos, así como las fórmulas y las conclusiones de aquellos inferidas, no convienen, en rigor, más que á las observaciones efectuadas por proyección. Si el astro elegido para la determinación de las corrientes atmosféricas no fuera el Sol, sino la Luna, por ejemplo, la proyección de las imágenes, por la poca viveza de éstas, no daría resultado, y habría que recurrir á la observación directa. En estas nuevas condiciones, al tener que aplicar el órgano visual al ocular del anteojo, el problema últimamente considerado se complica bastante. Según el Dr. Czapski (*), entonces ya no se trata de hallar la magnitud *lineal* de los círculos de difusión, sino su valor *angular*, en el cual influyen diversas causas de naturaleza subjetiva, tanto física como fisiológica, diferentes de un individuo á otro y difíciles

(*) *Theorie der Optischen Instrumente*, p. 171.

de analizar. Pero, aun en este caso, *un mismo observador* acaso rastrease el medio de hallar el poder de separación *relativo* de dos anteojos, si se limitara á tratar el problema desde el punto de vista puramente matemático, llevando el cálculo de modo parecido al empleado en las observaciones efectuadas por proyección.

Sean, r el valor lineal del radio del círculo de difusión de un punto dado del espacio en el foco principal del objetivo; ρ y ρ' los valores angulares respectivos del mismo radio, según que se le mira desde el centro del objetivo ó desde el centro del ocular; f y f' las distancias focales de estas lentes; se tendrá sin error apreciable, en atención á la pequeña amplitud de los ángulos ρ y ρ',

$$r = f\rho = f'\rho'.$$

Eliminando r entre la última ecuación y la (3), se obtiene

$$\frac{a(\varphi - f)}{\varphi} = f'\rho',$$

de donde, escribiendo f en lugar de φ en el denominador, como se hizo antes,

$$\rho' = \frac{a(\varphi - f)}{ff'} \ldots\ldots \qquad (8)$$

Si supusiéramos que la condición de *equivalencia* fuese $\rho' =$ *constante* para todos los anteojos, se deberá tener siempre:

$$\frac{a(\varphi - f)}{ff'} = \frac{\varphi - f}{f^2} \cdot \frac{fa}{f'} = C' \ldots\ldots \qquad (9)$$

Ahora se puede eliminar $\frac{\varphi - f}{f^2}$ acudiendo á la ecuación (5), lo que dará finalmente:

$$X = \frac{1000}{C'} \cdot \frac{fa}{f'} = K' Ma \ldots\ldots \qquad (10)$$

si M designa la amplificación de las imágenes en el anteojo.

Siendo el valor numérico de la constante K', por los motivos anteriormente expuestos, difícil de hallar, un mismo observador puede, sin embargo, determinar por medio de la fórmula (10) el poder de separación relativo de dos anteojos cualesquiera, si le son conocidas la abertura del objetivo y la amplificación que produce el ocular. Como ejemplos numéricos, en apoyo de nuestro razonamiento, nos serviremos de los mismos instrumentos ya considerados, tomando por unidad de referencia el buscador de Merz.

Buscador de Merz.	Ecuatorial de Merz con diafragma.	Ecuatorial de Merz sin diafragma.	Ecuatorial de Steinheil.
$a_1 = 32{,}5$ mm.	$a_2 = 95$ mm.	$a_3 = 135$ mm.	$a_4 = 60{,}5$ mm.
$M_1 = 74{,}4$ veces	$M_2 = 264{,}2$ veces	$M_3 = 264{,}2$ veces	$M_4 = 190{,}4$ veces
$\frac{X_1}{X_1} = 1{,}00$	$\frac{X_2}{X_1} = 10{,}38$	$\frac{X_3}{X_1} = 14{,}75$	$\frac{X_4}{X_1} = 4{,}76$

Si se multiplican estos valores de $\frac{X_n}{X_1}$ por 2000, los productos discrepan poco de los valores de X_n obtenidos en el cuadro referente á las observaciones realizadas por proyección. Con un diafragma de 3 centímetros de abertura, el anteojo mayor de la ecuatorial de Merz solo tendría un poder de separación relativo igual á 1,64, es decir, poco más de vez y media el del buscador.

Las nociones, en cierto modo empíricas, que hemos desenvuelto en los párrafos precedentes, no nos parecen, sin embargo, destituídas de fundamento, y podrán acaso servir de punto de partida para nuevas investigaciones. Y en cuanto á la interpretación dada á los movimientos ondulatorios observados en el borde del Sol, y que es la idea fundamental del método astronómico, en esta Memoria expuesto,

para determinar la dirección de los vientos superiores, tampoco la creemos aventurada. Por el contrario, anímanos á estimarla justa el dictamen autorizado de los astrónomos del Observatorio de Catania, Sres. Mascari y Cavasino, que no hace mucho tiempo publicaron dos notas en las *Memorie della Società degli Spettroscopisti Italiani* (vol. 34, 1905), en las cuales, al discutir los trabajos análogos por ellos y por el Sr. Riccò (Director del citado Observatorio) efectuados durante muchos años, y que ya mencionamos más arriba, con el fin de estudiar la influencia de la agitación de la atmósfera en la visibilidad de los astros, se lee textualmente: *Risultati che vengono tutti in appoggio alle idee svolte dal Ventosa e del suo metodo per osservare i ventí superiori mediante le ondulazioni del bordo solare.*

El comité meteorológico internacional, reunido en Upsal el año de 1894, y al que habíamos sometido, para su examen, el nuevo método, opuso el reparo de que la adquisición de los instrumentos necesarios para practicarlo sería costosísima; pero la contestación á ese reparo parece muy fácil por dos razones: en primer lugar, porque muchos, entre los Observatorios existentes, podrían, sin obstáculo ni entorpecimiento en sus trabajos, dedicar cada día practicable á faena tan breve, que demanda apenas una hora, alguno de los anteojos que poseen; en segundo lugar, porque, según lo que hemos dicho de los resultados obtenidos con la ecuatorial de Steinheil, no parece aventurado el afirmar que para la observación cotidiana de las corrientes atmosféricas bastarían anteojos que tuvieran 10 á 12 centímetros de abertura y unos 2 á 3 metros de distancia focal. Y puesto que estos instrumentos no exigirían llevar círculos graduados, sino simplemente un sencillo aparato de proyección para recibir en él la imagen del Sol, la adquisición (único gasto) de tales anteojos no sería costosa ni difícil para las estaciones meteorológicas de primer orden, sólo, en rigor, para éstas necesaria, si se atiende á las colosales dimensiones que de ordinario

tienen las depresiones ciclónicas y á la regularidad de sus movimientos al propagarse de unos países á otros.

Por otra parte, este método, que tan buenas condiciones prácticas reune, lejos de excluir á los demás, podría cooperar eficazmente con ellos, en primer término, á la resolución del gran problema de la *previsión del tiempo*, desideratum de la Meteorología, para lo cual parécenos especialmente adecuado. Lo mismo que en todas las Ciencias de observación sucede, ningún método sobra, porque su multiplicidad contribuye á ensanchar en diversas direcciones los horizontes del saber, purgando al propio tiempo los resultados de la experiencia de los errores sistemáticos inevitables que cada cual contenga, y son, por cualquier otro medio, tan difíciles de descubrir.

La síntesis de nuestro trabajo, como en varios pasajes de este escrito manifestamos, fué dada á conocer sucesivamente en tres Memorias, que se publicaron en el extranjero en 1890, 1895 y 1899, de las cuales sólo la primera lo fué también en España (*). Habiendo desde entonces transcurrido más de diez y ocho años, nos pareció oportuno reproducir ahora los resultados de nuestras investigaciones, reuniendo el contenido de las tres Memorias citadas en la presente, de la cual, accediendo gustosos á los deseos manifestados por el Comité Ejecutivo de la «Asociación Española para el progreso de las Ciencias», dimos un resumen en el Congreso celebrado el año precedente en la ciudad de Zaragoza.

(Concluirá.)

(*) *Método para determinar la dirección del viento por las ondulaciones del borde de los astros. (Crónica Científica.)*—Barcelona, 1890.

III.—Estudio «espectrográfico» de las «Blendas».

Investigación acerca de la Blenda de «Picos de Europa». Presencia del «Germanio», en la misma.

POR GEORGES URBAIN, ANGEL DEL CAMPO Y CLAIR SCAL.

La investigación de cuerpos en proporciones extremadamente pequeñas, es problema que en todas épocas ha ocupado preferentemente la atención de los químicos; no obstante, sólo en estos últimos tiempos es cuando el asunto adquirió interés cada vez mayor á medida que la Ciencia fué descubriendo procedimientos analíticos más perfectos y sensibles. La importancia, siempre grande, de la cuestión, aumenta sobremanera tratándose de investigaciones acerca de materias químicamente tan complejas como las que constituyen algunos minerales. Sabemos, con toda exactitud, cuáles son las especies químicas dominantes en la composición de numerosas especies mineralógicas, hasta el punto de servir para definirlas; pero ignoramos casi por completo los demás cuerpos que les acompañan, á modo de impurezas, en proporciones tales que no los indican los procedimientos corrientes del análisis. Es, pues, necesario completar el conocimiento de la Naturaleza en este punto, y á conseguirlo deben dirigirse los esfuerzos de químicos y naturalistas, teniendo en cuenta que semejante estudio, apenas comenzado, promete ser fecundo en resultados, á nuestro juicio, de suma trascendencia; así los químicos, viendo que cuerpos, hasta ahora calificados de muy raros, se hallan considerablemente diseminados, podrán procurarse más fácilmente las primeras materias necesarias para estudiar aquellas regiones aun mal conocidas de su Ciencia: los geólogos y mineralogistas, al considerar estos vestigios ó indicios, á

manera de verdaderos fósiles químicos, hallarán sin duda en su conocimiento un dato más, acaso de inestimable valor, en que fundar la historia ó génesis de buen número de minerales y rocas.

Penetrados de estas ideas, hemos emprendido un estudio sobre las *blendas*, eligiendo el procedimiento analítico espectrográfico, ya que su estado actual lo hace particularmente útil para el estudio de minerales, que pueden ser examinados, cualesquiera que sean, sin previo tratamiento químico.

Este método, junto con las medidas de radiactividad, constituye ahora el único camino adecuado para el descubrimiento de nuevos elementos, y es el mismo que uno de nosotros ha utilizado con éxito en investigaciones anteriores (*), donde necesitaba un procedimiento espectral más preciso que los de uso corriente. Haremos una ligera reseña de aquella parte del método de que nos hemos servido, porque su técnica, aunque difiere un poco de la clásica adoptada en la mayoría de los laboratorios, no aparece consignada toda en casi ningún Tratado de QuímicaAnalítica.

Diremos, ante todo, que hemos preferido los espectros de arco á los de chispa; las razones de esta preferencia son las siguientes:

Los espectros de chispa experimentan grandes variaciones cuando se modifican las condiciones de la descarga y, principalmente, la *autoinducción* y la *capacidad* del circuito.

Los espectros de arco de un mismo cuerpo son siempre idénticos.

En los espectros de chispa aparecen multitud de rayas, de las denominadas *parásitas*, donde figuran, además del espectro de los electrodos, generalmente de platino, las numerosas rayas del aire y de ciertas impurezas procedentes del vaso en que se coloca la disolución.

(*) G. Urbain. Investigaciones sobre las Tierras raras.

En los espectros de arco, el espectro *parásito* se limita á las bandas del carbono, conocidas con el nombre de espectro de Swann, y algunas de las poquísimas rayas que constituyen los espectros del magnesio, aluminio, silicio y calcio.

El arco eléctrico tiene, además, la ventaja de permitir las observaciones con cualesquiera cuerpos sólidos.

Ahora bien; como el espectro de Swann ocupa una buena parte de la región visible, y el principio de la ultra violeta, es necesario, para que los espectros de arco resulten útiles, que sea observada en ellos de preferencia la dicha región ultravioleta del espectro, que se forma más allá de las bandas del carbono. Esto implica que la parte óptica del aparato que se emplea sea diáfana para estas radiaciones ya muy extremas, y no siéndolo el vidrio, habrá de ser sustituído por el cuarzo; la absorción de luz debe ser lo menor posible, y por esta razón deben preferirse los prismas á los resaltos; y dicho se está que, operando en tales condiciones, será forzoso sustituir el ocular por la cámara fotográfica, y la vista del observador por la placa sensible: el aparato debe ser, en suma, un Espectrógrafo y no un Espectroscopio.

El que hemos utilizado, construído por *Ivan Werlein,* de París, es tal, que la extensión del espectro, desde una longitud de onda cercana de 2.000 *unidades Angström* (diezmillonésima de milímetro) hasta el verde visible, es próximamente de 20 cm.

Las placas empleadas han sido de marca *Lumière* estrarrápidas y de 6 × 30 cm. de tamaño; su longitud y la relativa elasticidad del vidrio permiten darles en el *chassis,* convenientemente dispuesto, ligera curvatura con objeto de que se adapten, lo más posible, á la *diacáustica* del aparato.

Impresionadas las placas, se revelan y fijan por los mismos procedimientos y fórmulas que otra cualquiera fotografía; el *cliché* queda de este modo convertido en un documento duradero, que puede siempre ser examinado.

Para producir el arco hemos usado carbones sin mecha

de unos 0,005 m. de diámetro, que se encuentran fácilmente en el comercio, utilízando corriente continua con intensidad de 12 amperios; los carbones se colocan verticalmente frente al colimador del espectrógrafo, ocupando el positivo la parte inferior, habiendo practicado antes en éste y en la dirección de su eje una pequeña cavidad, destinada á reciblr ulteriormente la materia que se quiere analizar, previamente pulverizada y seca.

Antes de ponerla en el pequeño cráter referido, se fotografía el espectro del arco, que en estas condiciones salta entre los electrodos de carbón casi puro; se introduce después la materia y se hace de nuevo saltar el arco obteniendo otra fotografía. Por último, se obtiene una tercera haciendo saltar el arco entre dos electrodos de hierro.

El tiempo de exposición varía con el grado de volatilidad ó fijeza de la substancia, pero suele oscilar entre 4 y 10 segundos.

La cantidad de materia necesaria para los ensayos es muy pequeña, y esto es otra ventaja en favor de los espectros de arco. Así, una décima de milígramo es muy suficiente á veces para obtener un buen espectro; pero en la práctica, si no se trata de una materia muy rara ó muy preciosa, suelen emplearse algunos milígramos.

Un diafragma especial colocado sobre la hendidura del aparato, permite recibir los espectros referidos en la misma placa, de manera que queden inmediatamente unos sobre otros, sin que se recubran mutuamente y sin que el chasis del aparato cambie de posición. El primer espectro permite determinar las rayas que proceden de los electrodos y de ellas no hay que ocuparse. El espectro del hierro, que presenta rayas numerosas en toda su extensión, y que está perfectamente conocido (*), sirve para referir la posición de

---

(*) Fabry et Buisson, 1097.

las rayas del obtenido en segundo término, que es el espectro á estudiar.

En los grabados que ilustran esta Nota, pueden distinguirse perfectamente, en cada espectrograma, las tres partes á que nos referimos: la núm. 1, representa el espectro producido por los electrodos; la núm. 2, el espectro del hierro, y lo restante, el de la materia estudiada; en cada placa, de las dimensiones citadas, y mediante un desplazamiento vertical del chassis, pueden obtenerse independientemente 4 ó 5 espectrogramas complejos, como el descrito.

Estos espectrogramas son examinados por medio de un aparato micrométrico, que no es otra cosa sino un microscopio de poco aumento, diez diámetros por lo general, á cuya platina puede imprimírsele un movimiento de traslación mediante un tornillo micrométrico horizontal que se cruza perpendicularmente con el eje del anteojo; una máquina de dividir puede ser empleada perfectamente en la operación; por lo tanto, observando con este microscopio nuestros espectros, se obtiene el mismo efecto que si se examinara uno de dos metros de longitud.

Para llevar á cabo el estudio de cada espectrograma de una manera cómoda, es necesario poseer además una reproducción del espectro del hierro de tamaño conveniente, en la que las principales rayas tengan marcada su longitud de onda correspondiente; las fotografías de los grandes espectros de resalto, publicadas por *Kayser* ó *Fabry et Buisson*, son muy buenas para el caso.

Sobre este espectro de referencia se anota la posición relativa de las principales rayas de todos los elementos; de tal modo, un examen rápido del espectrograma que se analiza y su comparación con la región correspondiente del de referencia, permite determinar casi inmediatamente la naturaleza de los cuerpos que originan el espectro en cuestión; del mismo modo se puede deducir rápidamente la longitud de onda de una raya con relación á otras dos del

hierro; sólo en caso de incertidumbre son necesarias las medidas rigurosas, las cuales pueden hacerse anotando con todo cuidado la posición que corresponde al soporte móvil del aparato, cuando el retículo del anteojo coincide exactamente con el centro de la raya que se desea medir, y repitiendo la operación con las dos rayas del hierro más próximas que encuadren la anterior. Después, por una interpolación ó un simple gráfico, tendremos la longitud de onda buscada, asimilando en el último caso la curva del aparato correspondiente á esta región estrecha del espectro, á una línea recta. Obtiénense así, cuatro cifras enteras (U. A.) y una decimal: el error cometido nunca es mayor de dos ó tres unidades de este último orden.

Con un poco de costumbre, la evaluación directa es casi tan exacta como la medida, sirviendo ésta únicamente de comprobación.

Complemento indispensable del aparato micrométrico y de la operación descrita, es el empleo de unas tablas de longitudes de onda de todas las rayas conocidas, si se quiere hacer la identificación de cada una de las encontradas en el espectrograma con toda exactitud; la bibliografía contiene descripciones muy completas, sobre todo de espectros de arco, de todos los elementos conocidos; nosotros hemos utilizado con tal fin las de Tablas *Exner et Haschek.*

*
* *

Prescindiendo de enumerar los servicios que el método descrito ha prestado en el estudio de las *Tierras raras*, asunto, por otra parte, ya publicado y conocido, daremos cuenta, en cambio, de los que ha empezado á prestar en el estudio de la Blenda.

Se sabe desde hace tiempo que las Blendas contienen, además del sulfuro de cinc, pequeñas cantidades de *Cad-*

mio, *Plomo*, *Estaño*, *Plata*, *Antimonio* y *Arsénico* y pequeñísimas porciones de elementos tan poco conocidos como el *Galio* y el *Indio*.

Es, pues, interesante rehacer el análisis de este mineral por el procedimiento espectrográfico, para saber si al lado de los cuerpos citados puede contener otros tan raros como los dos últimos, y que por su escasísima proporción no sean reconocibles fácilmente empleando los métodos analíticos corrientes.

La Blenda que hemos examinado con más pormenores es la de Picos de Europa.

Un trabajo reciente del Sr. Llord y Gamboa (*) ha hecho fijar nuestra atencion sobre estas Blendas, resultando de su análisis que los metales contenidos en ellas, además del Cinc, son: Plomo, Cadmio, Hierro, Manganeso, Aluminio, Calcio y Sodio.

Nuestro análisis confirma, en parte, el resultado obtenido por el Sr. Llord; pero hay algún punto en que difiere: dicho señor no ha encontrado Indio ni Galio, y nosotros sí. En lo que concierne al Indio, diremos que contiene una traza insignificante, pues su presencia la declara únicamente la raya cuya longitud de onda es 3256,2 U. A., la más intensa del espectro de este elemento, que aparece, sin embargo, en nuestros espectrogramas extraordinariamente débil: es evidente que tal cuerpo será muy difícil de encontrar por otro procedimiento que no sea el espectrográfico.

Respecto del Galio, podemos afirmar que esta blenda es relativamente rica en dicho cuerpo; hemos observado en la región del espectro examinada las tres rayas características de este elemento, cuyas longitudes de onda son:

2874,2 U. A. (Débil).
2943,2 » (Bastante fuerte).
2944,0 » (Débil).

(*) Anales de la S. E. de F. y Q.—Núm. 63.—Mayo, 1909.

Por comparación con la blenda de *Pierrefite*, en la que *Lecoq de Boisbaudran* descubrió y aisló el *Galio*, puede afirmarse que la blenda de «Picos de Europa» es tan abundante como ella en dicho metal. La proporción debe oscilar, por tanto, entre 1 y 2 cienmilésimas: es la cantidad corriente en las Blendas, y puede asegurarse desde luego, como para el *Indio*, que sólo por semejante método puede ser encontrado.

El *Mn*, *Fe*, *Ca*, *Al* y *Na* no existen en esta Blenda; si el Sr. Llord los ha encontrado, es probable que hayan procedido de una muestra no desprovista de ganga; nosotros hemos examinado muestras muy diversas y en todas ellas hemos obtenido idénticos resultados.

*
* *

Pero lo más notable de la Blenda estudiada, relativamente muy pura, es que contiene indudablemente *Germanio:* aparece este elemento caracterizado por las rayas cuyas longitudes de onda son:

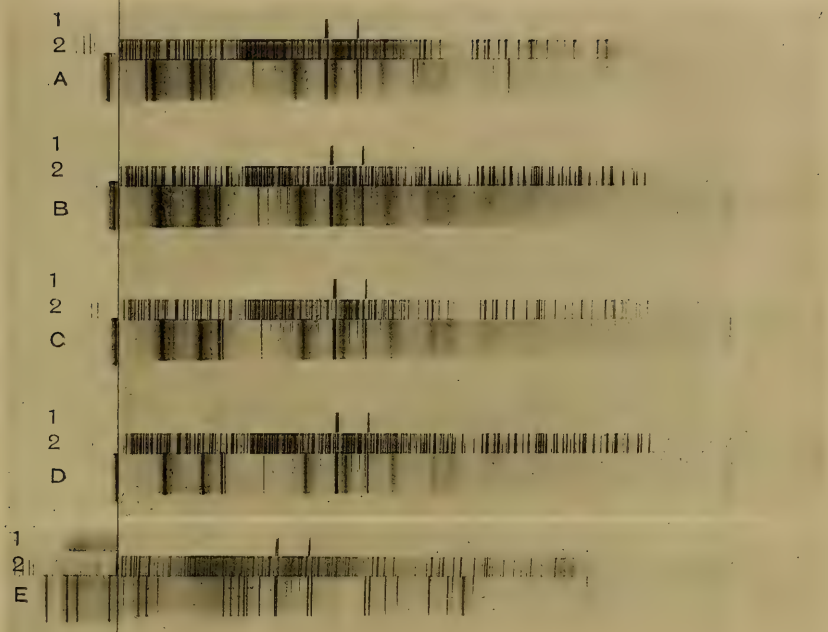
2709,7 U. A. (Débil),
2754,7 » (Muy débil),
3039,0 » (Intensidad media),
3125 » (Débil);

Dada su intensidad, la proporción en que aquel elemento se encuentra debe ser alrededor de una millonésima.

El descubrimiento del *Germanio* en la Blenda es un hecho tan interesante para los químicos como para los mineralogistas; no se había encontrado hasta aquí este cuerpo, que sepamos, más que en la *Argyrodita*, mineral muy raro de *Freiberg*, cuyo filón hoy parece agotado; por tal motivo, nuestro conocimiento acerca de tan raro cuerpo se limita á lo que hace unos veintitres años escribió su descubridor Winkler.

Si el *Germanio* se encontrase de ordinario en la Blenda podría esperarse hallar otra más rica que la de «Picos de

CO



Fototipia de Hauser y Menet.—Madrid

os.

enda Turca.

ESPECTROS DE ARCO ELÉCTRICO

Fototipia de Hauser y Menet.—Madrid

1. Espectro de los electrodos.
2. Espectro del Hierro.

Espectro de la blenda "Picos de Europa".

- A. Muestra media.
- B. Cristales rojos.
- C. Cristales anaranjados.
- D. Cristales amarillos.
- E. Espectro de una blenda Turca.

Europa». Las investigaciones que hemos hecho con diferentes Blendas en este sentido, prueban que, en efecto, un gran número de ellas contiene el elemento en cuestión, y en algunas la proporción no debe estar muy alejada de la diezmilésima; por ejemplo, hemos encontrado el *Germanio* extraordinariamente abundante en una Blenda de origen turco (véase el grabado E.), y en otra tenida como de procedencia americana; se ha encontrado también en muestras procedentes de *Laurium*, que contienen una traza infinitesimal; la de *Pierrefite* es menos germanífera que la de «Picos de Europa»; en la *Sharfeuberg* hay una traza también infinitesimal, y en la de *Zinnwald* existe en cantidad algo mayor.

Es también interesante la observación que hemos tenido ocasión de hacer, de que cuanto más coloreada es la Blenda, tanto más rica es de *Germanio;* así, en la Blenda de «Picos de Europa» los cristales de color amarillo puro carecen casi totalmente de este elemento; presentan ya un vestigio los anaranjados, y es, sobre todo, en los cristales de color rojo obscuro donde el espectro del *Germanio* aparece más intenso; en fin, las Blendas antes citadas como extraordinariamente ricas, son negras.

En el grabado adjunto, el espectrograma *D* corresponde á los cristales amarillos; el *C*, á los anaranjados; el *B*, á los rojos, y el *A*, á la muestra media, con algo de ganga.

Este espectrograma *A*, es el que hemos examinado preferentemente.

Dedúcese de lo expuesto, que el *Germanio* se encuentra en las Blendas, análogamente al *Galio* y al *Indio;* nos proponemos, cuando dispongamos de considerable cantidad de Blenda suficientemente rica en Germanio, extraerlo y aportar nuestra contribución á su conocimiento.

Pero antes de hacer esto en grande, era necesario llevar á cabo una serie de investigaciones preliminares para saber, sin incertidumbres, en qué parte del tratamiento quimico el

Germanio se concentra preferentemente. Haremos sólo un resumen de esta investigación, que hemos practicado con la Blenda de «Picos de Europa», de la cual teníamos varios kilogramos á nuestra disposición, merced á la amabilidad del Sr. Rodríguez Mourelo, que nos los ha proporcionado, y á quien desde aquí nos complacemos en dar las gracias.

Es preciso evitar en el tratamiento el empleo del ácido clorhídrico, por la facilidad con que durante las concentraciones se volatizan ciertos cloruros; así es que comenzamos la operación tratando el mineral previa y convenientemente pulverizado por ácido sulfúrico de mediana concentración, primero en frío y después en caliente, continuando la operación mientras se advirtió desprendimiento gaseoso.

En estas condiciones, el *Germanio* queda totalmente en el residuo del ataque, en unión de regular porciónde Cinc, Plomo, Cadmio, Estaño, Galio, y considerable cantidad de *azufre* libre, que conviene eliminar.

Para conseguirlo es lo mejor fundir el residuo con carbonato sodopotásico; la masa fundida y pulverizada es tratada por el agua, y la parte insoluble se somete de nuevo á la acción del ácido sulfúrico, que deja aun un residuo, en el cual se encuentra el Germanio con el Estaño, el Plomo, un poco de Cadmio y Cinc, aun sensibles, y una *traza* de *Galio*. Cuando se trata este residuo por ácido nítrico, el *Germanio* entra en disolución con el *Cinc* restante y una *traza* de *Plomo*, *Galio* y *Cadmio*. La materia con la cual estas observaciones han sido hechas, presenta entonces el siguiente espectro del *Germanio:*

2691,4	U. A.	(Bastante intensa).
2709,7	»	(Idem).
2754,7	»	(Medianamente intensa).
3039,2	»	(Bastante intensa).
3125,0	»	(Débil).
3269,6	»	(Idem).

Si se compara este espectro con el observado en la Blenda inicial, puede notarse, ademas de un aumento en el número de rayas, puesto que ahora se presenta esta parte de su espectro casi completa, un crecimiento considerable de intensidad; la concentración del Germanio es evidente.

Proseguimos actualmente el tratamiento, que nos proponemos hacer, en gran escala, según decimos antes, partiendo de una Blenda más rica que la de «Picos de Europa».

Merece mencionarse, como prueba de lo que el procedimiento análitico empleado es capaz de conseguir, el hecho de que en un cierto momento de la marcha descrita, escrupulosamente vigilada en todas sus partes con el espectrógrafo, hemos encontrado las siguientes rayas, que no habían sido vistas en la blenda inicial, y que por lo mismo fueron cuidadosamente medidas:

2942,3	U. A.	(Extremadamente débil).
2956,2	»	(Idem).
3088,3	»	(Idem y difusa).
3130,8	»	(Muy débil).
3186,5	»	(Débil).
3192,0	»	(Menos débil que la anterior).
3199,9	»	(Intensidad media).
3234,5	»	(Débil).
3236,7	»	(Muy débil).
3354,6	»	(Débil).
3371,8	»	(Menos débil que la anterior).
3373,1	»	(Extremadamente débil).
3377,8	»	(Débil).

Todas estas rayas corresponden al *Titanio*, elemento que debe concentrarse, atendiendo á sus propiedades, en la porción donde lo hemos encontrado, y que procede de seguro de la ganga que tenía el mineral sometido al tratamiento; pero debe hallarse en proporción extremada por lo exigua, puesto que no aparece tal cuerpo en el primer ensayo, y ha sido necesario operar con varios kilogramos de mineral para conseguir obtener un espectro tan extraordinariamente

débil como el que acabamos de describir; el *Titanio* lo hemos encontrado, efectivamente, en las gangas de algunas de las otras Blendas analizadas.

*
* *

En las investigaciones precedentes y en las que actualmente proseguimos con Blendas de distintas procedencias, hemos puesto en práctica un método de observación muy exacto y rápido, que permite hacer, sin incertidumbre alguna, la identificación de todas las rayas observadas, incluso las más débiles.

Para ello hemos limitado nuestras observaciones á la región del espectro comprendida entre las las rayas $\lambda = 2663{,}3$ U. A. del Plomo, y $\lambda = 3383$ U. A. de la Plata; hemos formado, además, una lista con las longitudes de onda de todas las rayas que hay en esta región pertenecientes á *Ag, As, Bi, Cd, Cu, Ga, Ge, In, Pb, Sb, Sn, Tl,* y *Zn,* elementos que pueden encontrarse en las Blendas; ninguna raya de estos cuerpos, comprendida entre los límites citados, puede escapar á nuestra observación; pero como el mineral puede tener ganga, hemos añadido á la lista todas las rayas de *Al, Ca, K, Mg, Na* y *Si.*

Ahora bien; como accidentalmente pudiera contener el mineral cantidades pequeñas de otros cuerpos muy repartidos en la Naturaleza, se añaden á la lista las rayas *más características* de *Au, Ba, Co, Cr, Gl, Hg, Li, Mn, Ni, Pt, Sc, Sr* y *Va;* en el caso de encontrar rayas pertenecientes á alguno de los últimos cuerpos, hubiéramos fijado la atención en las rayas más débiles que les corresponden y que no hemos incluído en la lista citada.

En el caso de que se hubieran observado rayas no pertenecientes á ninguna de las dos categorías de elementos precedentes, quedaba suponer que pertenecían á algunos de los

siguientes: *Cs, Mo, Nb, Ra, Rb,* metales de la mina de *Pt, Ta, Th, Ti, Ur, W* y *Zr;* si las rayas á determinar pertenecían á alguno de estos cuerpos, era muy fácil eliminar todas las que les corresponden.

Si todavía alguna raya queda por determinar, que no pueda ser atribuída á ninguno de los últimos elementos citados, será forzoso reconocer que es nueva.

Y en efecto, en el curso de nuestro trabajo hemos observado cierto número de rayas extremadamente débiles, que nos ha sido imposible atribuir á ningún elemento conocido, tales son las siguientes:

2687,5 U. A.
2744,2 »
2751,6 »
2752,9 »
2818,5 »
2826,2 »
2867,2 »
3013,3 »
3014,2 »
3031,4 »
3064,7 »
3065,7 »

Ahora bien; el origen de estas rayas ¿puede ser atribuído á la existencia de un nuevo elemento? Nos mostraremos un poco reservados acerca de este punto, porque no está absolutamente probado que en las tablas de longitudes de onda de los diferentes autores no hayan sido omitidas algunas rayas débiles de los elementos hoy existentes.

Componemos actualmente un atlas de los espectros de todos los cuerpos conocidos, con el fin de asegurarnos de que las rayas nuevas observadas en nuestro trabajo no deben ser atribuídas á ninguno de ellos; pero se comprenderá fácilmente que es ésta empresa muy larga y difícil á causa de la misma extraordinaria sensibilidad del espectro; por tales circunstancias, entendemos que todo el mundo encontrará dis-

creto que reservemos la publicación de la parte más original é interesante de nuestras investigaciones para una fecha ulterior.

*
* *

En resumen: aparte las someras manifestaciones que quedan esbozadas en los párrafos precedentes, creemos poder hacer concretamente, como consecuencia de nuestros trabajos, las siguientes afirmaciones:

1.ª Hemos demostrado la presencia del *Germanio* en las Blendas, desempeñando en ellas el mismo papel que el Galio y el Indio.

2.ª Hemos establecido un método que permite concentrar considerablemente el Germanio, separándolo casi en totalidad de los demás cuerpos que en las Blendas le acompañan.

París, Septiembre 1909.

(Laboratorio de Química Mineral de la Sorbona.)

IV.—Contribución al estudio de las esencias de trementina españolas.

Por Obdulio Fernández.

La esencia de trementina, procedente de la miera de los pinos andaluces, luego de rectificada sobre carbonato potásico, en una corriente de vapor de agua, resulta constituída por un pineno especial, á lo que parece peculiar suyo, y cuyas características físicas más principales han resultado las siguientes, después de repetidas y muy cuidadosas determinaciones:

Densidad, á 20°..... 0,859
Poder rotatario $[\alpha]_D$..... — 8,73 *para* 10cc.
Indice de refracción $[n]_D$. 1,4654

De suerte que el hidrocarburo de que se trata no es el asignado á las esencias francesas, ni por su densidad, ni atendiendo á la actividad óptica y al índice de refracción, cuyas propiedades, expresadas en los números anteriores, son indicio seguro de la existencia de una individualidad química definida.

Tratado, conforme es uso para su transformación en clorhidrato, por el ácido clohrídrico seco y en corriente, se obtienen:

35 á 40 por 100 de *monoclorhidrato sólido*
60 á 65 por 100 de *monoclorhidrato líquido.*

Con el ácido bromhídrico, en análogas condiciones, el rendimiento en bromhidrato sólido es muy escaso, llegando solamente de 8 á 10 por 100.

Transformación en borneol. — Se consigue sin dificultad,

hirviendo en un matraz provisto de aparato de reflujo, y por treinta á treinta y dos horas:

3gr.,73 *de magnesio metálico*
30 gr. *de clorhidrato de pineno*
20 gr. *de éter bien seco,*

agregando un centímetro cúbico de ioduro de metilo, que actúa de catalizador.

No tiene la reacción aquella violencia que es advertida cuando se añade á la disolución de un haluro alcohólico cinta ó polvo de magnesio; pues algunas veces llega á elevarse la temperatura hasta producir la ebullición del disolvente, y entonces la disolución del metal en el líquido etéreo efectúase rápidamente, y en muy poco tiempo es completa. En el presente caso, la reacción comienza con bastante calma, haciéndose indispensable, para proseguirla y llevarla á término, calentar, y aun por este medio no se logra disolver el magnesio, sino cuando son pasadas unas veinticinco horas de hervir el éter. Demuestra la práctica ser más ventajoso el sistema de agregar al producto resultante, luego que han reaccionado por completo el magnesio metálico y el haluro alcohólico, la solución etérea de clorhidrato de pineno; así se logra que la cantidad de *dihidrodicanfeno* que ha de generarse de necesidad quede reducida al mínimo de 10 á 12 por 100 solamente *(Hesse).*

Operando en las circunstancias descritas, fórmase un *cloruro de pinilmagnesio,* cuerpo sólido, cristalino, de color blanco, quedando éter que sobrenada y el cual ha de ser por completo eliminado, empleando, para conseguirlo, una corriente de agua durante el tiempo necesario. Luego, aplicando otra corriente de oxígeno puro y seco, lógrase oxidar el cloruro mixto, y de tal manera se consigue al cabo la formación de una substancia correspondiente á la fórmula

$$Mg \begin{cases} Cl \\ O \,.\, C_{10} H_{17} \end{cases},$$

cuyo cuerpo, descompuesto convenientemente, empleando el ácido sulfúrico de la concentración á $\frac{1}{5}$, origina el *borneol*. A este cambio es inherente considerable elevación de temperatura, y al propio tiempo el líquido adquiere olor semejante al del alcanfor, recordando asimismo el que es peculiar del moho.

$$Mg\begin{cases} Cl \\ O\,.\,C_{10}H_{17} \end{cases} + H_2O = Mg\begin{cases} Cl \\ OH \end{cases} + C_{10}H_{17}OH.$$

Al reaccionar el magnesio metálico con el cloruro de pinilo fórmase, á modo de producto secundario, buena proporción de un hidrocarburo, y no es otro sino el llamado *dihidrodicanfeno* antes citado. Su generación en estas circunstancias se explica por la ecuación siguiente:

$$Mg + 2\,C_{10}H_{17}Cl = Cl_2Mg + C_{10}H_{17} - C_{10}H_{17}$$

Como al término de las transformaciones queda unido á la masa del borneol formado, es menester proceder á su separación. Aprovéchase, para lograrlo de modo completo, una propiedad bastante notable del dihidrodicanfeno, y es que este hidrocarburo no se volatiliza al calor del baño de agua, sino al cabo de haber estado sometido durante algunas horas á la influencia de semejante temperatura. De esta manera, y al cabo de varias sublimaciones, lógrase despojar por completo al borneol de todos los cuerpos que en la reacción se originan como productos secundarios, y sobre todo del dihidrodicanfeno, que podría constituir su mayor impureza. Todavía es menester, para lograrlo en estado de pureza, cristalizarlo repetidas veces, empleando el éter por disolvente y así se consigue el borneol sólido en buenos cristales, fusibles á la temperatura de 115 á 116°; su solución alcohólica al 5 por 100 tiene este poder rotatorio: $[\alpha]_D = -10°$ y no es idéntico á los productos semejantes, ya descritos, proce-

dentes de diversas plantas. El rendimiento obtenido en las operaciones anteriores alcanza próximamente de 88 á 90 por 100, y aplicando la modificación de Hesse ya se eleva á 92 por 100, á condición de que la reacción se efectúe bastante despacio en todas sus fases.

Transformación del borneol en alcanfor.—Siendo el alcanfor la cetona correspondiente al borneol—alcohol secundario bien definido—realízase la transformación de que se trata aplicando, como es de uso general en casos análogos, un procedimiento de oxidación. En el presente se ha reconocido la ventaja de oxidar empleando la conocida mezcla de bicromato potásico y ácido sulfúrico, procediendo de la manera siguiente: en un matraz de vidrio Erlenmeyer se pusieron:

4,6 gr. *de borneol.*
2,96 gr. *de bicromato potásico.*
2,93 gr. *de ácido sulfúrico.*
20 gr. *de agua.*

Como la masa no reacciona en frío, se hace preciso calentarla en baño de María y no á mayor temperatura, ni á fuego directo ó sobre cartón de amianto, porque se corre el riesgo de perder gran cantidad de alcanfor y de borneol, sustraído este último á la oxidación. En la parte más alta del matraz, y en un largo tubo que debe ponerse atravesando el tapón del mismo, es donde se sublima y deposita una mezcla de alcanfor y borneol, la cual demanda ser nuevamente oxidada, hasta lograr que la transformación intentada sea total y completa. Requiérese, no obstante, operar con grandes cuidados y no repetir demasiado las oxidaciones, porque llevadas al extremo se generan, como consecuencia de las mismas, variados productos ácidos, siendo verosímil que se produzca entre ellos algo de ácido canfórico; y con el objeto de eliminarlos de la mezcla es menester sublimarla de nuevo, sumergiéndola al propio tiempo en una disolución bastante débil y diluída de potasa cáustica.

Por fin el alcanfor resultante fué lavado, y después varias veces cristalizado y sublimado, resultando puro y dotado de sus peculiares caracteres.

Transformación del alcanfor en oxima.—Un buen medio de caracterizar las cetonas sábese que consiste en convertirlas en oximas, y partiendo de ello, el alcanfor, en su calidad de ciclanona, ha de producir de necesidad su oxima correspondiente, y he aquí el modo práctico de conseguir la canfenoxima; en un matraz provisto de aparato de reflujo se hierven 7,6 gr. de alcanfor, disuelto en 100 cc de alcohol de 96° con 3,42 gr. de clorhidrato de hidroxilamina y 4,1 gr. de acetato sódico fundido y seco; á las cuatro horas de ebullición el cambio está realizado, y pasado este tiempo se filtra en caliente; por enfriamiento se deposita al punto la oxima buscada, cuyo estudio tengo por hacer en el momento presente.

Transformación del pineno en nitrosocloruro.—Cuando se pretende introducir NOCl en los carburos eténicos suelen seguirse dos procedimientos de cierta generalidad: fúndase el primero en el adecuado empleo del nitrito sódico, en presencia de un gran exceso de ácido clorhídrico, y el segundo en el uso de los nitritos alcohólicos, que han de reaccionar precisamente en un medio líquido ácido. Aplicando en el caso presente el método del nitrito sódico, los resultados obtenidos fueron bastante malos é inciertos, porque en la reacción originase de continuo una substancia de color amarillento y aspecto resinoso é incristalizable, y acudiendo á los nitritos alcohólicos se ha visto que el rendimiento con nuestro pineno es muy escaso. Aunque son aceptables los resultados empleando el nitrito etílico, suele utilizarse de preferencia el amílico para este género de operaciones, que se realizan conforme están descritas en todos los libros de Química orgánica; y sólo advertiré, respecto del nitrosocloruro conseguido y en cuanto á sus propiedades, que después de bien cristalizado resulta ser un cuerpo sólido, de color blan-

co y aspecto nacarado, no muy estable, en cuanto al fundirse á la temperatura de 95° ya se descompone, produciéndose abundantes vapores nitrosos y ácido clorhídrico. No reacciona fácilmente con el amoníaco, y cuando al cabo llega á hacerlo produce nitrolamina, cuyos caracteres están con tanta precisión definidos como los peculiares de la estudiada y determinada por Leach (*). Es incristalizable la substancia obtenida y se descompone con mucha facilidad á la temperatura de su ebullición; los derivados salicílico y furfurílico no son idénticos á los obtenidos por el investigador citado.

También intenté obtener el derivado acetamidado y procedí de esta suerte, operando con solución etérea y diluída, á causa de ser escasa la solubilidad del nitrosocloruro en el éter: 1,85 gr. de nitrosocloruro y 5,9 gr. de acetamida se hierven durante algún tiempo operando en la forma acostumbrada, resultando al fin un líquido oleaginoso, insoluble en el éter y tan poco estable que se descompuso cuando traté de determinar su punto de ebullición. No fueron mejores los resultados obtenidos cuando acometí la preparación de otros derivados del pineno, que todavía no están ensayados.

De cuanto va apuntado deduzco que el carburo integrante de la esencia de trementina del *Pinus Halepensis* no es el que constituye las esencias francesas, sino una forma isomérica particular del pineno, y á su estudio cuento seguir consagrándome y le sirve á modo de preliminar la presente Nota.

Apoya este parecer la opinión aceptada y recibida de que á cada especie de pino corresponde una esencia diferente, en cuanto al hidrocarburo en ella dominante, lo cual quiere indicar que son numerosas las formas isoméricas del pineno, y respecto de las esencias francesas procedentes del *Pinus maritima* y de las esencias americanas del *Pinus Australis*, los

(*) Chem. Soc., p. 91. 1907.

minuciosos estudios de Berthelot no dan lugar á dudas (*). Según ellos, sábese que á la fórmula $C_{10}H_{16}$ corresponden dos carburos que hierven á la misma temperatura y sólo se distinguen por el sentido de su poder rotatorio, y la isomeria se conserva y permanece en todos los derivados, imprimiéndoles su característica; en tal respecto el pineno que he aislado de la esencia de trementina del *Pinus Halepensis* pertenece á la clase de los pinenos levogiros, conforme á las propiedades al principio indicadas, distinto del extraído de las esencias francesas, cuyo poder rotatorio es — 43°4, muy diferente del australeno, que es dextrogiro, y más todavía del pineno inactivo, producto de las acciones de la anilina sobre el nitrosocloruro de pineno, operando en caliente. Estos casos de isomeria no son raros, por otra parte, en determinados productos naturales, y aun repetidas veces cabe atribuirlos á modificaciones moleculares que experimenta una misma substancia ó una primera materia cuando para aislar de ella determinados principios ha de ser sometida á variadas manipulaciones, en particular si interviene el calor, aunque en el caso presente no sea muy aplicable la doctrina, por cuanto el pineno de las esencias francesas es siempre el mismo, particularmente extrayéndolo mediante destilación en el vacío y á temperatura baja; y obsérvese que el poder rotatorio permanece constante, al igual de la densidad y el índice de refracción, que son sus principales caracteres físicos.

No terminaré la presente Nota sin consignar mi agradecimiento al Profesor Dorronsoro, quien ha practicado en su laboratorio las determinaciones de las constantes físicas de los cuerpos estudiados, y al alumno de esta Facultad D. Antonio Moyano, cuya colaboración ha sido muy útil en mis experimentos.

(Laboratorio de Química orgánica de la Facultad de Farmacia de la Universidad de Granada.)

(*) *Les carbures d'Hidrogéne*, tomo II, pág. 437 y siguientes capítulos.

V.—Sobre la conductibilidad de disoluciones de *ClK* y *ClNa* en mezclas de agua y alcohol metílico.

(Variaciones con el tanto por ciento de alcohol, la concentración y la temperatura.)

POR AURELIO GARZÓN Y CARMONA.

Muchos físicos, cuyos nombres se citarán después al enumerar sus respectivos trabajos, se han dedicado al estudio, inagotable en el terreno experimental, de esta rama de la disociación electrolítica, tratando de explicar la acción del disolvente.

No es enteramente nuevo el trabajo de que vamos á dar cuenta; sin embargo, como la medida de las conductibilidades ha sido hecha de ordinario á temperaturas determinadas (0° y 25; 18 y 25°, etc.), hemos medido las conductibilidades de 0° á 50°, siguiendo sus variaciones con la temperatura en un intervalo relativamente largo, y tal variación y la del tanto por ciento del alcohol, es dable determinarla entre límites aproximados de temperatura y saber á qué tanto por ciento de alcohol corresponde el mínimo de conductibilidad, cuestión que no ha podido afirmarse como fenómeno general; pues acaso pudiera depender de no haberse seguido la variación con la temperatura para las muchas disoluciones que se han estudiado.

Antecedentes de la tesis propuesta.—Dentro de la especialidad de nuestra investigación, vamos á resumir las numerosísimas que, según va dicho, aun antes de la teoría de Arrhenius, se han llevado á cabo sobre la conductibilidad de las disoluciones hidro-alcohólicas, y especialmente de las metílicas.

Las conclusiones ó resultados que más convienen é nuestro objeto, son:

La conductibilidad de una disolución disminuye cuando aumenta el tanto por ciento de alcohol; pero disminuye tanto menos cuanto más elevado es el dicho tanto por ciento.

La relación entre las conductibilidades límites de una misma sal en el alcohol metílico y en el agua resulta igual á 0,74, según Wöllmer.

De igual modo afirman Wakeman y Cohen la constancia de la relación en las conductibilidades de disoluciones acuosa é hidroalcohólica de una misma sal y de indéntica concentración, disminuyendo el valor de la relación cuando varíe el tanto por ciento de alcohol.

Casi todos los experimentadores han hecho notar la gran influencia de la adición de una pequeña cantidad de agua ó de alcohol sobre la conductibilidad de una solución alcohólica ó acuosa, respectivamente.

Arrhenius estudió la acción de los alcoholes etílico y metílico sobre el electrolito constituído por una solución de $ClNa \frac{1}{200}$ normal. Propuso la fórmula general

$$l = l_0 \left(1 - \frac{\alpha}{2} x \right)^2$$

en la que l_0 es la conductibilidad de la solución acuosa; l la de la solución conteniendo x por 100 en volumen de un no conductor cualquiera; α es un coeficiente empírico; x debe ser inferior á 10 para la aplicación de la fórmula.

Para Zelinski y Krapiwin, cuando la adición del no conductor es de un 2 por 100 en volumen, la disminución resulta considerable.

Cohen concluye de su estudio sobre el ioduro potásico, en solución etílica, que la conductibilidad puede ser aumentada ó disminuída por la adición de una pequeña cantidad de agua, según la dilución y el contenido de alcohol en el disolvente.

Wakeman, que midió á 25° las conductibilidades de ClNa, IK, ClK y ClH no encontraba aplicable á estas sales la fórmula de Ostwald:

$$K = \frac{\gamma^2}{(1-v)V},$$

que expresa el equilibrio de la molécula disociada de un electrolito binario, en solución diluída y en la que K representa una constante, y $\gamma = \frac{\Lambda\ v}{\Lambda\ \infty}$.

Según Wildermann, esta ley sólo es aplicable al ácido tricloracético en solución etílica. Según Carrara, la fórmula expresada se aplica mejor á las bases y á los ácidos; para las sales es preferible la de Rudolphi:

$$K = \frac{\gamma^2}{\sqrt{V}\,(1-\gamma)}$$

en la que K y γ tienen la misma significación.

Según Roth, ni las dos fórmulas citadas, ni la de Van t'Hoff,

$$K = \frac{\gamma^3}{V\,(1-\gamma)^2}$$

son aplicables, pudiendo concluirse que la ley de dilución de Ostwald sólo es aplicable para el ácido tricloracético (Wilderman).

Otra de las conclusiones de Roth es que los coeficientes de temperatura aumentan rápidamente con el tanto por ciento de alcohol y mucho más despacio con la dilución.

Es conclusión común de muchos de estos trabajos la de la existencia de un mínimo de conductibilidad; pero cada cual la hace para casos particulares, ya sea por el electrolito estudiado, ó por la dilución, ó por la temperatura, ó por el tanto por ciento de alcohol.

Así se desprende de los trabajos de Zelinski y Krapriwin, de Jones y Lindsay, de Godlewski, de éste y de Bassett y de Jones y Caroll.

Jones y Lindsay, operando á las temperaturas 0° y 25° sobre varios electrolitos, obtuvieron este mínimo de conducti-

bilidad, para cada electrolito á un tanto por ciento de alcohol metílico ó etílico.

Lindsay trata de explicar este fenómeno del modo siguiente: «Según la teoría de Dutoit y Astón, son solamente los líquidos polimerizados los que pueden disociar los electrolitos disueltos. Si esto es exacto, un líquido polimerizado puede, por sí mismo, disminuir en parte la asociación de las moléculas de otro líquido polimerizado.

»Se sigue de aquí que si se mezclan dos disolventes polimerizados, su acción recíproca tiene por efecto disminuír el estado de asociación, el uno del otro, hasta llegar á un estado de equilibrio. Esto es lo que sucedería en el caso de las mezclas de agua y de CH_3OH ó C_2H_5OH. Entonces, puesto que el estado de asociación de la mezcla es menor que el estado de asociación de cada uno de los dos componentes tomados aisladamente, la conductibilidad molecular en la mezcla debe ser inferior á la que corresponde á uno ú otro de los componentes tomados aisladamente. Esto es, añade Lindsay, lo que la experiencia demuestra.»

«La elevación de temperatura, disminuyendo en general el estado de asociación de un líquido, disminuirá la influencia de cada uno de los disolventes sobre el otro en la mezcla, lo que explica el hecho experimental siguiente: la disminución de la conductibilidad molecular, debida á la adición de alcohol en la disolución acuosa, es tanto menor, en igualdad de condiciones, cuanto más elevada es la temperatura.»

Jones y Caroll opinan que, puesto que la conductibilidad molecular no depende solamente de la ionización, sino también de la movilidad de los iones y ésta del medio que los rodea, la disminución de la conductibilidad obedece á la disminución de fluidez ó aumento de viscosidad.

Nos proponemos, en las conclusiones de este trabajo, insistir sobre la cuestión del mínimo, así como también estudiar experimentalmente la variación de la viscosidad en

las mismas disoluciones y para aquellas temperaturas en que se patentiza más la existencia del mínimo.

Y, por último, citaremos el hecho observado por Lincoln y Kahlenberg de la disminución, con el tiempo, de las conductibilidades moleculares, que ellos explican por la acción recíproca del electrolíto disuelto y del disolvente, el observado por Hartwig en sus experimentos sobre los ácidos fórmico, acético, butírico á 18°, el cual notó disminuciones de conductibilidad debidas á fenómenos de eterificación; y la deducción de Lenz, de que la variación de la conductibilidad con la proporción de alcohol es casi independiente de la concentración.

Tales son, en breve compendio, las conclusiones más importantes sobre la conductibilidad de los electrolitos, cuando el disolvente es alcohólico ó hidro-alcohólico.

Nos hemos propuesto, al citarlas, que luego nos sirvan de comparación con las que de nuestra tesis se desprendan.

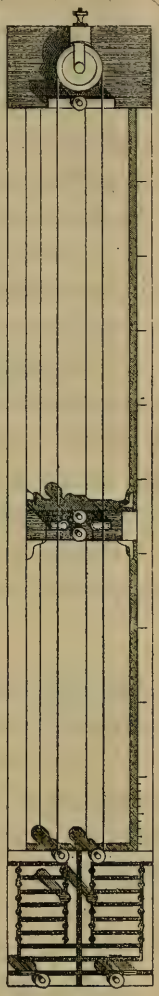
***

Método empleado y su práctica.—El método empleado para medir las resistencias de los líquidos ha sido el de Kohlrausch, que, como es sabido, consiste en la aplicación del puente de Wheatstone, en el que la corriente ha de ser alternativa y el galvanómetro está sustituído por un teléfono.

Medimos las resistencias de los varios teléfonos de que disponíamos, y hubimos de adoptar el de menor resistencia: 112 ohmios, mayor que la recomendada cuando ha de servir para este objeto.

A unos dos metros de distancia del teléfono, para evitar su influencia, colocamos el aparato de inducción, consistente en un pequeño carrete de Ruhmkorff, accionado por un acumulador de 2 voltios. Regulábamos la distancia del interruptor del carrete para que produjese un sonido de alto tono, al cual es más sensible el oído.

Para no confundir el sonido percibido en el teléfono con el ruido del interruptor, colocamos el carrete envuelto en mantas de algodón dentro de una caja de cartón, y ésta dentro de otra de madera, y entre las paredes de ambas colocamos aserrín de corcho, con lo que conseguimos hacer imperceptibles los ruidos.



Como resistencias de comparación hemos empleado dos series de carretes, construídos por nosotros, arrollando sus hilos doblemente, á fin de evitar la auto-inducción. La primera serie estaba constituída por cinco próximamente iguales, siendo el valor de una de ellas, la primera, el de 18.488 ohmios. La segunda serie la componían 20 carretes, siendo el valor de uno $483,7_2$.

Puente de hilo y calibrado eléctrico de éste.—El puente que hemos usado, construído en el taller del Laboratorio, tiene hilo doble de níquel, que puede prolongarse por sus extremidades con carretes constituídos por porciones de hilo de la misma naturaleza, iguales á 50 centímetros próximamente. El dibujo adjunto puede dar idea de su disposición. La longitud total del hilo es de 7 metros, pudiendo servirse de él como nos servimos de una caja de resistencias. Ofrece esta disposición la ventaja de que el error en la apreciación del mínimo del sonido no influye tanto en el valor numérico de la relación de los brazos constituídos por este hilo, por hacerse mucho mayores los términos de aquella relación. Hemos cuidado de que en las medidas el cursor viniera á fijarse hacia la parte media del hilo recto introducido en el puente, lo que conseguíamos añadiendo ó quitando carretes de los del puente.

Descrito éste, vamos á ocuparnos del calibrado de su hilo.

Primeramente lo ejecutamos por el método Carey-Foster, haciéndolo á la vez de dos hilos, el del puente de hilo doble, y el del otro sencillo; pero los resultados, puestos de manifiesto en sus curvas respectivas, no eran satisfactorios, por lo cual el Sr. Cabrera hizo la modificación del método (*), mejorándolo notablemente, como hemos tenido ocasión de comprobarlo por los resultados numéricos, que aquí omitimos por no dar mucha extensión á nuestro escrito.

En la práctica, el calibrado del puente ofrece tres partes:

1.ª Como el cursor no puede llegar á los extremos del hilo, le calibramos solamente desde los 5 á los 95 centímetros por el procedimiento ya indicado.

2.ª Comparación de aquellos extremos del hilo. Para ello hemos determinado el punto medio en resistencia del hilo, incluyendo los extremos; después el punto que tenga por abscisa, 50, en la región ya calibrada, y, por consiguiente, con su correspondiente corrección.

Hallando la diferencia entre las distancias al origen de los dos puntos medios, obtuvimos

$$51.110 - 50.929 = 0.181.$$

Esta diferencia la sumamos á todas las correcciones obtenidas en la primera parte, y así hallamos las definitivas.

3.ª Comparación del hilo posterior y los carretes del puente con el hilo anterior ya calibrado. El método seguido fué el del puente doble de Thomson ó de los nueve conductores.

He aquí el resultado de esta comparación:

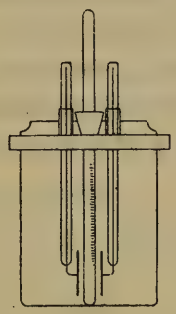
Hilo anterior = 100 ω.

» posterior = 100.6.

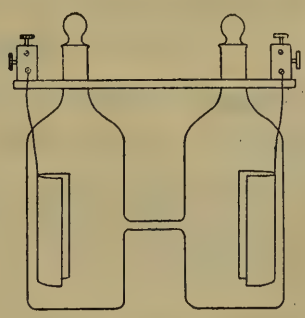
(*) En los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química* ha publicado una nota sobre esta modificación el Catedrático Sr. Cabrera.

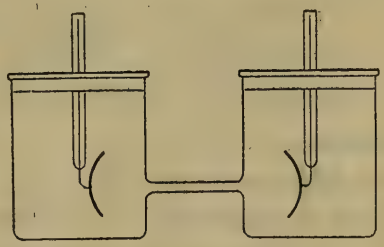
Carretes anteriores.	*Carretes posteriores.*
$B_1 = 49.176\ \omega$	$b_1 = 49.315\ \omega$
$B_2 = 49.218$ »	$b_2 + b_3 = 99.787$ »
$B_3 = 49.309$ »	
$B_4 = 49.629$ »	$b_4 = 49.315$ »
$B_5 = 49.710$ »	$b_5 = 49\ 694$ »

Vasos electrolíticos. — Tres han sido los vasos usados, cuya disposición y forma puede verse en el dibujo adjunto. Los hemos designado por las letras A B y C. Del que hemos obtenido mejores resultados ha sido del vaso C, atribuyéndolo principalmente á la fijeza de sus electrodos y al buen contacto de éstos con los vértices del puente.



Tiene la ventaja también sobre los otros de poder acercar ó separar sus electrodos, y, por tanto, disminuir ó aumentar la constante que multiplica la resistencia del electrolito; no podemos asegurar, sin embargo, que reuna todas las condiciones aconsejadas, sobre todo para las disoluciones hidro-alcohólicas con que hemos operado, pues su tapa tiene una gran rendija que favorece la evaporación y está desprovisto de agitador, lo cual retrasa mucho el equilibrio de temperatura dentro de la masa del líquido. Hemos podido observar entre las regiones





superior é inferior del líquido (estando llenos los vasos en sus tres cuartas partes) una diferencia de temperatura de 8 á 9 décimas de grado á los 15 ó 20 minutos de estar aquéllos sumergidos en el baño del termostato, á cuya diferencia contribuyen, sin duda, los orificios de sus tapas que les ponen en comunicación directa con la temperatura ambiente.

Hemos platinado los electrodos, preparado las disoluciones y medido las capacidades siguiendo las instrucciones contenidas en el *Traité de Mesures Physico-Chimiques*, de W. Ostwald, operaciones de cuyo detalle prescindimos.

Determinación de las capacidades de los vasos con disoluciones del ClK á concentraciones y temperaturas distintas.

VASO A.—14 determinaciones.

Valor medio = 5.477; error relativo = 0.0098.

VASO B.—10 determinaciones.

Valor medio = 10.736; error relativo = 0.0019.

VASO C.—10 determinaciones.

Valor medio = 0.164; error relativo = 0.0037.

Teniendo en cuenta los valores respectivos de las capacidades de los vasos, hemos empleado el vaso B para las disoluciones más concentradas; para las normales, el A para las deci-normales, y el C para las cincuenta y centi-normales.

Las disoluciones han sido preparadas con productos puros de la casa Kahlbaum, de Berlín.

Las que nos proponíamos estudiar eran las siguientes:

acuosa.....	normal, deci, cincuenta y centi-normal de ClK y de ClNa.
alcohólica al 20 por 100....	
ídem al 40 por 100.....	
ídem al 60 por 100.....	
ídem al 80 por 100.....	
alcohólica.....	

No todas pudieron ser estudiadas, como se verá después, por no poder conseguir la disolución de la sal en normales y deci-normales más ricas en alcohol.

Termostatos.—Dos han sido los que hemos empleado: uno para temperaturas superiores á la del ambiente, otro para las inferiores hasta cero grados.

El primero consistía en un depósito de base rectangular, y en el cual un tubo cerrado por el extremo inferior, y á modo de serpentín, terminaba por el otro extremo en un tubo de vidrio, atravesado éste por un hilo de platino, cuya punta venía á quedar como eje del tubo y á unos dos centímetros de su extremo. El tubo de vidrio se ponía en contacto con el mercurio de un vasito.

Lleno el serpentín de vaselina líquida y rodeado del hilo que conducía la corriente de calefacción, abríamos la llave de un sifón que tenía en su parte más alta, con lo que al dilatarse la vaselina del serpentín, salía por el sifón y no por el tubo de vidrio, deshaciendo el contacto entre el hilo de platino y el mercurio.

Formábamos un circuíto constituído por el hilo de platino mercurio, una pila y un *relais* que nos servía de interruptor de la corriente de calefacción.

Supongamos que en el baño del termostato hemos conseguido la temperatura que deseábamos; entonces cerramos la llave del sifón; la misma dilatación de la vaselina rompe entre el platino y el mercurio el circuíto auxiliar, y, como consecuencia, se rompía en el *relais* el de calefacción.

Al cesar ésta, sucedía un enfriamiento del baño; la consiguiente contracción de la vaselina; el cierre de ambos circuítos; nueva dilatación y nueva ruptura, y así sucesivamente, pero á veces con grandes amplitudes y siempre con frecuentes interrupciones, por lo que hubimos de prescindir de este regulador, y, desde luego, regulamos con un interruptor á mano, adquiriendo con el uso práctica para conseguir temperaturas estacionarias con un error menor de 0,05 de grado.

El líquido que llenaba tal termostato era petróleo, removido constantemente por cuatro agitadores que accionaba un pequeño motor eléctrico.

El de las temperaturas inferiores á la del ambiente consistía, como el anterior, en una caja rectangular de latón dentro de otra de madera y separadas ambas por aserrín de corcho. Colocado el vaso ó vasos en esta caja, echábamos hielo machacado y sal hasta conseguir en ellos una mínima temperatura estacionaria, que nunca llegó á 0°, pero sí muy próxima.

Para obtener temperaturas más elevadas, habíamos colocado más alto un depósito de latón lleno de agua á la temperatura ambiente.

El más bajo estaba provisto de un sifón con llave para dar salida al agua de fusión; ambos depósitos comunicaban entre sí por otro sifón para ir substituyendo con el agua del depósito más alto la sustraída del más bajo y conseguir en éste una marcha ascendente y todo lo más lenta posible de su temperatura. Nos ha dado resultados que dejan algo que desear, por no obtener en él temperaturas estacionarias, por no ser un verdadero termostato, como le hemos llamado. Al error en la apreciación de las temperaturas tendremos que atribuir las irregularidades que notamos en las curvas de temperatura, de las que nos hemos de ocupar muy pronto.

Medida de resistencias y cálculo de conductibilidades.— Una vez descritos y estudiados los elementos que habían de formar el aparato de medidas, poco tenemos que decir respecto á su disposición práctica, que había de obedecer á la esquemática del método de Kohlrausch ó del puente Wheatstone; sólo nos hemos de referir al modo de disponer los vasos electrolíticos.

Preparadas las tres disoluciones, normal, deci y centi-normal de una misma sal y del mismo tanto por ciento de alcohol y colocadas en los tres vasos, sumergíamos éstos en los baños de los termostatos; para poder sustituirlos con rapidez en el brazo correspodiente, hicimos sobre un bloque

de parafina un conmutador ligado por pocillos de mercurio á los tres vasos electrolíticos.

Nos proponíamos hacer las medidas de 5 en 5 grados de temperatura en el intervalo comprendido entre 0 y 50°; á veces hemos hecho medidas á temperaturas distintas, ya por no conseguir siempre la estabilidad térmica necesaria, ó ya por aprovechar la temperatura ambiente.

Los resultados de estas medidas representan algunos valores *aproximados* de una función desconocida. Hemos de considerarlos como datos para llegar al conocimiento de esa función y podernos, por tanto, representar la marcha del fenómeno físico objeto de nuestro estudio, esto es, la variación de la conductibilidad con la de la temperatura ó con la de la concentración ó con la del tanto por ciento de alcohol.

A continuación colocamos unos cuadros, en los que después de indicar las condiciones de la disolución, ponemos frente á las temperaturas los valores de sus conductibilidades. También figuran en estos cuadros las ecuaciones respectivas que dan los valores de la conductibilidad con un error menor que el error de observación.

Estas ecuaciones han sido deducidas de los valores hallados siguiendo el método de Cauchy, expuesto en el Capítulo XV de la obra *Theorie des Erreurs d'Observation,* por P. J. E. Goedseels.

A la expresión analítica de los resultados acompañamos también la representación gráfica por medio de curvas, cuyo trazado ha sido hecho del modo siguiente:

El dibujo I representa la variación de la conductibilidad con la temperatura de las disoluciones normales de ambas sales, ClK y ClNa, correspondiendo cada grupo de curvas á cada una de ellas. Sobre papel cuadriculado al milímetro hemos tomado como eje de temperaturas el eje de abscisas, representando un grado por un centímetro; como eje de conductibilidades hemos tomado el eje de ordenadas, representando cada dos unidades del cuarto orden decimal por un

milímetro, después de haber restado de todas las conductibilidades correspondientes á estas curvas una cantidad próximamente igual á la menor de ellas: 0.02.

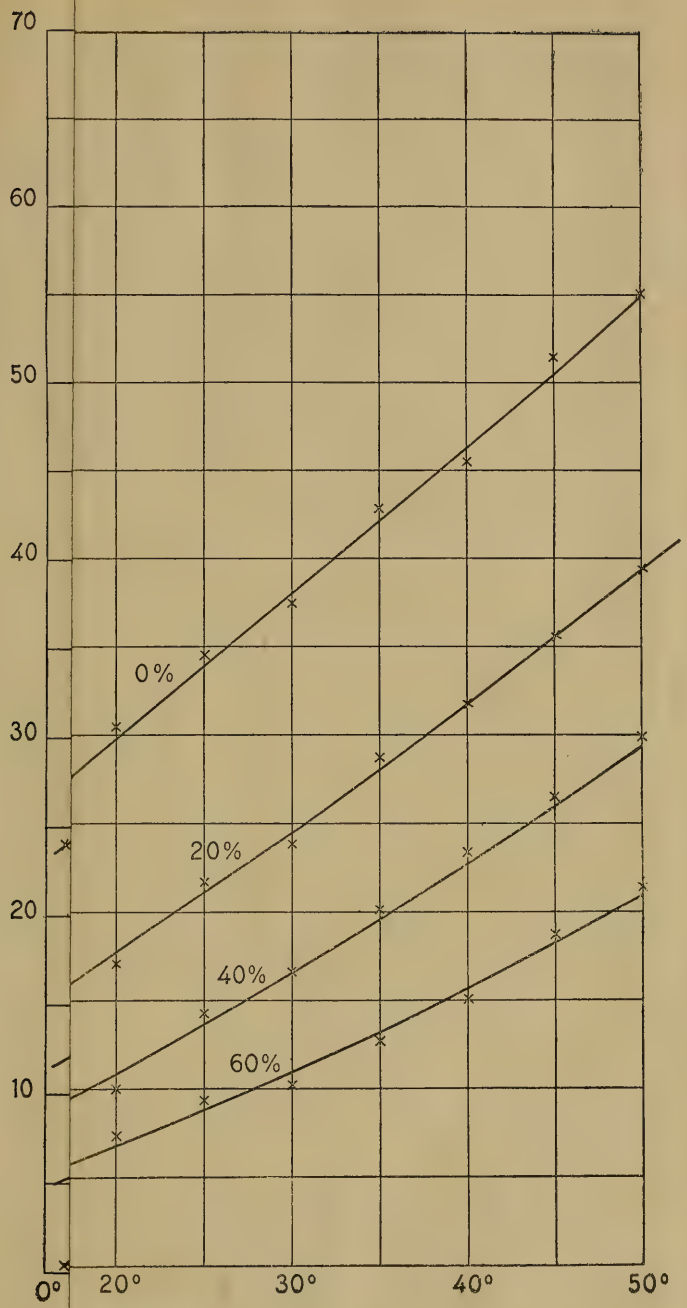
El dibujo II corresponde á las disoluciones decinormales; la cantidad restada de todas ellas ha sido 0.003; cada milímetro representa dos unidades del quinto orden decimal.

El dibujo III, á las cincuenta-normales; la cantidad restada, 0.0005; el milímetro representa dos unidades del sexto orden decimal.

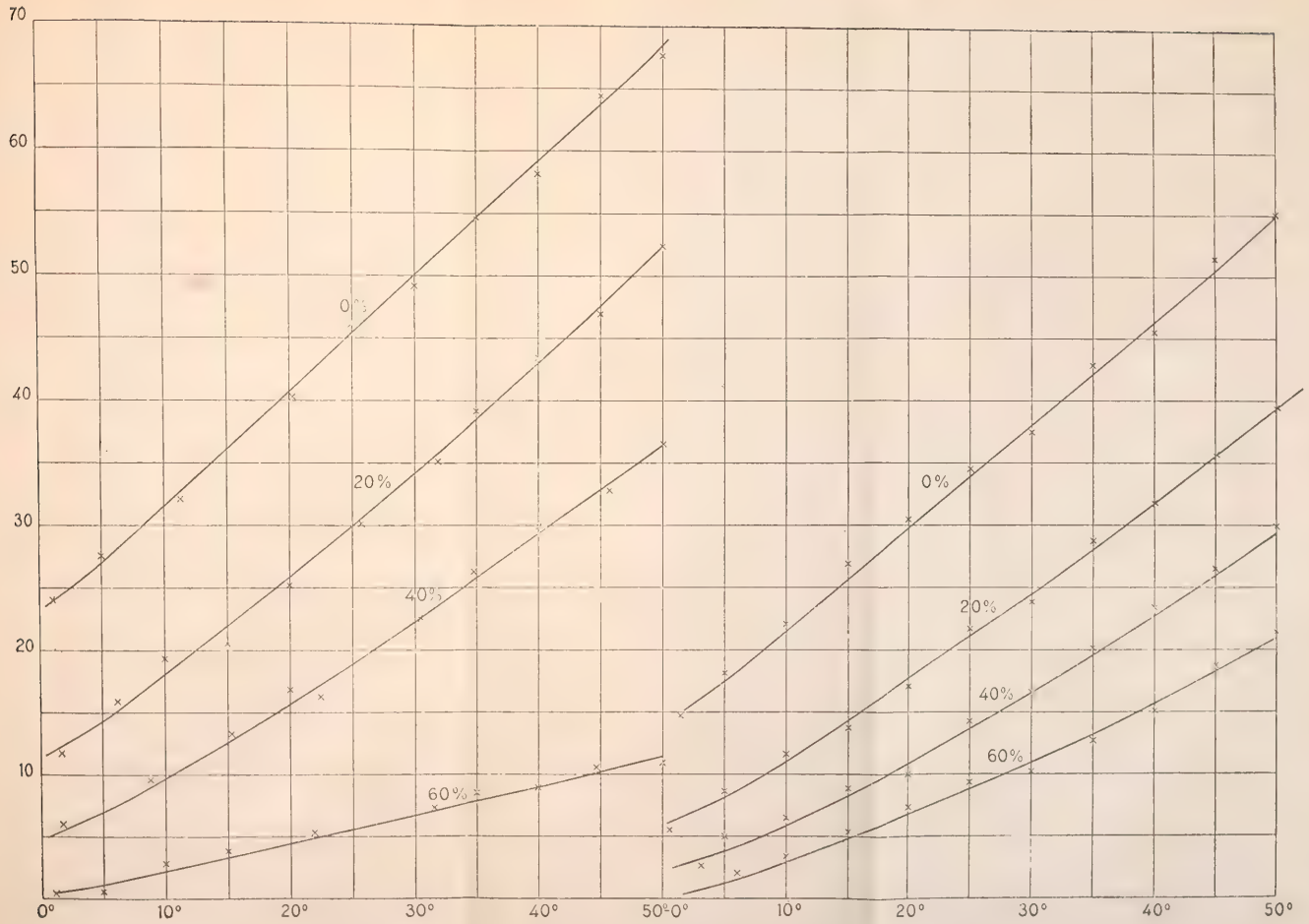
El IV, á las centi-normales; la cantidad restada, 0.0004, como en las del anterior, el milímetro corresponde á dos unidades del sexto orden.

Determinadas de este modo las coordenadas de los puntos, y fijados éstos sobre el dibujo, hemos hecho pasar las curvas por entre ellos, prescindiendo, como lo hemos hecho para el cálculo de las ecuaciones, de aquellos puntos que han sido resultado, indudablemente, de una equivocación en la medida ó en el cálculo.

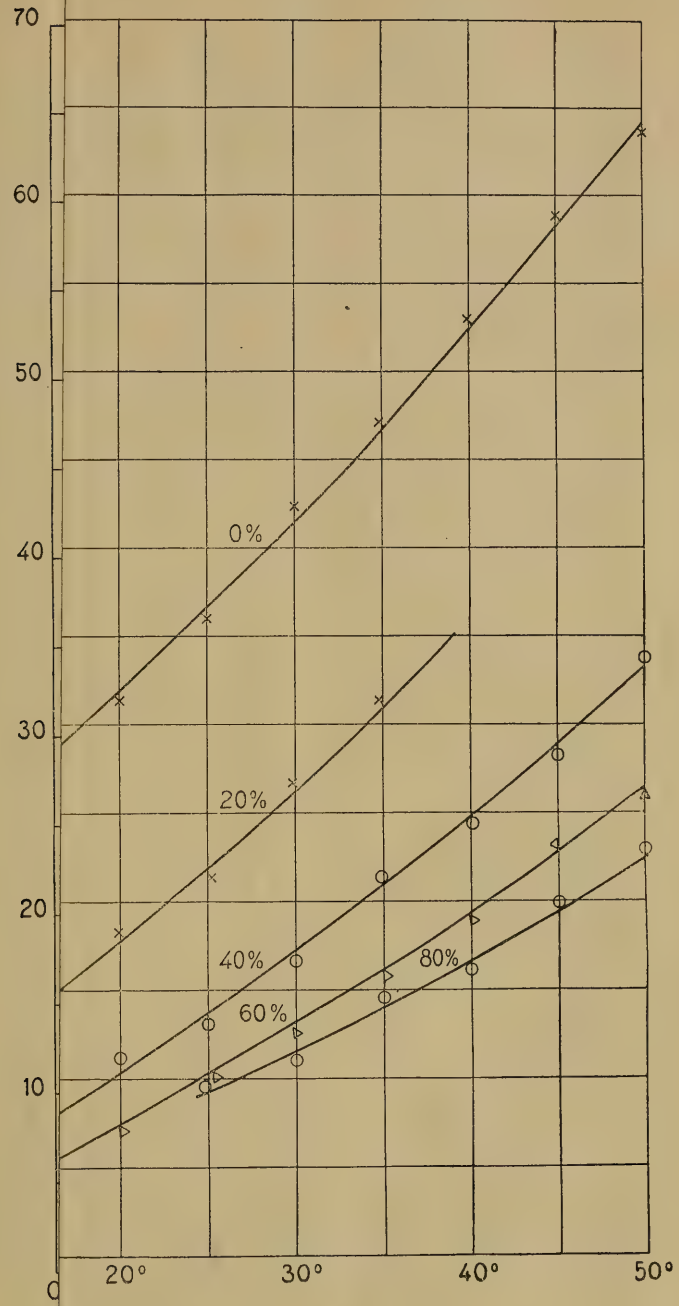
Siguen á las curvas descritas las líneas que representan el cambio de conductibilidad con el tanto por ciento de alcohol. Estas líneas, representadas en los dibujos V y VI, han sido obtenidas de las anteriores por secciones dadas á las temperaturas 10, 25 y 40°. Como eran pocos los puntos obtenidos, nos ha parecido más conveniente unirlos sucesivamente por líneas rectas.



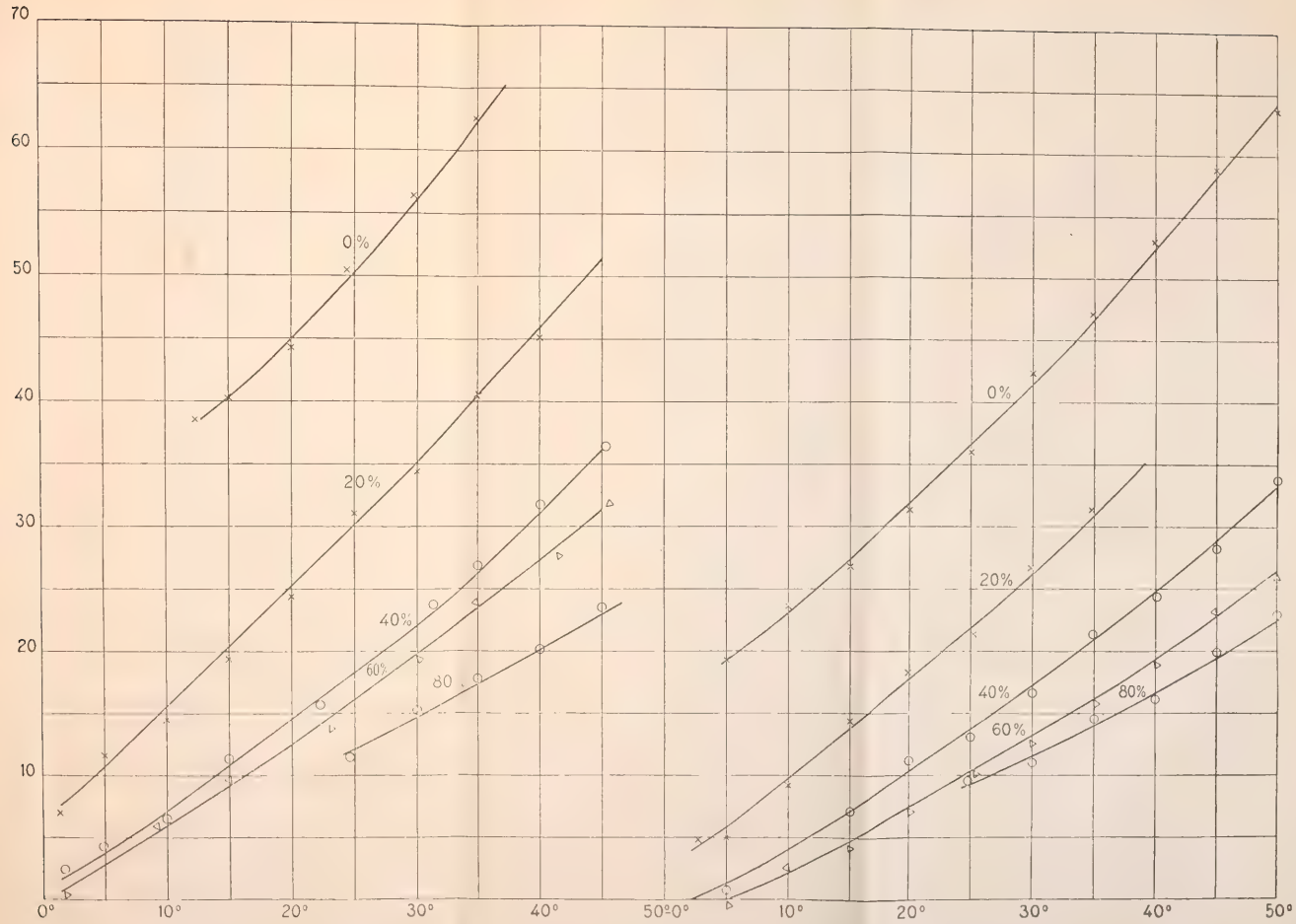
a temperatura.



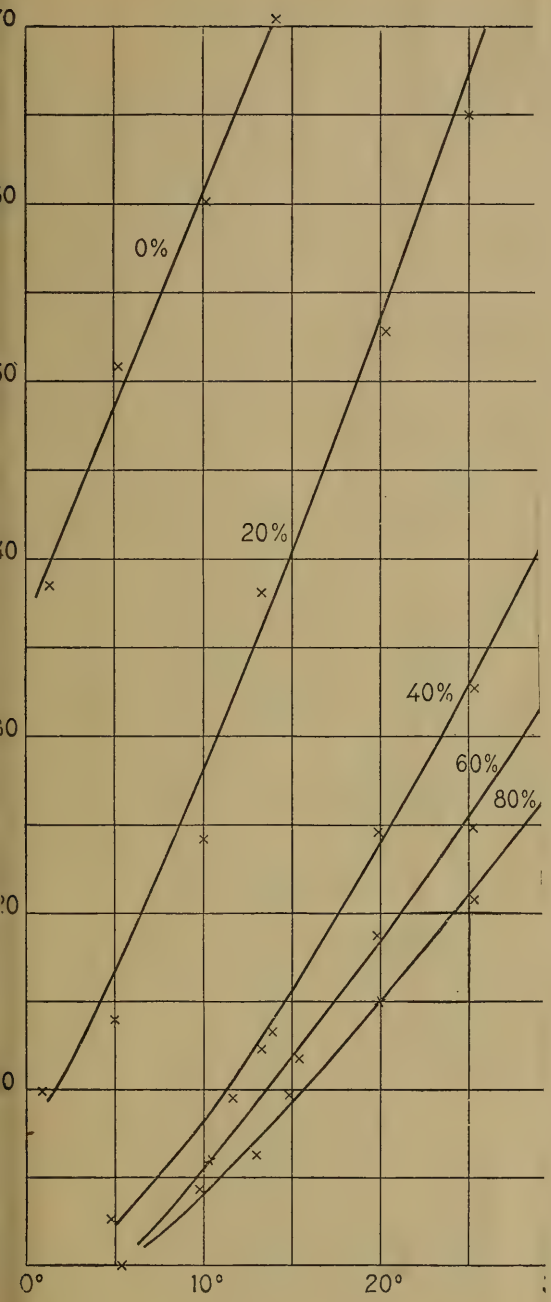
I. – Disoluciones normales de ClK y $ClNa$ – Variación de la conductibilidad con la temperatura.



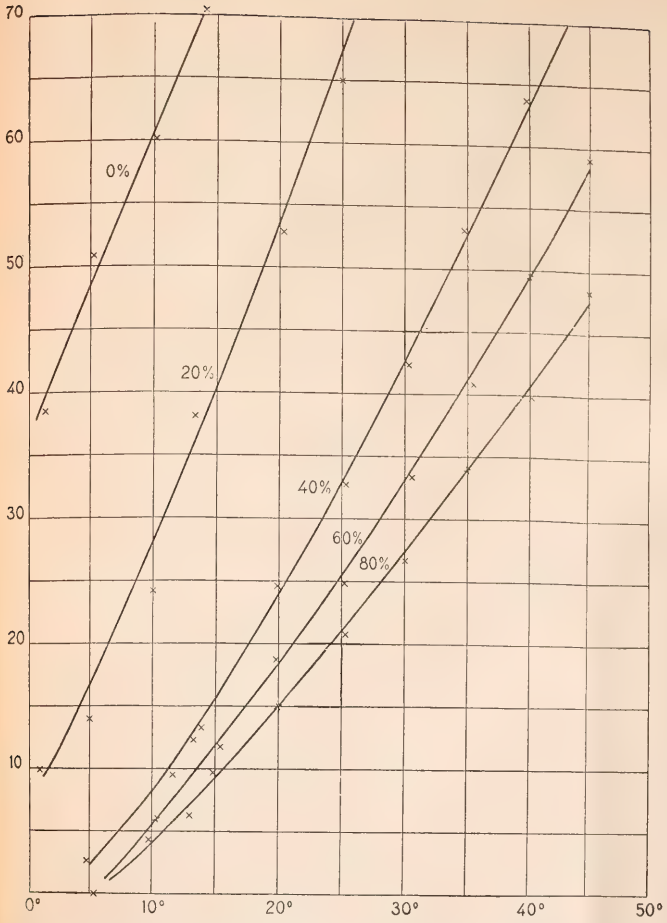
con la temperatura.



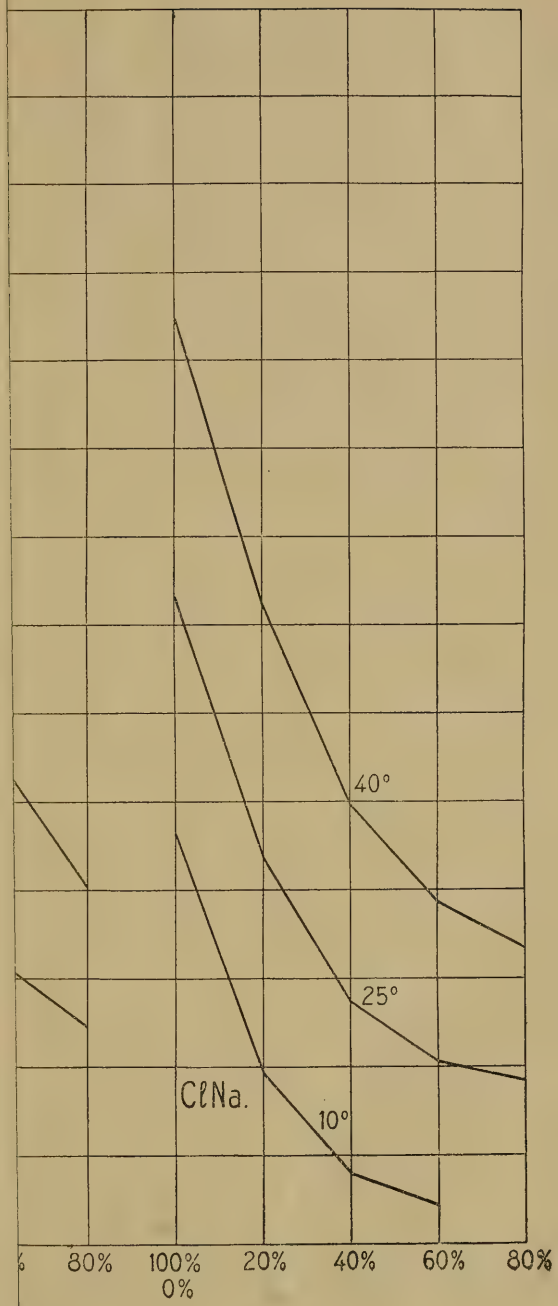
II. Disoluciones decinormales de ClK y $ClNa$ — Variación de la conducibilidad con la temperatura.



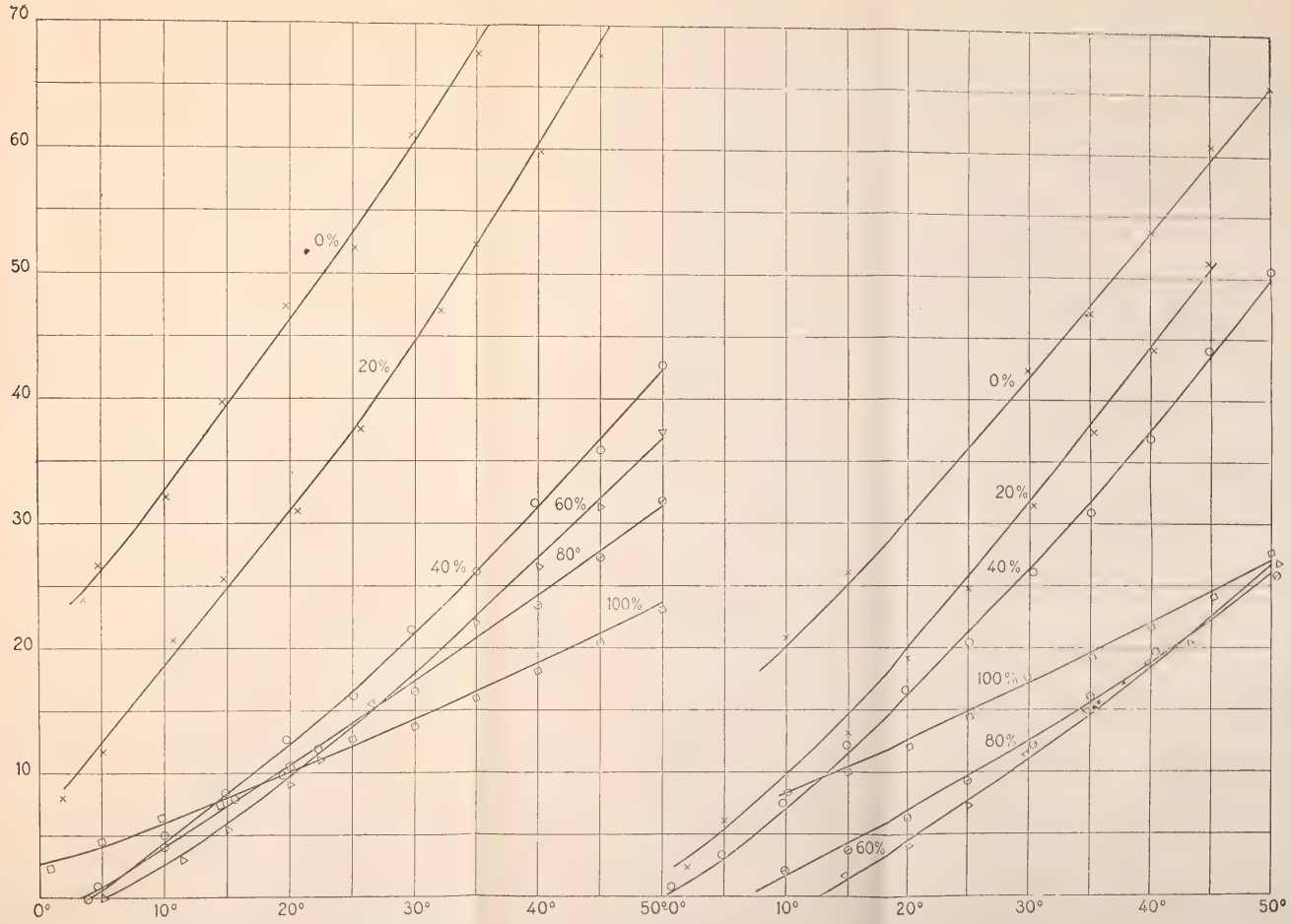
.— **Disoluciones cincuenta normales de** *ClK*.— **Variación**



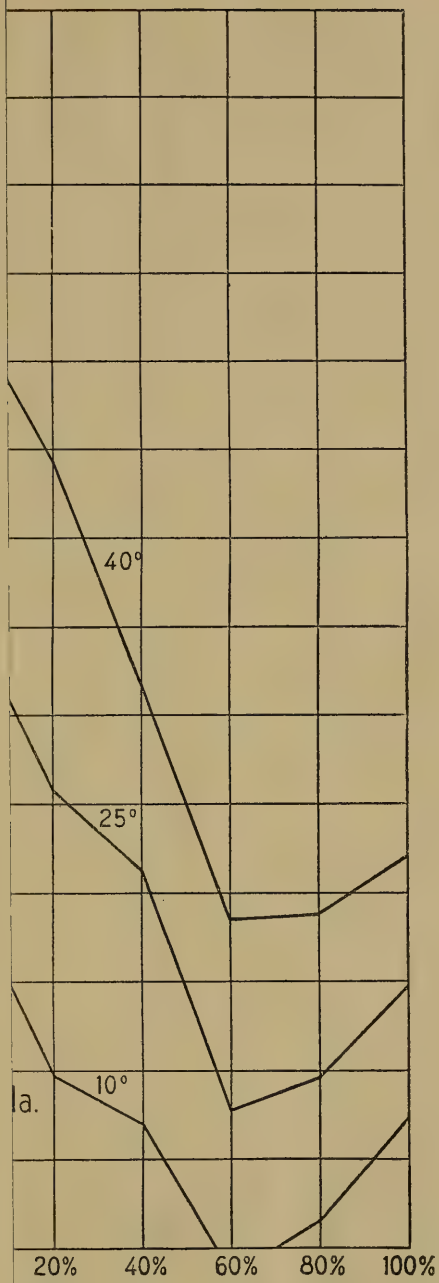
III.— **Disoluciones cincuenta normales de** ClK.— **Variación de la conductibilidad con la temperatura.**



ohol.

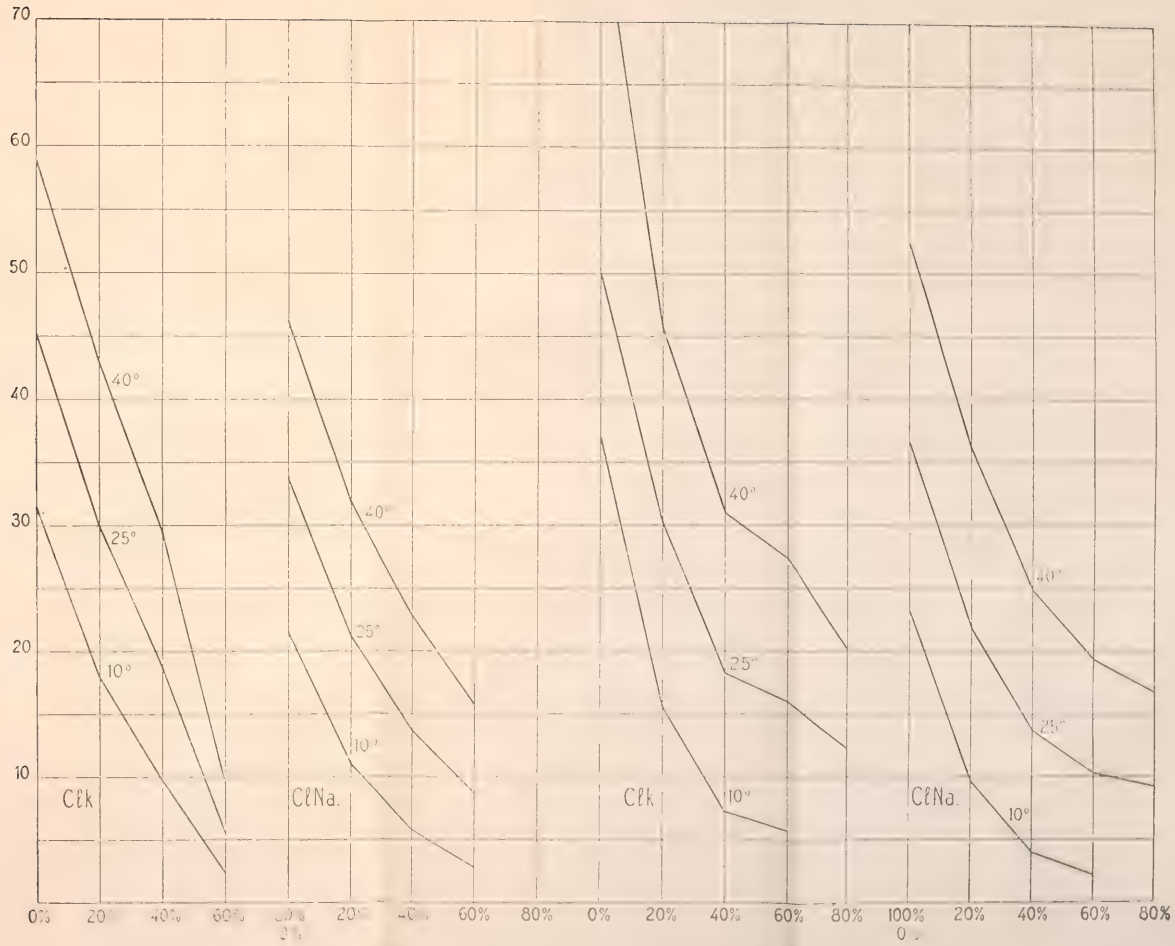


IV.—Disoluciones centinormales de ClK y $ClNa$—Variación de la conductibilidad con la temperatura.

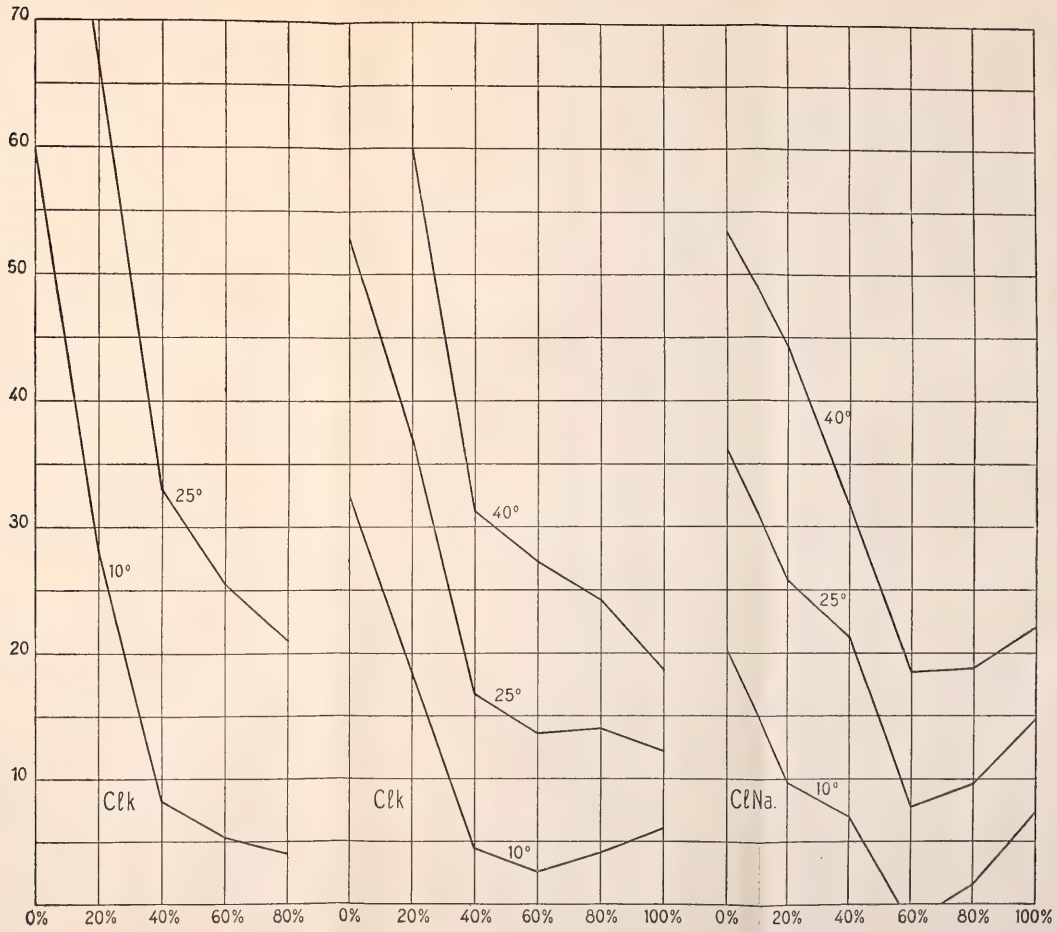


la.

hol.



V.—Variación de la conductibilidad con el tanto por ciento de alcohol.
Disoluciones normales y decinormales.



VI.— Variación de la conductibilidad con el tanto por ciento de alcohol.
Disoluciones cincuenta y centinormales.

Disoluciones normales con disolvente hidro-alcohólico al 0 °/₀.

ClK		ClNa	
$c_t = 0.11050\,[1 + 0.016\,(t - 25)]$		$c_t = 0.08832\,[1 + 0.0184\,(t \quad 25)]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
0.6	0.06810	1.5°	0.04970
5°	0.07475	5°	0.56250
10,6°	0.08457	10	0.06341
20	0.10100	15	0.07374
25	0.11080	20	0.08030
30	0.11800	25	0.08830
35	0.12900	30	0.09569
40	0.13600	35	0.10585
45	0.14800	40	0.11055
50	0.15100	45	0.12300
		50	0.12997

Normales con disolvente al 20 °/₀.

ClK		ClNa	
$c_t = 0.07935\,[1 + 0.0095\,(t - 25)]$		$c_t = 0.07161\,[1 + 0.0208\,(t - 25)]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
1.5°	»	0.5°	0.03090
6.4	»	5	0.03636
10	»	10	0.04269
15°	0.43590	15	0.04803
20	0.07090	20	0.05453
25.5	0.08035	25	0.06353
31.6	0.09052	30	0.06812
35	0.09742	35	0.07686
40	0.10610	40	0.08354
45	0.11430	45	0.09120
50	0.12430	50	0.09884

Normales con disolvente al 40 %

ClK

$c_t = 0.0629\ [1 + 0.029\ (t-25)]$

Temp.	Cond.
2°	0.03136
9	0.03861
15.5	0.04608
20	0.05350
30.4	0.06490
34.8	0.07230
40	0.07902
45.5	0.08575
50	0.09285

Cl Na

$c_t = 0.04725\ [1 + 0.024\ (t-25)]$

Temp.	Cond.
3.1	0.02538
5	0.03025
10	0.03211
15	0.03769
20	0.03992
25	70.0477
30	0.05323
35	0.05937
40	0.06616
45	0.07219
50	0.07934

Normales con disolvente al 60 %

ClK

$c_t = 0.03054\ [1 + 0.00167\ (t-25) - 0.00004\ (t-25)^2]$

Temp.	Cond.
1.1°	0 02041
5	0.02174
10	0.02497
15	0.02738
22	0 03002
31.5	0.03430
35	0.03641
40	0.03763
45	0.03980
50	0.04199

Cl Na

$c_t = 0.03898\ [1 + 0.0215\ (t-25) + 0.000253\ (t-25)^2]$

Temp.	Cond.
1.5	0.01992
6	0.02402
10	0.02619
15	0 03039
20	0.03405
25	0.03799
30	0.04252
35	0.04719
40	0.05220
45	0.05682
50	0.06226

Deci-normales con disolvente al 0 °/₀.

ClK $c_t = 0.013124\ [1 + 0.019\ (t - 25)]$		ClNa $c_t = 0.01042\ [1 + 0.019\ (t - 25) + 0.00007\ (t - 25)^2]$	
Temp.ª	Cond.	Temp.ª	Cond.
4°	0.00790	1.5	0.00570
12.5	0.01070	5	0.00687
15	0.01104	10	0.00766
20	0.01194	15	0.00843
24.6	0.01304	20	0.00934
30	0.01423	25	0.01036
35	0.01559	30	0.01146
40	0.01710	35	0.01236
45	0.01825	40	0.01353
50	0.01974	45	0.01470
		50	0.01579

Deci-normales con disolventes al 20 °/₀.

ClK $c_t = 0.00903\ [1 + 0.0212\ (t - 25)]$		ClNa $c_t = 0.00755\ [1 + 0.33\ (t - 25) + 0.05\ (t - 25)^2]$	
Temp.ª	Cond.	Temp.ª	Cond.
1.4°	0.004405	3°	0.003924
5°	0.005307	5°	0 003980
10	0.005958	10	0 004939
15	0.006924	15	0.005816
20	0.007920	20	0.006578
25	0.008948	25	0.007330
30	0 009946	30	0.008298
35	0.011105	35	0.009210
40	0.012070	40	»
45	0.013320	45	»
50	»	50	»

Deci-normales con disolvente al 40 °/o

ClK

$c_t = 0.006943\,[1 + 0.023\,(t - 25)]$

Temp.	Cond.
2.°	0.003422
5	0.003804
10	0.004571
15	0 005187
22	0.006188
31.5	0.007784
35	0.008283
40	0.009257
45	0.010216

ClNa

$c_t = 0.005824\,[1 + 0.014\,(t-25) + 0.00011\,(t-25)^2]$

Temp.	Cond.
1.5.°	0.002800
5	0.003210
11.5	0.003606
15	0.004417
20	0.005212
25	0.005683
30	0.006399
35	0.007224
40	0.007950
45	0.008718
50	0.009700

Deci-normales con disolvente al 60 °/o

ClK

$c_t = 0.006224\,[1 + 0.0226\,(t-25) + 0.000154\,(t-25)^2]$

Temp.	Cond.
1.8	0.003144
5	0 003850
10	0.004299
15	0.004861
20	0.005646
23	0.005788
30.5	0.006949
35	0.007725
41.5	0.008586
45.5	0.009363
51	0.010325

ClNa

$c_t = 0.005039\,[1 + 0.023\,(t-25) + 0.00009\,(t-25)^2]$

Temp.	Cond.
2.°	0.002633
5	0.002921
10	0.003440
15	0.003880
20	0.004500
25	0.004984
30	0.005564
35	0.006210
40	0.006855
45	0.007577
50	0.008280

Deci-normales con disolvente al 80 o/o.

ClK		ClNa	
$c_t = 0.005347\,[1 + 0.015\,(t - 25) + 0.00023\,(t - 25)^2]$		$c_t = 0.004924\,[1 + 0.016\,(t - 25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
24 5°	0.005370	25°	0.004853
30	0.005986	30	0.005280
35	0.006486	35	0.005852
40	0 007012	40	0.006308
45	0.007640	45	0.006892
50	0.008203	50	0.007494

Cincuenta-normales de ClK con disolvente al

0 o/o		20 o/o	
$c_t = 0.00233\,[1 + 0.0207\,(t - 25)]$		$c_t = 0.002071\,[1 + 0.023\,(t - 25)]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
1.1°	0.001575	1°	0.000978
5.3	0.001777	5	0.001080
10	0.002006	10	0.001282
14.3	0.002216	13.4	0.001560
16.5	0.002323	20	0.001860
20	0.002545	25	0.002100
25	0.002800	30	0.002353
30	0.003060	35	0.002560
35	0.003290	40	0.002758
40	0.003555	45	0.003080
45	0.003820	50	0.003300

Cincuenta-normales de ClK con disolvente al

40 %

$$c_t = 0.001465\,[1 + 0.026\,(t - 25) + 0.00015\,(t - 25)^2]$$

Temp.	Cond.
0.6	0.000723
5	0.000850
10.1	0.000972
11.5	0.000995
13	0.001050
13.7	0.001070
20	0 001290
25	0.001460
30	0.001650
35	0.001860
40	0.002070
45	0.002240

60 %

$$c_t = 0.001339\,[1 + 0.023\,(t - 25)]$$

Temp.	Cond.
1.1	0.000696
5.5	0.000790
10.4	0.000920
15.2	0.001040
20	0.001173
25	0.001300
30.3	0.001470
35.2	0.001620
40	0 001790
45	0.001990

Cincuenta-normal de ClK con disolvente al 80 %.

$$c_t = 0.001218\,[1 + 0.02\,(t\text{-}25) + 0.00016\,(t - 25)^2]$$

Temp.	Cond.
0.6	0.000720
5	0.000784
10	0.000883
12.8	0.000930
15	0.000992
20	0.001100
25	0 001220
30	0.001340
35	0.001480
40	0.001600
45	0.001770

Centi-normales con disolvente al 0 °/₀.

ClK		Cl Na	
$c_t = 0.001482\,[1+0.019\,(t-25)+ +0.000029\,(t-25)^2]$		$c_t = 0.00111\,[1+0.0206\,(t-25)+ +0.000077\,(t-25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
3.5°	0.000887	2	0.000638
5	0 000928	5	0.000662
10	0.001046	10	0.000810
15	0.001191	15	0.000917
20	0.001343	20	0.001008
25	0.001441	25	0.001055
30	0.001615	30	0.001241
35	0.001758	35	0.001350
40	0.001914	40	0.001473
45	0.002054	45	0.001611
50	0.002225	50	0.001712

Centi-normales con disolvente al 20 °/₀.

ClK		Cl Na	
$c_t = 0.001180\,[1+0.023\,(t-25)+ +0.00002\,(t-25)^2]$		$c_t = 0.000818\,[1+0\,024\,(t-25)+ +0.00016\,(t-25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
2	0.000559	1°	0.000410
5	0.000640	5	0.000463
11	0.000813	10	0.000554
15	0.000908	15	0.000641
20.5	0.001026	20	0.000726
25.4	0.001174	25	0.000808
31.8	0 001344	30	0.000927
35	0.001447	35	0.001018
40	0.001601	40	0.001144
45	0.001754	45	0.001275
50	0.001928	50	0.001407

Centi-normales con disolvente al 40 %/°.

ClK		ClNa	
$c_t = 0.000773\,[1 + 0.023\,(t-25) + 0.00013\,(t-25)^2]$		$c_t = 0.000897\,[1 + 0.026\,(t-25) + 0.0002\,(t-25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
0°	0.000352	2°	0.000455
5	0.000412	5	0.000508
10	0.000495	10	0.000597
15	0.000559	15	0.000651
20	0.000652	20	0.000791
25	0 000728	25	0.000895
30	0.000827	30	0.001032
35	0.000922	35	0.001151
40	0 001028	40	0.001286
45	0.001119	45	0.001419
50	0.001247	50	»

Centi-normales con disolvente al 60 %/°.

ClK		ClNa	
$c_t = 0.000693\,[1 + 0.026\,(t-25) + 0.000015\,(t-25)^2]$		$c_t = 0.00055\,[1 + 0\,024\,(t-25) + 0.00018\,(t-25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
3°	0.000376	2°	0.000297
5	0.000397	5.5	0.000329
11.5	0.000470	10	0.000373
15	0.000519	15	0.000428
20	0.000587	20	0.000486
22.5	0.000623	25	0 000553
26.7	0.000708	30	0.000622
35	0.000851	35	0.000692
40	0.000937	40	0.000756
45	0.001032	45	0.000856
50	0.001138	50	0.000946

Centi-normales con disolvente al 80 %

ClK		ClNa	
$c_t = 0.001215\,[1 + 0.02\,(t-25) + 0.00009\,(t-25)^2]$		$c_t = 0.000583\,[1 + 0.02\,(t-25) + 0.00011\,(t-25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
2°	0.000397	2°	»
5	0.000408	5	0 000388
10	0.000486	10	0.000431
15	0.000544	15	0 000479
20	0.000603	20	0.000532
22.5	0.000636	25	0.000590
30	0.000734	30	0.000648
35	0.000816	35	0.000712
40	0.000875	40	0.000775
45	0.000950	45	0.000842
50	0.001028	50	0.000926

Centi-normales con disolvente al 100 %

ClK		ClNa	
$c_t = 0.000643\,[1 + 0\ 0127\,(t-25)]$		$c_t = 0.000624\,[1 + 0.02\,(t-25) + 0.00031\,(t-25)^2]$	
Temp.	Cond.	Temp.	Cond.
1.5	0 000459	1°	0.000334
5	0.000488	5	0.000346
10	0.000521	10	0.000561
15	0.000558	15	0 000606
20	0.000606	20	0.000644
25	0.000649	25	0.000694
30	0.000680	30	0 000746
35	0.000726	35	0.000791
40	0.000767	40	0.000840
45	0.000815	45	0.000887
50	0.000868	50	0.000944

Conclusiones.

El examen atento de las curvas que preceden y de sus ecuaciones nos conducen á terminar nuestro trabajo con los siguientes resultados ó conclusiones:

Para las curvas correspondientes á disoluciones que no difieren más que en la sal, se nota un cierto paralelismo que hace semejantes sus disposiciones respectivas dentro de cada dos grupos correspondientes á una misma concentración.

Puesta la ecuación de las curvas

$$(f)\ c_t = c_{25}\,[1 + a\,(t - 25) + b\,(t - 25)^2]$$

bajo la forma

$$(F)\ c_t = c_{25} + A\,(t - 25) + B\,(t - 25)^2$$

podemos comprobar la *casi* igualdad entre los valores del coeficiente A para dos disoluciones que no difieran más que en la sal disuelta. Citaremos, por ejemplo, las normales acuosas, cuyas ecuaciones, que carecen de término cuadrado, son

$$c_t = 0.1105 + 0.001751\ (t - 25)$$
$$\text{y}\ c_t = 0.0883 + 0.001628\ (t - 25).$$

Las de las centi-normales, con disolvente alcohólico, son

$$c_t = 0.000643 + 0.00001\ (t - 25)$$
$$\text{y}\ c_t = 0.000624 + 0.00001\ (t - 25).$$

Estos ejemplos, y otros más que podríamos escoger, ratifican lo que queda dicho acerca del paralelismo de las líneas, que implica, á nuestro entender, que ambos electrolitos se conducen igualmente, con la sola diferencia del valor de sus conductibilidades.

Para cada electrolito y concentración, el coeficiente de temperatura, cuando varía el tanto por ciento de alcohol de 0 á 100 por 100, va aumentando hasta pasar por un máximo, como puede verse examinando las ecuaciones respectivas bajo la forma (f) antes escrita.

Esto determina una convergencia de las curvas hacia temperaturas tanto más bajas cuanto mayor es la concentración de la disolución. En el dibujo IV pueden verse ya sus intersecciones, por corresponder aquéllas á las más diluidas, á las centi-normales.

Del examen de los dibujos V y VI, los cuales corresponden á la variación de la conductibilidad con el tanto por ciento de alcohol, podemos deducir la gran influencia, para esa variación, de pequeñas cantidades de alcohol, pues el mayor descenso de la curva corresponde al menor tanto por ciento : al 20.

Este descenso máximo lo señalaron varios investigadores, entre ellos Zelinski y Krapiwin para el 2 por 100.

Por la forma de las curvas V y VI no parece que podamos hacer nuestra la conclusión de Lenz, que expusimos en su lugar, de que «la variación de la conductibilidad con la proporción de alcohol es casi independiente de la concentración».

Por último, la existencia del mínimo *casi* la podemos afirmar de un modo general. En las normales empieza á manifestarse su existencia, hasta las centi-normales, en que es claramente manifiesto.

Se ve que depende no solamente del tanto por ciento de alcohol, sino también de la concentración, de la temperatura y de la sal disuelta. Quizá repitiendo los experimentos entre intervalos más reducidos de aquellos tres factores y con otros electrolitos pudiéramos hacer patente su existencia en muchos casos, como lo hacemos ver en el último grupo de las curvas VI.

Nos proponemos que el trabajo que acabamos de expo-

ner, tenga su segunda parte en el estudio experimental, ya emprendido, de la viscosidad de las mismas disoluciones y á las mismas temperaturas.

Para entonces nos reservamos hablar sobre la explicación de los fenómenos observados y sobre la pretendida correlación entre la conductibilidad y la viscosidad del disolvente.

(Laboratorio de Electricidad de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.)

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Akademie der Wisseuschaften.—Sitzungberichte der Kóinglich Preussischen...—XXXIX-LIII, 1907.—Berlin, 1907.

Nature.—A weekly illust. Journal of Science.—N.º: 1900, 1901, 1902, 1904-1905.—Vol. 77. (Dec. 19, 907-January 23, 1908).—London.

Accademia dei Lincei (Reale).—Atti della...—Anno CCCIV-1907—Serie quinta. Reudiconti.—Classe di Science fisiche, mat. e naturali.—Volume XVI. Fasc. 11, 12 (2.º sem.).—Roma, 1907.

Olivier (Louis).—Revue générale des Sciences pures et appliquées.—18e année, N.º 23 y 24. (15, 30 Déc, 1907).—19 année, N.º. 1. (15 Janvier, 1908).—París.

Geological Survey of Judia.—Records of the...—Vol. XXXVI, Part. 1, 1907. Calcutta.

Nature.—N.º. 1993.—Vol. 77. Thursday January 9-1908.—London.

Royal Irish Academy.—Proceedings of the...—Vol XXVII, Section A. Nos. 4, 5, 6 y 7.—Dublin, 1907.

Molk (Jules).—Encyclopédie des Sciences Mathématiques pures et appliquées.—Edition française.—Tome I (Deuxième volume) Algèbre.—Rédigé dans l'édition allemande sous la direction de François Meyer.—París, Leipzig, 1907.

K. Svenska Vetenskapsakademien I Stockholm.—Arkiv tör Matematik, Astronomy och Fysik Utgifvet of...—Ban 3, Häfte 3-4.—Upsala & Stockholm, 1907.

Kaisorl Akademie der Wissenschaften in Vien.—Mitteilungen der Erdbeben Kommission der...—Neue folge, N.º. XXXI.—Wien, 1906.

American Academy of Arts and Sciences.—Proceedings of the...—Vol. 42, N.º. 27-29. Vol. 43, N.º. 1-3.—Boston, 1907.

John Hopkins University.—The... Circular.—1906, N.º. 10; 1907, N.º. 1-4. Baltimore, Maryland.

R. Accademia Peloritana.—Atti della...—Anno accademico CLXXIX-CLXXX.—Vol. XXII, Fasc. I-II (1907).—Messina, 1907.

Académie Royale de Belgique.—Bulletin de la Classe des Sciences.—1907, Nos. 6, 7 y 8.—Bruxelles, 1907.

Geological Society.—The Quarterly Journal of the...—Edited by the Assistant Secretary.—Vol. LXIII, Part. 4, Nov. 1907, N.º. 252.—London.

Washington University. The... Record —Vol. III, St. Louis, M. O., November, 1907, N.°. 2.

Société Belge d'Astronomie.— Annuaire pour l'an 1908, Publié par la...— Bruxelles, 1908.

Observatorio do Río de Janeiro.—Annuario publicado pelo... para o anno de 1907.— Anno XXIII.—Río de Janeiro, 1907.

University at Columbus.—Ohio State University Bulletin Catalogue.— May 30, 1907.—Published by the University at Columbus.

Societatis Regiæ Scientiarum Danicæ.— Regesta Diplomatica Historiæ Danicæ. Cura...— Series secunda, Tomus posterior VI ab anno 1644 ad annum 1660.—Kjbenhavn, 1907.

Academia Pontaniana.— Atti della...—Volume XXXVII, Serie, II, Volume XII.- Napoli, 1907.

Bureau of American Ethnology.—Twenty fourth Annual Report of the... to the Secretary of the Smithsonian Institution, 1902-1903, By H. Holmes.—Washington, 1907.

Kungl, Vetenskaps Societeten I Upsala. — Bibliographia Linnæana. Matériaux pour servir a une Biblographie Linnéenne.—Recueillis, par J. M. Hulth.—Partie I, Livraison I.—Uppsala, 1907.

Regiæ Societatis Scientiarum Upsalensis.—Nova Acta...—Seriei tertiæ. Vol. XVIII, Fasc. II, 1900; ídem XX, íd. II, 1904; íd. Extraordinem, 1877 — Seriei quartæ.—Vol. I, Fasc. III, 1905-1907; íd. II, íd. 1, 1907. Catalogue méthodique des Acta et Nova Acta... 1744-1889.—Upsala.

Saville (Marshall H.).—Contributions to South American Archeology The George G. Heye Expedition.—The Antiquities of Manabi, Ecuador.— A Preliminary Report By...—New York, 1907.

Fraipont (Julien).— Etat Independant du Congo, Annales du Musée du Congo-Zoologie. — Serie II, Contributions á la Faune du Congo.— Tome I, Okapia par...—Bruxelles. Septembre, 1907.

Akademie der Wissenschaften.— Sitzungsberichte der Kaiserlichen...— CXV. Band, Abteilung I; ídem íd. II a; íd. íd. II b; íd. íd. III.—Wien, 1906.

United States Geological Survey.— Department of the Interior...—Charles D. Walcott, Director.—Bulletin N ° 287, 294, 296, 300, 308, 312, 314 y 315.—Washington, 1906-1907.

United States Geological Survey.—Department of the Interior...—Charles D. Walcott, Director. — Water-Supply and Irrigation Paper, n.° 190-194, 196, 200.—Washington, 1907.

(Se continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1909..... 5

I.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia primera..... .. 11

II.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones de los bordes de los astros *(continuación)*, por *Vicente Ventosa*..... 29

III.—Estudio espectrográfico de las «Blendas». Investigación acerca de la Blenda de «Picos de Europa». Presencia del «Germanio» en la misma, por *Georges Urbain, Angel del Campo y Clair Scal*..... 49

IV.—Contribución al estudio de las esencias de trementina españolas, por *Obdulio Fernández*..... 63

V.—Sobre la conductibilidad de disoluciones de *ClK* y *ClNa* en mezclas de agua y alcohol metílico. (Variaciones con el tanto por ciento de alcohol, la concentración y la temperatura), por *Aurelio Garzón y Carmona*..... 70

Publicaciones recibidas..... 95

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 4

(Octubre de 1909)

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1909

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

VI. — Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia segunda.

SEÑORES:

Hemos procurado hacer en la primera conferencia de este curso un resumen de todos los cursos anteriores, resumen que se condensa brevemente de este modo:

Caracteres propios de la Física experimental y de la Física matemática, y ejemplos diversos; teoría elemental de la Elasticidad por los métodos de Cauchy, Lamé y Poincaré, y, por último, ideas expuestas en el curso anterior sobre las críticas que se han hecho de la Mecánica racional clásica y condiciones á que ha de satisfacer la nueva Mecánica de la electricidad y del éter.

Debemos ahora señalar, al menos en sus líneas generales, el programa de este nuevo curso.

O, mejor dicho, la materia de las conferencias que en él hemos de dar.

Pensé en algún momento entrar decididamente en el estudio de la electricidad; pero me detuvieron consideraciones que voy á exponer, y que se enlazan con una cuestión importantísima, que en parte es cuestión de crítica, y en parte es cuestión histórica.

Me explicaré aún con más claridad.

***

Lo hemos dicho varias veces en estas conferencias y en diversos escritos.

Si las Ciencias son la expresión racional de los fenómenos de la Naturaleza, imágenes más ó menos fieles de la realidad, y simbolismos forjados por la razón humana, claro es que las Ciencias han de ser incompletas, parciales y limitadas.

Una lente enfocada con el mundo exterior para recoger su imagen, tiene un campo limitado, no puede recoger de una vez la imagen total, tiene que girar sobre sí misma para ir enfocando parcialmente diferentes regiones del horizonte, y esto es lo que le sucede con más razón y en inmensa escala á la inteligencia del hombre, cuando pretende estudiar la Naturaleza toda.

Tiene que estudiar grupos parciales de fenómenos, los que están en inmediata relación, los que están, por decirlo de esta manera, y continuando con el ejemplo anterior, dentro del campo de la lente en cada enfocación parcial.

Así, la totalidad de los fenómenos, por relaciones y analogías, se dividen en grupos, y cada grupo ó familia de fenómenos naturales da lugar á una Ciencia distinta.

Claro es que, en cada punto, el Universo entero se refleja, y en él se cruzan infinitas é infinitas influencias, infinitas fuerzas y energías.

Tenerlas todas en cuenta, es empresa imposible para la inteligencia del hombre, y en cada grupo de fenómenos sólo puede apreciar y sólo debe apreciar las influencias dominantes, prescindiendo de otras influencias, que por su pequeñez se escapan á los medios prácticos de observación y experimentación.

Resulta, pues, de lo dicho, que la Ciencia total humana, que hoy no es más que una aspiración hacia la unidad, aparece dividida en la historia, y hoy mismo está dividida en diferentes Ciencias parciales.

***

Pero cada Ciencia, si bien en la Naturaleza representa fenómenos ó corresponde á fenómenos, que están enlazados con los fenómenos que estudia otra Ciencia, no por eso deja de tener su autonomía propia, como en la política internacional diferentes estados autónomos reclaman y sostienen su independencia, sin la que su vida es imposible.

Es decir, que las Ciencias todas están en relación unas con otras, y las más próximas en relación más íntima que las más lejanas; pero estas relaciones no autorizan, sino en casos muy extraordinarios, á ninguna de ellas para anular y absorber á las que la rodean.

Una cosa es lo relativo á las relaciones internacionales, pudiéramos decir, y otra muy distinta la conquista, la absorción, la anulación de los estados próximos.

Toda Ciencia que tenga verdadera condición de Ciencia, por la extensión de su campo, por la variedad y riqueza de sus fenómenos, es decir, de los hechos que ese campo contiene, por la importancia de las leyes de unidad á que se haya llegado, por lo que constituye, si vale la palabra, la vida y la actividad de la disciplina científica de que se trate, tiene derecho pleno á la autonomía.

Podrá servir de auxiliar á otras Ciencias, y ella misma podrá pedirles auxilio; pero tendrá materiales propios y no podrá nunca admitirse que los materiales que constituyan el estudio de esta Ciencia hayan sido en cierto modo prestados por otra Ciencia más próxima ó más remota.

Quizá parezcan estas consideraciones extrañas á los que me escuchan ó á los que leen estas conferencias.

Extrañas por una parte, y por otra inútiles de puro evidentes.

Y, sin embargo, ni son extrañas, ni son evidentes, como voy á demostrar desde luego, demostrando que se enlazan con la materia propia de este curso, y haciendo ver que hay cierto conato de invasión en las Ciencias matemáticas, de las Ciencias físicas.

Pero esto exige nuevas explicaciones.

Constantemente las Ciencias físicas, para determinar las leyes de los fenómenos naturales, para reducirlos á fórmulas exactas, acude á las Matemáticas puras con una serie de problemas de análisis, que sólo las Matemáticas puras pueden resolver.

Por ejemplo: un problema de Física matemática, exige la integración de una ecuación diferencial.

Sea ésta entre otras muchas

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = 0,$$

que la encontraremos más de una vez en estas conferencias y en este mismo curso.

Y el físico le dice al matemático: yo necesito para resolver un problema de Física, resolver esta ecuación diferencial, es decir, determinar V en función de x, y, z.

Y más aún, necesito que el valor de V, que satisfaga á esta ecuación, tenga sobre una cierta superficie un valor determinado para cada punto de la misma.

Es decir, que necesito que se encuentre una función V

$$V = \varphi(x, y, z)$$

tal, que satisfaga á la anterior ecuación diferencial, y que en los diferentes puntos de una superficie definida

$$F(x, y, z) = 0$$

tenga un valor determinado

$$V_1 = \psi(x, y, z);$$

resulta de aquí, que poniendo en V y en V_1 el valor de z

deducido de $F = 0$, debemos obtener dos ecuaciones idénticas: sean

$$V = \alpha(x, y)$$
$$V_1 = \alpha(x, y)$$

El problema de Física será un problema determinado, ya de equilibrio eléctrico, ya de distribución de temperaturas, ya de movimiento de un flúido ú otro análogo.

Sea de ello lo que fuere, al plantear en forma matemática dicho problema, se convertirá en un problema de análisis como el que acabamos de indicar, á saber: buscar, entre las integrales particulares de una ecuación diferencial, una que cumpla con ciertas condiciones, que en nuestro ejemplo son las que antes indicábamos.

El problema de Física ha sido la causa, la ocasión, el estimulante para el matemático, pudiéramos decir, de que estudie y procure resolver un problema particular de análisis.

Pero nada más.

La ecuación se integra por procedimientos particulares de la Ciencia matemática.

Si de antemano estaba resuelto, la Ciencia matemática ofrece á la Física la solución que ya existía.

Si esta solución y este problema no habían tenido ocasión de ser estudiados, los sabios dedicados á la Ciencia pura procurarán resolverlo y hallar la solución que se les pide.

Es lo mismo, y perdóneseme la comparación, que si á una fábrica de maquinaria se le encarga que construya una máquina particular para determinado ramo de una industria.

Más aún, y esto es importantísimo, las soluciones que la Física experimental pide á la Ciencia matemática, son casi siempre, á pesar de su complicación y de sus dificultades, casos particulares de grandes teorías propias de la Ciencia pura y que constituyen la materia abstracta en que la Ciencia pura se ejercita.

La ecuación diferencial que antes indicábamos es impor-

tantísima, en ella han ejercitado su genio grandes matemáticos; pero es, como tantas veces hemos dicho, un caso particular, y nada más que un caso particular de teorías mucho más generales.

Está comprendida la ecuación de que se trata en las ecuaciones en diferenciales parciales de segundo orden con tres variables independientes, y éstas, á su vez, en las de orden más elevado de un número n de variables.

La condición á que ha de satisfacer la integral buscada también es particularísima, y los problemas matemáticos no buscan sólo integrales particulares, sino las integrales generales en las que aquéllas están comprendidas.

De suerte que el campo que las matemáticas puras abarcan, es infinitamente superior al campo práctico en que se plantean los problemas de la Física.

No puede admitirse, que la materia de las matemáticas puras, la masa, por decirlo así, en que se ejercita su trabajo, esté limitada por los problemas de la Física ni por los fenómenos del mundo inorgánico.

El campo de las matemáticas puras es suyo propio, rebasa infinitamente el campo de las aplicaciones, y éstas, por importantes que sean, no pueden tener la pretensión, que sería absurda, de absorber todas las maravillosas creaciones del matemático.

*
* *

Afirmamos una vez más que las relaciones entre las matemáticas y la Física son importantísimas y constantes; que muchas teorías matemáticas ha sido sugeridas por los fenómenos del mundo exterior; pero ponemos á salvo las facultades creadoras del matemático creando nuevos seres del análisis y la geometría, y nuevos simbolismos; y aun sin nuevas creaciones, hacemos constar el poder inmenso de ge-

neralización respecto á los problemas concretos y particulares que el físico plantea ante el matemático.

Crea y generaliza, sea cual fuere el primer estimulante, que podrá marcar cierta dirección en los trabajos matemáticos en cada época, pero nada más.

Pensar que las matemáticas no tienen otro campo que aquel á que le condena y en que le coloca y encierra la Física, es, á mi entender, de todo punto inaceptable, es empequeñecer la Ciencia matemática, es negar su autonomía, es desconocer su facultad creadora y su facultad de generalización, y es desconocer todavía el poder de abstracción de la razón humana.

¿Es que los trabajos matemáticos y sus grandes teorías se dividen en dos partes: una, *la primera,* la de las teorías de aplicación práctica inmediata, ya á la industria, ya á las necesidades humanas en general, ya á las Ciencias físicas, químicas y astronómicas, y que sólo estas teorías, que pueden aplicarse desde luego, son las verdaderamente útiles y las únicas que deban protegerse y fomentarse?

¿Es que de las dos partes en que decimos que pueden dividirse los trabajos matemáticos, *la segunda parte*, la que comprende las grandes teorías, las grandes creaciones, los conceptos más elevados de la Ciencia, pero más abstractos, son pura fantasía, juegos caprichosos del matemático, lucubraciones de todo punto inútiles de la imaginación?

Esto lo negamos en absoluto: aunque alguna de dichas grandes teorías no se aplicase nunca, sólo por ser una ley matemática, una ley de la razón humana y de la lógica tendría, una utilidad superior; porque tales teorías son alimento de la razón, porque la iluminan, la ensanchan y la perfeccionan, y si es mucho alimentar al cuerpo y atender á sus necesidades físicas, es más aun alimentar el espíritu humano.

Pero agregamos otra observación.

Sostenemos que las teorías más abstractas, y al parecer

de menos utilidad práctica hoy, tendrán aplicación mañana, y aplicación, por de contado, á los problemas físicos del Universo, problemas en que vibra constantemente el concepto de cantidad.

Y si pudiéramos desarrollar tal tesis que sólo apuntamos en este momento, nos fuera fácil presentar multitud de casos en que esto ha sucedido.

En un discurso que pronuncié el año anterior en la Sociedad para el Progreso de las Ciencias, presenté el ejemplo de las imaginarias.

La escuela inglesa aplica los cuaternios á los problemas de la Elasticidad y el Magnetismo.

La teoría de variables complejas se aplica á la integración de una ecuación diferencial de esta forma:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} = 0.$$

El cálculo simbólico á multitud de problemas de Física matemática, y podríamos seguir presentando ejemplos largo rato sín llegar al fin de nuestra empresa.

De suerte, resumiendo, que los problemas del mundo inorgánico, y concretando más, los problemas de la Física, ofrecen al matemático ocasión y motivo para ejercitar su ingenio y para resolver problemas dificilísimos; pero el matemático por sí, sin necesidad de estos estimulantes, puede crear y ha creado grandes teorías, que muchas veces son prodigiosas generalizaciones de esos mismos problemas que la Física le proporciona.

*
* *

No me parece justo ni exacto confundir la causa *determinante* con las fuerzas y energías que en cada fenómeno se desarrollan.

Permitidme que explique mi pensamiento de esta manera.

Un fulminante estalla, comunica su vibración á una gran masa de dinamita y determina de este modo una explosión inmensa.

Pues bien, sería absurdo suponer, que la energía relativamente pequeña del fulminante equivale á las enormes energías desarrolladas por la dinamita.

Aquélla ha sido causa *determinante*, no causa total.

Las energías de la explosión estaban almacenadas y en estado latente en el gran explosivo.

El fulminante no hizo otra cosa que hacerlas entrar en juego.

Pues como símbolo, el ejemplo anterior puede expresar mi pensamiento.

Los problemas que la Física propone á las matemáticas son como fulminantes que ponen en juego las inmensas energías de la Ciencia pura. Son útiles, prestan un inmenso servicio, si así puede decirse, pero no representan ni equivalen á la totalidad de la Ciencia matemática.

Las relaciones entre ciencias diversas tienen inmensa importancia como preparación á la Ciencia universal, y demuestran que sobre la variedad de las diferentes disciplinas científicas existe una unidad suprema, que hoy desconocemos, aunque á ella procuraremos acercarnos todo lo posible.

Esto es evidente, pero no lo es menos que cada Ciencia tiene su autonomía propia y su propio campo de acción; aunque nadie duda que estas relaciones entre las Ciencias físicas y las Ciencias matemáticas son profundas, variadas y fecundísimas; esto no hay para qué negarlo, y está demos trado plenamente en la memoria de Mr. Picard, que antes citábamos.

Es más, porque aunque nos opongamos á ciertas exageraciones, no hemos de quitar ni fuerza ni valor á los argumentos en favor de las ideas contrarias.

Los problemas de la Física, como en otros tiempos la utilidad material de un problema de aritmética ó de un problema de agrimensura, han sido poderoso estimulante para el matemático, y le han obligado á descubrir teorías muy importantes de la Ciencia actual.

Y no es esto sólo, aunque el matemático sólo emplea los métodos y los procedimientos de su ciencia para desarrollar teorías, para demostrar teoremas ó para resolver los problemas á que se le solicita, en ocasiones, una demostración difícil del análisis puede sustituirse por una intuición física, si puedo expresarme de este modo.

Así, en el problema de Dirichlet, que es en rigor el que antes citábamos, la demostración analítica de que el problema es posible, es sumamente difícil, y ha puesto en juego el talento y la inventiva de los grandes matemáticos de nuestra época desde el mismo Dirichlet y Weiertrass hasta Poincaré, en una serie de admirables trabajos, entre los que aún citaremos los métodos de Fredoholm; y, sin embargo, la observación y la experiencia, y por decirlo de cierto modo, la intuición física, demuestran el teorema de un golpe, es decir, que existe una función y sólo una función armónica y finita, así como sus derivadas primera y segunda, capaces de tomar sobre una superficie límite S valores dados y anulándose el infinito.

Basta para ello suponer que se trata de la temperatura de un sólido límitado por la superficie S y que en cada punto de la superficie dicha temperatura tiene un valor determinado.

Pues la temperatura se ha de establecer de algún modo: es un fenómeno, es un hecho, es una realidad, que de golpe se impone, y que para la exactitud del problema suple en cierto modo á la demostración matemática.

Como este ejemplo, pudiéramos citar otros varios; pero es seguro, que el matemático no se contenta con demostraciones de esta clase, sino que busca la razón analítica del teorema.

Los hechos demuestran que el teorema es, y esta seguridad puede servir de aliento y de guía; pero la Ciencia pura puede demostrar, no sólo que es, sino que debe ser mientras no influyan otras causas y el problema no salga de los límites de las hipótesis establecidas; y que si el teorema no fuese cierto, la razón humana se encontraría en contradicción consigo misma, como si encontrase un triángulo rectángulo en que el cuadrado de la hipotenusa fuera mayor ó menor que la suma de los cuadrados de los catetos, ó como si se viese (viniendo á ejemplos más complicados) que una función elíptica se pudiera expresar por un número finito de operaciones algebráicas de la variable; sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potencias y raíces.

***

Realmente, casi todo lo que precede se refiere á cuestiones ajenas al objeto de estas conferencias, aunque con la Física matemática estén íntimamente enlazadas.

De todas maneras, debemos cerrar este paréntesis y volver al asunto principal.

La Física matemática, como hemos dicho tantas veces, establecidas las hipótesis principales, entre las que ha dominado hasta aquí la hipótesis mecánica, y aplicados los métodos de esta última Ciencia, se encuentra con una serie de problemas de análisis, que el matemático tiene obligación de resolver.

Así, pues, es imposible que los alumnos penetren en el estudio de la Física matemática, aun sin pasar de los elementos, y mucho más si abordan el estudio de los libros y memorias de tantos insignes maestros, sin una gran preparación matemática.

Esto ya era necesario para la Física matemática clásica, y

esta misma dificultad, ó esta misma exigencia, se acentúa más y más en la Física matemática moderna.

Hay que entrar en estos campos de la Física matemática armados de todas armas, si se me permite la expresión; de otro modo, es seguro que no se termina ni la primera jornada.

Y como, por otra parte, los alumnos de esta clase y los que siguen estas conferencias, es posible que no hayan adquirido los conocimientos matemáticos á que me refiero, al menos muchos de ellos, me veo obligado á adoptar uno de estos dos métodos:

O seguir explicando mis conferencias de Física matemática como hasta aquí, interrumpiendo á cada paso la materia propia del curso para explicar teorías de las matemáticas puras, lo cual hace que se desvanezca, se pierda ó, por lo menos, se ofusque la cuestión principal en la inmensidad de la cuestión matemática de que depende, perdiéndose asimismo la unidad de la enseñanza y la parte más fundamental de la Ciencia á que nos dedicamos en esta asignatura; ó bien, por el contrario, podemos reunir las principales teorías matemáticas que luego hemos de aplicar, exponiéndolas de antemano, para que, cuando llegue el caso, podamos aplicarlas á cada problema físico sin grandes desarrollos, refiriéndonos á explicaciones anteriores, reforzando la verdadera teoría de la Física matemática y aligerando los cálculos y las transformaciones.

Este es el sistema que he escogido, y el que he de seguir en adelante.

Porque se trata de problemas en que aun es más necesario y más útil que para los problemas estudiados en cursos precedentes.

Y por ahora no insisto más en estas ideas, que veremos comprobadas en las conferencias de los cursos venideros, dado que á ellos tengamos la suerte de llegar.

***

Y con lo dicho podemos ya especificar el objeto del presente curso.

En él expondremos una serie de cuestiones de análisis y también de Geometría, que son las que se aplican á los problemas de la Física matemática clásica y de la Física matemática moderna.

Pero si no hiciéramos más, este curso resultaría de Matemáticas puras en vez de ser de Física matemática.

Un año entero pasaríamos hablando de problemas matemáticos abstractos, como si hubiéramos olvidado por completo la materia fundamental de esta asignatura, y como si se hubiera convertido en una asignatura de análisis.

Para evitar este inconveniente, que sería grave, permitidme que lo diga, para mi conciencia de profesor de Física matemática, acudiré al siguiente método que salva aquellos escrúpulos, que da cierta amenidad relativa, aunque en estas materias no puede ser mucha, á los problemas abstractos de la Ciencia pura, y que en cierto modo es una preparación para los cursos próximos, y algo así como un ensayo ó preludio de los difíciles problemas de la Física matemática moderna.

Y este método es el siguiente:

Antes de estudiar cada cuestión de análisis, como todas las que voy á tratar han sido sugeridas por cuestiones de Física, indicaré sus orígenes ó su origen, es decir, los problemas de Física que han sugerido el problema de análisis en cuestión.

Y al terminar el estudio de éste, muchas veces haremos rápidamente aplicación á alguno de los problemas de Física que exigieron una solución matemática y que dieron motivo á determinado análisis.

***

Este trabajo, aunque desde otro punto de vista, puede te-

ner alguna analogía con el que constituyó el primer curso de nuestra asignatura.

Allí estudiábamos las relaciones entre la Física matemática y la Física experimental, y marcando el carácter de una y otra Ciencia para dar forma concreta á nuestro pensamiento, presentábamos una serie de ejemplos tomados de la Física matemática clásica; ejemplos elementales, pero característicos: la teoría de los gases, la teoría del calor, la teoría de las vibraciones, de la luz, de la electricidad, de las acciones electromagnéticas.

Todo lo cual, no constituía ciertamente un tratado, ni siquiera elemental, de Física matemática; pero fué, si se me permite la palabra, y no parece excesivamente prosaica, una *muestra* de la clase de problemas que dicha Ciencia resuelve.

Pues en este curso, con un objeto distinto de aquél que acabamos de indicar, hemos de hacer una cosa análoga.

En este curso no pretendemos establecer relaciones entre la Física matemática y la Física experimental; pero buscaremos relaciones entre la Física matemática y las matemáticas puras, y también presentaremos una serie de ejemplos, algunos tomados de la Física matemática clásica; otros de la Física matemática moderna, que serán, y empleo la misma palabra que antes empleé, *muestras* de la misma Ciencia.

Las cuestiones de análisis en que vamos á ocuparnos son muy diversas; citemos algunas:

En primer lugar estudiaremos la teoría de los vectores.

Algo diremos, aunque muy sucintamente, de los métodos, y, sobre todo, de las notaciones de Grassmann, que, por decirlo así, se están poniendo de moda.

Para facilitar el estudio de las obras inglesas, expondremos la teoría de los Cuaternios. Daremos quizá más de una demostración de las célebres fórmulas de Fourier. Y estudiaremos así mismo varias ecuaciones diferenciales, como son las que dan origen á las funciones de Bessel y al célebre teorema de Dirichlet.

En el estudio de esta serie de Teorías y Fórmulas, serán unas de las primeras, porque son fórmulas fundamentales, las de Green y Stokes.

Por fin, señalaremos unas ligeras ideas del cálculo simbólico, que facilita la integración de algunas ecuaciones diferenciales, como se ve, por ejemplo, en una nota muy importante de Mister O. Heaviside, publicada en *The Philosophical Magazine.*

***

En los casos que hemos citado y en otros varios, que también estudiaremos, en suma, recorriendo toda la Física matemática, se observa que la mayor parte de los problemas son problemas de cálculo integral; es decir, que los fenómenos físicos, ó si se quiere, sus leyes, ó concretando aún más, las variables de que dependen dichos fenómenos naturales, que también podemos decir que son los parámetros del fenómeno, se expresan por ecuaciones diferenciales y el problema se resuelve integrando tales ecuaciones, ó sea buscando soluciones con bastante generalidad para que cumplan con ciertas condiciones particulares del problema.

Esto, que así dicho es un tanto vago, ya lo precisaremos en el momento oportuno.

De todas maneras resalta esta circunstancia, sobre la cual hemos llamado antes la atención, á saber: que la resolución de la mayor parte de los problemas de Física matemática depende de la integración de ecuaciones diferenciales.

Por ecuaciones diferenciales vienen expresadas las leyes del mundo físico.

Y ocurre esta pregunta:

¿Por qué se expresan por ecuaciones diferenciales, y no por ecuaciones de términos finitos?

Y no está bien formulada la pregunta, aunque es la que

naturalmente ocurre al recorrer las diferentes teorías de la Física matemática.

Digo que no está bien formulada porque, en rigor, las leyes de la Naturaleza, sus diferentes fenómenos, deben expresarse en términos finitos; es decir, que las variables dependientes se expresen de tal modo en función de las variables dependientes, que para cada sistema de valores de estas últimas, se conozcan las series de operaciones algebráicas ó transcendentes, ó de cualquier clase que sea, que han de efectuarse para determinar los valores de las variables dependientes, que es lo que queremos explicar diciendo *ecuaciones en términos finitos* por contra posición á términos diferenciales, aunque claro es que aquellas operaciones que decíamos pueden depender de series ó productos infinitos, ó determinantes infinitos, ó cualquiera otra forma de la cual se sirva el matemático para expresar determinadas funciones.

Las ecuaciones diferenciales de la Física matemática son, hablando en general, formas de paso, no son las formas definitivas; las formas definitivas son sus integrales, y aquí puede preguntarse: ¿Por qué estas formas de paso?, ¿por qué se empieza por ecuaciones diferenciales?

En la Física experimental, muchas veces, y decimos muchas veces porque hay de todo, se empieza por las relaciones finitas.

Supongamos que son dos las variables.

Pues se construye una tabla, que es el resultado de una serie de experimentos, en que á cada valor experimental de x corresponde un valor experimental de y; y luego, por tanteos, se busca una expresión analítica que condense dicha tabla.

Aquí se determinan, desde luego, las relaciones entre cantidades finitas.

Esto puede hacerlo casi siempre la Física experimental; esto, por lo general, no lo hace la Física matemática.

Las relaciones entre cantidades finitas no las puede deter-

minar directamente, ó no las ha podido determinar la Física matemática; tiene que pasar por la ley elemental de los incrementos diferenciales.

Este es un punto que discutiremos en otra ocasión; por ahora hemos de contentarnos con algunas ideas generales.

¿Es que las relaciones diferenciales son más sencillas que las relaciones entre cantidades finitas y por eso se empieza por aquéllas?

Sobre esto, algo creo haber dicho en otros años; si lo dije, lo repito; y si no lo dije, lo consigno por vez primera.

Las derivadas, ¿son más sencillas que las funciones?

En absoluto, no puede afirmarse.

En la función, por ejemplo,

$$y = ax^2 + bx + c,$$

la derivada primera es más sencilla, porque es de primer grado,

$$\frac{dy}{dx} = 2ax + b;$$

y la derivada segunda, más sencilla todavía, porque es una cantidad constante:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2a.$$

De modo que si un fenómeno de la Naturaleza estuviese representado por la ecuación de segundo grado, sería más fácil empezar por su segundo coeficiente diferencial, que es cantidad constante.

En este segundo ejemplo

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x,$$

la derivada

$$\frac{dy}{dx} = a \cos x - b \operatorname{sen} x,$$

tiene el mismo grado de complicación que la función primitiva; de modo que si aquélla representase un fenómeno físico, es de creer que tantas dificultades habría empezando por el coeficiente diferencial, como pretendiendo hallar directamente la ecuación en términos finitos.

Por último, la derivada puede ser aún de mayor complicación que la función primitiva, por ejemplo: en

$$y = \sqrt[3]{a + b\,x^2},$$

la derivada

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\left(a + bx^2\right)^{-\frac{2}{3}} . 2bx,$$

no puede decirse seguramente, que sea más sencilla que la función primitiva.

Lo que hay, es, que en Fisica matemática se supone, y hablamos en términos generales, que las funciones se pueden desarrollar por la serie de Taylor, y esta serie, no tomando más que unos cuantos términos, tiene la forma de un polinomio, es decir, de una función algebráica entera; y en este caso sus derivadas son más sencillas que la función primitiva.

*
* *

Pero todo lo que hemos dicho solo se funda en una especie de intuición muy elemental; hay razones más terminantes para explicar la circunstancia que antes indicábamos.

En efecto, en toda la Física matemática clásica, la hipótesis de que se parte, es la hipótesis mecánica; y las ecuaciones fundamentales de la Mecánica, son ecuaciones diferenciales: luego es evidente, que todos los problemas planteados partiendo de dicha hipótesis, se plantearán por medio

de ecuaciones diferenciales, ó bien las ordinarias, ó bien las de Lagrange.

Y en la Mecánica las ecuaciones son diferenciales, porque las fuerzas se expresan por un segundo coeficiente diferencial.

Esto respecto á la Mecánica clásica.

Respecto á la Física matemática moderna, fácil nos sería dar explicaciones análogas; pero no creemos que es tiempo todavía para entrar en estas discusiones.

Digamos sólo que por intuición, por instinto, puede decirse, parece que en la Naturaleza las leyes de variación han de ser más sencillas en los gérmenes, en los elementos, en las diferenciales, que en las cantidads finitas ya formadas; como parece que en el mundo biológico el estudio de las celdillas elementales ha de ser más sencillo también, que el estudio de los seres en pleno desarrollo.

El naturalista, al empezar por el estudio de las celdillas, hace lo mismo que el matemático al empezar por las ecuaciones diferenciales.

Para el naturalista son ecuaciones diferenciales, si se me permite esta imagen, las primeras celdillas del ser: el ser en pleno desarrollo, es su integral.

Valgan por lo que valieren, apunto estas ideas, que quizá en otra ocasión desarrolle en forma más exacta.

En la conferencia próxima concretaremos algunas de los conceptos generales que hoy no he hecho otra cosa que indicar...

VII.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros.

POR VICENTE VENTOSA

(Conclusión.)

APÉNDICE

En el artículo III de esta Memoria expusimos á grandes rasgos los métodos de observación y cálculo por nosotros seguidos para determinar la dirección de los vientos superiores, y las fórmulas que á ello conducen y sirven, ya para reducir al horizonte el ángulo de posición de las ondulaciones, medido en un plano perpendicular al eje óptico del anteojo, ya para corregir, si se considera necesario, el ángulo azimutal resultante por movimiento propio del astro observado, siempre que simultáneamente sea posible averiguar, por medición directa, la velocidad angular relativa de la ondulación ó, en su caso, la de las nubes sobre el mismo astro proyectadas.

Como complemento á nuestro trabajo, y aunque en su lugar respectivo ya indicamos los medios auxiliares empleados para simplificar el procedimiento de cálculo, algo complicado á primera vista, quizás no se juzgue inoportuno el entrar aquí todavía en algunos pormenores que, además, podrá utilizar el observador que desee hacer el ensayo del método de las ondulaciones.

Lo primero que se necesita, como en todas las observaciones astronómicas, es el conocimiento de la *hora* á que las mismas corresponden. Para nuestro objeto bastará la que se-

ñale un buen reloj de bolsillo, arreglado á tiempo medio, con la aproximación de *un minuto*. Este dato es suficiente para obtener la declinación del astro expresado en *grados*, y el momento de su paso por el meridiano *en horas y minutos;* elementos únicos indispensables para la resolución del problema que perseguimos y que, directamente, se hallarán en cualquier almanaque ó anuario astronómico.

Llamemos t al tiempo ú hora de la observación, y m al de la culminación superior del astro; si éste carece de movimiento propio sensible en la esfera celeste, el ángulo horario H estará dado, como se sabe, por la expresión

$$H = t - m \ldots\ldots \qquad (1)$$

positivo ó negativo, según que t sea mayor ó menor que m, ó, en otros términos, positivo si el astro se observa al O. del meridiano, y negativo en el caso contrario. Para el Sol habrá que tener en cuenta la ecuación de tiempo, con su signo, ó sea tomar para valor de m la hora de tiempo medio á que corresponden 0 horas de tiempo verdadero. Mas si de la Luna se trata, habrá que modificar ó corregir el valor de H por la parte proporcional correspondiente del retardo variable que existe entre dos pasos consecutivos de dicho astro por un mismo meridiano. Si T representa el intervalo, en tiempo medio, comprendido entre ambos pasos, y R el retardo que, por su movimiento de traslación hacia Oriente experimenta la Luna de uno á otro paso, el retardo r proporcional á H podrá determinarse por la fórmula

$$r = \frac{H}{T} \times R \ldots\ldots \qquad (2)$$

con lo cual la expresión (1) será ahora

$$H = (t - m) - r \ldots\ldots \qquad (3)$$

porque, en virtud del sentido en que se verifica el movimiento de la Luna á través de las constelaciones, la corrección r debe tener el mismo signo que la diferencia $t - m$, y substraerse siempre de los valores *absolutos* de los horarios aproximados H. Estas nociones son tan elementales, que podrían haberse omitido sin inconveniente alguno.

Para nuestro uso particular dispusimos una tabla de los valores de r con arregio á la fórmula (2), pero como siempre serán pocas, relativamente, las observaciones que se hagan empleando la Luna, las veces en que esto suceda será casi más sencillo calcular directamente dichos valores.

Preséntase luego un problema para el cual, por el contrario, serán indispensables las tablas, porque el cálculo numérico, en cada caso particular, de las fórmulas de la Astronomia esférica, con las que se determina la altura, el azimut y el ángulo paraláctico de un astro, mediante su ángulo horario y su declinación, previamente deducidos conforme acabamos de ver, sería realmente muy largo y penoso. Pero si se advierte el escaso grado de precisión que para nuestro fin necesitamos, la construcción de las tablas será sencilla, y no excesiva su extensión, circunstancia esta últíma ventajosa para el fácil manejo de las mismas. De la que hemos usado en nuestras observaciones damos una muestra en la Tabla I, inserta al final de este Apéndice.

Es de doble entrada, con los argumentos *horario* y *declinación*. Esta, dispuesta como argumento horizontal, va espaciada de grado en grado, entre los — 28° y + 28°, límites que señalan las máximas desviaciones de la Luna respecto del ecuador celeste. Los horarios, colocados en columna, se diferencian unos de otros consecutivamente en 8 minutos de tiempo, y cada argumento abarca tres renglones en los valores correspondientes de la altura h, del azimut α y del ángulo paraláctico p del astro. Según se ve en la tabla que como modelo presentamos (y lo mismo se vería en la tabla general), los valores de cualquiera de estas tres cantidades

comunmente no varían al cabo de 8 minutos más que tres ó cuatro grados á lo sumo, con cuyo artificio la interpolación para las declinaciones y horarios intermedios puede efectuarse casi sin tanteo. Además, en la tabla de que nos hemos servido, y se extiende en los ángulos horarios desde 0^h hasta $6^h\,32^m$, cada renglón, de los tres mencionados, va escrito con tinta de diferente color: carmín para las alturas, azul para los azimutes, y negro para los ángulos paralácticos. De esta manera es difícil la confusión de renglones al pasar de un horario á otro.

Para reducir al horizonte las direcciones del viento observadas con el anteojo, cuando la operación ha de repetirse muchas veces, no es tampoco tan breve como fuera de desear, á pesar de adaptarse bien al empleo de los logaritmos, el cálculo directo de la fórmula

$$\operatorname{tang} \beta = \operatorname{tang} y \operatorname{sen} h \ldots\ldots \qquad (4)$$

de los Sres. Ekholm y Hagström, en otro lugar de nuestro trabajo mencionada. Recuérdese que en ella γ designa el ángulo de posición medido con el micrómetro, y β el ángulo azimutal correspondiente; de manera que, si α es el azimut actual del astro, el azimut verdadero de la ondulación estará representado por la segunda ecuación que también antes dimos

$$\varphi = \alpha + \beta = \alpha + (\beta - \gamma) + \gamma \ldots\ldots \qquad (5)$$

en cuya última forma podrá calcularse, de una vez para siempre, una tabla que proporcione los valores de la corrección $\beta - \gamma$ con los argumentos γ y h. Tal es el origen de la Tabla II que al final presentamos, y donde el argumento γ se ha igualado á $\pi + d\pi - p$, suponiendo que las observaciones se efectúan con un anteojo montado ecuatorialmente, y que en el cálculo se ha llevado en cuenta la corrección $d\pi$ por movimiento propio del astro.

La Tabla II es de uso universal y aplicable sin alteración á todos los lugares de la Tierra; no así la Tabla I, cuyos valores numéricos son funciones de la latitud geográfica del lugar de observación.

La deducción de la fórmula (4) es sencillísima: basta imaginar un triángulo esférico BAO, rectángulo en A, y formado por los arcos BO, proyección en la esfera celeste de la dirección de las ondas aéreas; AO, círculo vertical del astro, que se supone situado en O, y AB, arco del horizonte interceptado por los dos arcos precedentes AO y BO. En este triángulo, el ángulo BOA, contado en el mismo sentido que el azimut, es lo que hemos llamado γ, el lado AB representa á β, y AO es igual á la altura h. Con estas solas indicaciones puede el lector construir sin dificultad la figura, que por no creerla necesaria aquí, omitimos, y aplicar á este caso una de las fórmulas más usuales de la trigonometrfa esférica.

No merece menos atención en la práctica el sistema de ecuaciones (E), en lo posible adaptadas al cálculo numérico, que dimos en el artículo III para hallar la corrección $d\pi$ por movimiento propio del astro al ángulo de posición π observado. Como se recordará fueron éstas:

$$\left.\begin{aligned} \frac{v_0}{v} &= \sqrt{1 + \left(\frac{s}{v}\right)^2 + 2\left(\frac{s}{v}\right)\operatorname{sen}\pi} \\ v_0 &= \left(\frac{v_0}{v}\right) v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d\pi = \pi_0 - \pi &= \left(\frac{s}{v_0}\right)\frac{\cos\pi}{\operatorname{sen} 1^0} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (E)$$

Estas fórmulas fueron para nuestro uso particular desarrolladas en tres tablas: una, destinada á obtener la relación $\frac{s}{v}$ de la velocidad angular del astro s, procedente de

la rotación diurna y variable con la declinación, á la velocidad relativa v de la ondulación; otra tabla que con los argumentos $\frac{s}{v}$ y π contenía los valores de $\frac{v_0}{v}$ dados por la primera fórmula, siendo v_0 la velocidad absoluta de la ondulación, y, finalmente, la tercera tabla proporcionaba los valores de $d\pi$ ó $\pi_0 - \pi$ (π_0 = ángulo de posición verdadero), dados por la última ecuación (E) con los argumentos $\frac{s}{v_0}$ y π. Estas tres tablas eran aplicables, tanto á las observaciones del Sol como á las de la Luna; pero, más tarde, habiendo la experiencia demostrado la conveniencia de emplear, casi exclusivamente, para nuestro estudio el Sol, por sus especiales condiciones ventajosas, encontramos que el trabajo para la obtención de $d\pi$ podía en gran manera simplificarse, reduciéndolo al uso de una sola tabla, que es la que hemos copiado á continuación con el número III.

En efecto, dadas la lentitud del movimiento propio s del Sol, relativamente al v de las ondas aéreas y su pequeña variación durante el año, pudimos suponerla constante é igual á su valor medio, sin que tal hipótesis llegue á producir en la corrección $d\pi$ un error que exceda de 1°. Evitábase, obrando así, el uso de la tabla I indicada, y, además, teniendo siempre en cuenta la primera ecuación (E), era posible tomar para la tabla única que necesitábamos el argumento $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_0} \times \frac{v_0}{v}$, donde $\frac{1}{v}$ expresa el número de segundos de tiempo, observado directamente, que emplearía la ondulación que se estudia en recorrer el diámetro aparente del Sol. La tabla III de este Apéndice ha sido construída en estas condiciones, y los valores numéricos que exhibe tienen la aproximación requerida para el fin á que la destinamos.

Los meteorologistas suecos, Sres. Ekholm y Hagström, varias veces citados en esta Memoria, dedicáronse también,

en sus observaciones de los movimientos de las nubes, á investigar la velocidad *lineal* del viento á diferentes altitudes. He aquí como procedieron para determinarla.

Conocida la altitud lineal A de una nube, y llamando χ al movimiento angular de la misma durante un segundo, observado en el teodolito especial que estos señores empleaban; L al movimiento lineal que se busca, suponiéndole paralelo al horizonte, como suele hacerse; V á la velocidad *cenital* angular expresada en grados por segundo, y correspondiente á la velocidad lineal de L y á la altitud A, hallaban V y L por medio de las siguientes fórmulas:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang} \delta &= \cos \gamma \operatorname{cotang} h \\ \operatorname{tang} V &= \frac{\operatorname{sen} \chi}{\operatorname{sen} h \cos (\delta - \chi)} \\ L &= A \operatorname{tang} V \end{aligned}\right\} \ldots\ldots \qquad (6)$$

en las que δ es un ángulo auxiliar, cuyo valor está siempre comprendido entre $\pm 90^0$, y γ y h tienen la misma significación que anteriormente les dimos.

Si, como creemos haber demostrado, el método de las ondulaciones es capaz de dar á conocer la altitud en que éstas se originan, las precedentes fórmulas deben ser utilizables en el mismo método, una vez determinada en el anteojo la velocidad angular v de las ondas aéreas, por el número de segundos $\frac{1}{v}$ que éstas emplean en recorrer el diámetro solar aparente. Si á éste, que varía periódicamente un poco durante el año, le designamos por D, se podrá establecer la siguiente relación:

$$\chi = Dv \ldots\ldots \qquad (7)$$

que completa el sistema de ecuaciones necesarias para resolver el problema de que se trata.

Pongamos ahora, para finalizar, algunos ejemplos numéricos entresacados de nuestros cuadernos de observación, y con el fin de explanar el método que nos pareció más sencillo y adecuado para calcular sus resultados, comenzaremos por copiar íntegramente las que hicimos el día 10 de Febrero de 1900, por la mañana, dirigiendo al Sol la ecuatorial de Merz y proyectando su imagen en una pantalla, conforme en otro lugar indicamos. He aquí las series:

Veleta = SO (Calma). $(a) = 85°$; $(b) = 39°$ Veleta = SO (Brisa fuerte).

(71) a^1	(71) a^2	(71) a^3	(71) a^4	(71) a^5	(71) a^6	(71) a^7	(71) a^8	(20) b
($10^h\ 29^m$ á 31^m) $F = 0$: corta, m. b. definida. ($2i$ en 1^s)	(10 35 á 37) $F = 2$: como antes. ($2i$ en $1\ ^1/_2\ ^s$)	(10 38 á 40) $F = 5$: mezcla, b. def., algo difícil de observar.	(10 41 á 43) $F = 8$: larga, bien definida.	(10 44 á 46) $F = 12$: como antes.	(10 46 á 48) $F = 16$: como antes.	(10 49 á 51) $F = 22$: intermitente á ratos.	(10 56 á 58) $F = 30$: como antes. Obs.ª mejor en la normal.	(11 0 á 2) $F = 0$: larga, b. def., intermitente.
33°	24°	8°	352°	347°	333°	325°	327°	329°
24	22	7	359	347	341	330	317	321
33	23	7	357	344	333	325	323	324
26	25	15	358	344	342	329	329	320
33	27	18	354	345	341	328	324	329
31	24	16	357	349	338	333	326	323
Prom.° = 390	384	372	356	346	338	328	324	324
$-(a) = -85$	-85	-85	-85	-85	-85	-85	-85	$-(b) = -39$
$n = 305$	299	287	271	261	253	243	239	285

A $13^h\ 58^m$ obsérvanse directamente *cirros* procedentes del ONO (Veleta: viento OSO).

A este cuadro acompaña la siguiente nota: «Despejado en general: Ci. en el horizonte del tercer cuadrante, y pequeños Cu. en el del segundo. Corriente general y única, con amplia desviación directa. La corriente es fuerte en las altas regiones; en las bajas se debilita, sin extinguirse del todo.»

Fácil es de explicar la notación por brevedad empleada en las observaciones que hemos copiado, y que es la misma que tienen en el cuaderno original. Las letras *a* y *b* designan, respectivamente, el anteojo mayor y el buscador de la ecuatorial, y el exponente numérico que llevan, el orden de las series. Los números (71) y (20) indican el diámetro, en centímetros, de la imagen de Sol proyectada por cada anteojo en la pantalla: $(a) = 85^0$ y $(b) = 39^0$, son la graduación correspondiente al punto *cero* ó Norte, leída en los círculos de posición respectivos, y que han de restarse del promedio de las lecturas de cada serie. Al margen de éstas van, dispuestas en columna, unas anotaciones que señalan: primeramente, las horas del principio y fin de cada observación, tomadas de un reloj de bolsillo; luego, la letra *F*, significa la extensión focal empleada: así $F = 8$, quiere decir que el ocular se había sacado 8 milímetros de la posición que corresponde al foco principal; y $2i$ denota que en *n* segundos, la ondulación recorría los dos intervalos iguales, formados por tres hilos consecutivos del retículo. Cada intervalo vale próximamente tres minutos de arco; de manera que se puede tomar $2i = 6'$ sin error de gran transcendencia.

Resta, ahora, que presentemos unos cuantos modelos de la forma en que se hacía la corrección de las observaciones; á cuyo fin van á continuación dos series tomadas del cuadro precedente:

(71) a^2

Día 10 de Febrero de 1900.

$\delta = -14°$	$t = 10^h\,36^m$
	$m = 12\ \ 14$
$\pi = 299°$	$t - m = -1\ \ 38$
$d\pi = +\ 2$	$-r$ (Luna) $=$
$-p = +21$	$H =$
Suma $= 322 = y$	$h = 31°$
$\beta - \gamma = +16$	
$\beta = 338$	$\frac{1}{v} = 8^s$
$\alpha = -28$	
$\varphi = (310)$	

(71) a^8

Día 10 de Febrero.

$\delta = -14°$	$t = 10^h\,57^m$
	$m = 12\ \ 14$
$\pi = 239°$	$t - m = -\ 1\ \ 17$
$d\pi =$	$-r =$
$-p = +\ 17$	$H =$
Suma $= 256$	$h = 32°$
$\beta - \gamma = -\ 11$	
$\beta = 245$	$\frac{1}{v} =$
$\alpha = -\ 22$	
$\varphi = (223)$	

Las plantillas, como las precedentes, donde habían de colocarse los números en el orden debido para hacer el cálculo, estaban impresas de antemano, á fin de ahorrar trabajo y tiempo.

El orden de las operaciones, ya lo hemos indicado: con la fecha del día se busca en las efemérides astronómicas el tiempo medio ó medio día verdadero, m, que se resta del tiempo observado t, y la declinación δ del Sol. Con el horario $t - m$ y la declinación, se hallan en la tabla I la altura h, el aizmut α y el ángulo paraláctico p del astro. Hecho esto, y dispuestas estas tres cantidades en la forma que indican los adjuntos modelos, se determina γ, y en la tabla II se busca la diferencia $\beta - \gamma$, con lo cual y el azimut α se obtiene la dirección φ del viento. Si su velocidad hubiese podido ser determinada experimentalmente, como en el primer ejemplo, la tabla III daría la corrección $d\pi$ al ángulo observado π, y, por tanto, al γ.

La reducción de todas las series conduce á los siguientes principales resultados para las observaciones efectuadas el 10 de Febrero de 1900:

SERIES	Hora de la observación.	Extensión focal.	Altura del Sol.	Altitud de la corriente.	Dirección de la corriente.
a^1	$10^h\ 30^m$	0^{mm}	30°	?	313°
a^2	10 36	2	31	6.100^m	310
a^3	10 39	5	31	2.440	300
a^4	10 42	8	31	1.530	281
a^5	10 45	12	32	1.050	265
a^6	10 47	16	32	785	249
a^7	10 50	22	32	570	231
a^8	10 57	30	32	430	223
b	11 1	0	33	?	297

Veleta..... $SO = 225 (B^a)$

En estos números sólo llamaremos la atención sobre la brevedad del tiempo gastado en hacer el trabajo, que apenas demandó en totalidad cuarenta y cinco minutos, y acerca de la fuerte amplitud de la desviación progresiva, llamada por nosotros *directa*, que en toda la extensión de la atmósfera explorada ascendió á 90°. Nótese también que la dirección del viento, determinada con el buscador, está comprendida entre las extensiones focales 5 y 8 milímetros del anteojo mayor, y que la indicación de la veleta coincide con la obtenida por las ondulaciones en las capas inferiores de la atmósfera.

Utilizando, por último, el tiempo $\frac{1}{\nu} = 8^s$ que debía de tardar la ondulación en recorrer el diámetro del Sol en la segunda serie, dato que con la extensión focal 2^{mm}, corresponde á la altitud de la corriente aérea $= 6107$ metros, las fórmulas (6) y (7) dan en este caso, como puede comprobarse fácilmente, una velocidad lineal $L = 23$ metros por segundo ú 83 kilómetros por hora. Más arriba, á juzgar por la indicación $2i = 1^s$ observada en la primera serie, la velocidad es probable que fuera mucho mayor.

TABLA I. — Valores de la altura *h*, del azimut *α* y del ángulo paraláctico *p* del astro.

ÁNGULOS HORARIOS		ARGUMENTO HORIZONTAL: DECLINACIÓN												
		— 24°	— 22°	— 20°	— 18°	— 16°	— 14°	— 12°	— 10°	— 8°	— 6°	— 4°	— 2°	0°
1h 12m	*h*	23°	25°	27°	29°	31°	33°	35°	37°	39°	41°	43°	44°	46°
	α	18	18	19	20	20	21	22	22	23	24	25	26	27
	p	15	15	15	16	16	16	17	17	18	18	19	19	20
1 20	*h*	23	25	27	29	31	32	34	36	38	40	42	44	46
	α	20	20	21	22	22	23	24	25	26	26	27	28	29
	p	16	17	17	17	18	18	18	19	19	20	20	21	22
1 28	*h*	22	24	26	28	30	32	34	36	37	39	41	43	45
	α	22	22	23	24	25	25	26	27	28	29	30	31	32
	p	18	18	19	19	19	20	20	21	21	22	22	23	24
1 36	*h*	22	24	26	27	29	31	33	35	37	39	40	42	44
	α	24	24	25	26	27	27	28	29	30	31	32	34	35
	p	19	20	20	20	21	21	22	22	23	23	24	25	26
1 44	*h*	21	23	25	27	29	30	32	34	36	38	40	41	43
	α	25	26	27	28	29	30	30	31	32	33	35	36	37
	p	21	21	22	22	22	23	23	24	24	25	26	27	28
1 52	*h*	20	22	24	26	28	30	31	33	35	37	39	40	42
	α	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
	p	22	23	23	23	24	24	25	25	26	27	27	28	29

h es siempre positivo, y *α* y *p* tienen el mismo signo: + cuando el ángulo horario es occidental y — cuando es oriental.

TABLA II. — Valores de la corrección $\beta-\gamma$, para la reducción al horizonte de los ángulos observados γ.

$\beta-\gamma$	ARGUMENTO HORIZONTAL: $\gamma = \pi + d\pi - p$															
—	0°	6°	12°	18°	24°	30°	36°	42°	48°	54°	60°	66°	72°	78°	84°	90°
+	180	174	168	162	156	150	144	138	132	126	120	114	108	102	96	90
—	180	186	192	198	204	210	216	222	228	234	240	246	252	258	264	270
+	360	354	348	342	336	330	324	318	312	306	300	294	288	282	276	270
h	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$	$\beta-\gamma$
20°	0°	4°	8°	12°	15°	19°	22°	25°	27°	29°	29°	28°	26°	20°	11°	0°
24	0	4	7	10	14	17	20	22	24	25	25	24	21	16	9	0
28	0	3	6	9	12	15	17	19	20	21	21	19	17	12	7	0
33	0	3	5	8	10	13	14	16	17	17	17	15	13	9	5	0
39	0	2	4	6	8	10	11	12	13	13	13	11	9	7	4	0
45	0	2	3	5	7	8	9	10	10	10	9	8	7	5	2	0
55	0	1	2	3	4	5	5	6	6	6	5	5	4	3	1	0
65	0	1	1	2	2	2	3	3	3	3	2	2	2	1	1	0
75	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0

Los valores de $\beta-\gamma$ tienen el signo indicado para cada línea de argumentos horizontales en la columna primera superior $\beta-\gamma$.

TÁBLA III. — Valores de $\pi_0 - \pi = d\,\pi$ (Corrección por movimiento propio del astro).

SIGNO	ARGUMENTO HORIZONTAL : π. (El signo de $\pi_0 - \pi$ será + en el primer renglón del argumento, y — en el segundo).															
+	270°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	15°	0°	345°	330°	320°	310°	300°	290°	280°
—	90	100	110	120	130	140	150	165	180	195	210	220	230	240	250	260
$\frac{1}{v}$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$	$\pi_0 - \pi$
0s	0,00	0,00	0,00	0 00	0,00	0,00	0 00	0,00	0,00	0,00	0,00	0 00	0,00	0,00	0 00	0 00
3	0, 0	0, 2	0, 4	0, 6	0 8	1, 0	1 1	1 2	1. 3	1 2	1, 1	1 0	0, 8	0 7	0 4	0, 2
6	0, 0	0 4	0, 9	1 3	1, 5	1, 9	2 1	2, 4	2 5	2 4	2. 2	2 0	1, 7	1, 3	0, 9	0, 5
9	0, 0	0, 6	1 2	1 8	2, 3	2, 8	3 2	3, 6	3, 8	3 7	3, 3	3, 0	2, 5	2 0	1, 4	0, 8
12	0. 0	0 8	1, 6	2, 3	3, 0	3 7	4, 3	4, 7	5 0	4 9	4, 5	4, 1	3 5	2, 7	1 9	1 0
15	0, 0	1, 0	2 0	2, 9	3, 7	4 6	5 3	5, 9	6 3	6 2	5 8	5. 2	4, 5	3, 5	2 5	1 3
18	0 0	1 2	2 3	3, 4	4 4	5, 3	6, 2	7. 0	7 5	7 5	7, 0	6 3	5, 4	4, 2	3, 0	1 5
21	0, 0	1, 4	2. 7	3 9	5, 1	6, 1	7, 2	8, 2	8 8	8 9	8 3	7, 5	6, 5	5, 1	3 6	1, 8
24	0, 0	1 5	3, 0	4 4	5, 7	6, 9	8, 1	9, 2	10, 0	10 1	9, 5	8, 7	7 5	6, 0	4, 1	2, 2

El argumento vertical $\frac{1}{v}$ representa el número de segundos de tiempo que la ondulación ó la nube tarda en recorrer el el diámetro del astro.

VIII.—Consideraciones acerca de algunos métodos empleados en el análisis de las aguas minerales.

Por José Casares Gil.

La obra clásica que sirve de guía, en general, para los análisis de las aguas minerales, es la de Fresenius. Especialmente el tomo dedicado al análisis cuantitativo, contiene una marcha que, con pocas modificaciones, sirve todavía de base en la mayor parte de las investigaciones de este género. La muerte de Fresenius ha impedido la publicación de nuevas ediciones corregidas de su importante libro, limitándose únicamente á reimpresiones, y de aquí que en muchos casos resulten los procedimientos que describe anticuados y puedan ser sustituídos por otros de ejecución más fácil y de resultados más exactos.

No habiéndose publicado en español muchos de estos métodos, y encontrándose la mayoría de ellos dispersos en Revistas y Memorias analíticas, considero útil describir aquí aquellos que mis ensayos han comprobado y sobre los cuales he formado juicio, incluyendo las modificaciones que la experiencia me indicó que podían hacerse con ventaja.

Litio. — La investigación cualitativa del litio es muy fácil en gran número de aguas minerales que contienen esta substancia, en proporciones relativamente considerables. Basta tomar una gota del líquido con el hilo de platino, introducirla directamente en la llama del mechero de Bunsen y examinar la llama con el espectroscopio para ver aparecer la raya roja característica. Las aguas de Caldas de Reyes, Lugo, Sousas y Caldeliñas, Fuente Nueva de Verín, Cabreiroa, Mondáriz, Guitiriz, La Toja, Carballino. Cuntis, etc., ofrecen

esta particularidad. En general, el litio se descubre fácilmente en la mayor parte de las aguas minerales de Galicia y regiones análogas, en las que abunda mucho la mica, silicato que, conforme es sabido, contiene litio entre sus elementos.

Cuando el agua mineral que se ensaya es muy rica de sales sódicas, por ejemplo, las aguas de La Toja, da excelente resultado interponer delante de la hendidura del espectroscopio una disolución débil de permanganato potásico que no deja pasar las radiaciones amarillas y permite el paso franco de las rojas del litio. La concentración de la solución debe ser proporcionada á la cantidad de sodio.

En otras aguas minerales el litio no se descubre tan fácilmente. Para encontrarlo es necesario separar algunos elementos ó concentrar mucho los líquidos, ó examinar directamente el residuo de la evaporación. Uno de los medios que empleo con excelentes resultados, consiste en concentrar uno ó dos litros del agua mineral y tratar el residuo primero por ácido clorhídrico fumante, al cual se le agrega después alcohol concentrado; filtrar el líquido y evaporarlo en el baño de María. El nuevo residuo ofrece en general la raya del litio con gran limpieza.

Por el tratamiento con ácido clorhídrico fumante, se separan excesos grandes de cloruros alcalinos que son insolubles en dicho líquido. La adición de alcohol precipita algunas sales, y permite filtrar por papel el ácido clorhídrico fumante.

En aquellas aguas minerales en que abundan las sales de calcio y de magnesio, es á veces necesario concentrar bastante el líquido, precipitar la sal por el oxalato amónico, filtrar, calcinar, agotar el residuo por agua, acidular con ácido clorhídrico y seguir el anterior tratamiento.

También da excelente resultado el método anterior para la determinación cuantitativa del litio. Se sigue primero la marcha general que tiene por fin obtener los cloruros alcali-

nos suficientemente puros, y cuando, como sucede muchas veces, la cantidad de cloruro sódico es excesivamente grande, se separa la mayor parte por la acción del ácido clorhídrico-fumante y el alcohol absoluto.

Este método de separar los cloruros alcalinos y obtener el líquido concentrado, en el cual se determina el litio, lo considero preferible al procedimiento de Fresenius, fundado en agotar por alcohol de 90 la masa pastosa obtenida evaporando gran cantidad de agua. La experiencia demuestra que en este residuo el cloruro sódico está cristalizado, y sin duda el alcohol no puede penetrar en el interior de los cristales, así es que no se consigue obtener un residuo exento de litio, aun á pesar de numerosos tratamientos.

Respecto de los métodos empleados para la determinación cuantitativa, tanto el de Rammelsberger como el de Gooch, los considero preferibles al corriente, fundado en precipitar el litio en estado de fosfato. En el método de Rammelsberger, el cloruro litio se extrae tratando los cloruros desecados á 180° por una mezcla de éter anhidro y alcohol absoluto; en el de Gooch se utiliza la propiedad que tiene el alcohol amílico de disolver fácilmente el cloruro lítico, y muy poco los cloruros potásico y sódico. El método de Gooch es quizá el mejor, pero el manejo del alcohol amílico muy poco agradable.

Cannizzaro ha propuesto un procedimiento para determinar el litio mediante el espectroscopio, que me parece muy poco exacto. El procedimiento de Carnot, fundado en la formación de fluoruro de litio, es también, según Walter, poco preciso. En realidad la determinación rigurosa de las cantidades de litio que existen en las aguas minerales ofrece, hoy por hoy, grandes dificultades.

Cesio y Rubidio.—Estos cuerpos, interesantes por su rareza y que ofrecen un espectro característico, se encuentran con mucha frecuencia en las aguas minerales de los terrenos graníticos. Seguramente los contienen todas las aguas sulfu-

rosas y bicarbonatas que hay en Galicia. Se cree ordinariamente que para encontrar estos cuerpos es necesario evaporar, por lo menos, 100 litros de agua, y en muchos casos no es necesario. Así, por ejemplo, las aguas de Caldas de Reyes (Pontevedra), contienen estos elementos en proporción suficiente para que en 8 litros se puedan ver claramente las rayas espectrales características.

El procedimiento cómodo que puede usarse en aguas semejantes á la mencionada, que apenas contienen sales térreas, consiste en evaporar 8 litros del agua acidulada con ácido clorhídrico hasta sequedad; eliminar la sílice con el ácido clorhídrico; evaporar de nuevo hasta sequedad y continuar como se dijo al hablar del litio. Después de practicar una ó dos veces el tratamiento con ácido clorhídrico fumante y alcohol absoluto, se disuelve en poca agua el resíduo y se precipita el líquido con el cloruro platínico.

El precipitado de cloruro platínico se lava con agua y siguiendo el método de Bunsen, descrito por Fresenius en el Análisis cualitativo, se examina con el espectroscopio. Se perciben así principalmente las rayas azules correspondientes á los elementos cesio y rubidio al mismo tiempo que la roja del litio y las rojas y violeta del potasio, que nunca faltan como compañeros.

Potasio. - El mejor procedimiento para determinar y buscar el potasio es el empleo del cloruro platínico. En algunas aguas, por ejemplo en las de La Toja, el potasio se percibe fácilmente sin más que introducir en la llama una gota del agua é interponer delante de la hendidura del espectroscopio un tubo de ensayo con una disolución de permanganato potásico de concentración apropiada. Se descubre entonces la raya roja del potasio.

La determinación del potásico ofrece dificultades en algunas aguas minerales excesivamente ricas en sales sódicas, por ejemplo, en las aguas de Rubinat. Es necesario, entonces, eliminarlas en su mayor parte, lo que se consigue ha-

ciendo pasar durante largo tiempo una corriente de ácido clorhídrico gaseoso, que precipita cloruro sódico. Libres así de la gran cantidad de sales sódicas, se evaporan las aguas hasta sequedad; se disuelve el residuo en agua y ácido clorhídrico y se precipita directamente con cloruro platínico y alcohol.

El precipitado se lava con una mezcla de alcohol y éter; se disuelve en agua y se repite la precipitación con cloruro platínico, y loción con alcohol y éter. El precipitado finalmente obtenido se deseca, se humedece con agua caliente y se añade una gota de mercurio puro, agitando hasta que el líquido sea incoloro. Se evapora todo hasta sequedad; se agota por agua caliente y del peso del platino que queda como residuo, se deduce el del potasio.

Bario y Estroncio.—También se encuentran estos elementos en muchas aguas: el estroncio, en especial, se descubre fácilmente. Basta para ello aplicar el método de Engelbart. Se trata (directamente ó previa concentración) por exalato amónico bastante cantidad de agua, á fin de obtener un precipitado de oxalatos de algunos centigramos, y el precipitado se calcina fuertemente. Se añade entonces un poco de agua; se filtra y se evapora el líquido hasta sequedad. Se disuelve el residuo en unas gotas de ácido clorhídrico diluido, y la disolución, así obtenida, se examina con el espectroscopio. La raya azul que se percibe, caracteriza completamente el estroncio.

Este elemento es muy abundante en las aguas minerales. Le he encontrado en todas cuantas he analizado cuidadosamente, y me inclino á creer que se halla siempre acompañando al calcio.

La determinación cuantitativa del estroncio se practica transformando en nitratos los oxalatos térreos; desecando dichas sales completamente á 180° y empleando una mezcla de alcohol absoluto y éter para separarlos. La mezcla alcohólico etérea disuelve el nitrato cálcico y deja como residuo

el nitrato estróncico. El método es bueno, pero de aplicación delicada.

Manganeso.—En varias aguas minerales de la provincia de Gerona abunda este elemento, y su proporción es superior á la del hierro. Estas aguas son bicarbonatado cálcicas, generalmente muy mineralizadas y algunas sumamente ricas de anhidrido carbónico, como sucede á las llamadas de la Fuente de la Pólvora (Gerona). El manganeso en estos manantiales se descubre sin más que acidular con ácido nítrico y hervir durante bastante tiempo con bióxido de plomo. Dejando depositar el líquido, se percibe la coloración roja característica. Estas aguas contienen pequeñas cantidades de cloruros.

Al repetir el experimento con las botellas del agua de la Fuente de la Pólvora que hay en el comercio, se obtiene á veces resultado negativo. Esto es debido á que, si no han estado bien conservadas y por cualquier circunstancia han perdido anhídrido carbónico, el manganeso se precipita al estado de carbonato manganoso básico, formando costras blancas que se adhieren fuertemente á la botella. El precipitado de manganeso no da la reacción; pero las costras blancas disueltas en ácido nítrico y hervidas con bióxido de plomo, producen color rojo intenso.

Las aguas del tipo de la Fuente de la Pólvora, cuando se concentran, forman abundante sedimento de carbonatos térreos, los cuales, si se separan en cantidad algo notable, tienen color pardo-rojizo que por su simple aspecto se diferencia claramente del que originan las aguas ferruginosas.

El manganeso acompaña casi siempre al hierro. En algunas aguas existe, sin embargo, en muy pequeña cantidad, y su determinación ofrece notables dificultades. El método que sigo en estos casos es el colorimétrico, fundado, como es sabido, en comparar la coloración roja obtenida por el ácido nítrico y el bióxido de plomo con la de una disolución de permanganato potásico de riqueza conocida.

Arsénico. — Este cuerpo es, sin duda alguna, más frecuente en las aguas de lo que antes se creía. Según mis investigaciones, se encuentra en muchos de los manantiales de Galicia que dejan sedimentos rojizos, aun cuando no sean de las aguas incluídas en el grupo de las ferruginosas. Así se halla el arséníco en las aguas alcalinas de Sousas y Caldeliñas, en las de Fuente Nueva de Verín, en las de Cabreiroa, en las de La Toja, etc. Como las piritas ferruginosas abundan en muchas regiones de Galicia, y casi siempre tienen indicios de arsénico, al mineralizarse las aguas disuelven dicho elemento simultáneamente con el hierro. El mispiquel es, además, mineral abundante en Galicia, y no debe extrañar que las aguas que pasan por terrenos en que existe la pirita arsenical contengan arsénico.

Naturalmente, la cantidad de arsénico que el agua contiene disuelto es mínima. Pero hay, sin embargo, procedimientos fáciles para descubrir su presencia. Lo más conocido es recoger el sedimento rojizo que el agua va depositando por los terrenos que recorre ó el que se precipita en los pozos que la contienen. Estos sedimentos se disuelven en ácido clorhídrico fumante; se filtra el líquido por lana de vidrio ó amianto, ó simplemente se decanta, y se añade á la disolución bastante reactivo Bettendorff para que el color rojizo desaparezca completamente y el líquido resulte incoloro ó con tinte verdoso ó amarillento muy débil. Se observa entonces, al cabo de cierto tiempo, que la mezcla se obscurece y acaba por enturbiarse, depositando un sedimento rojizo, que es arsénico.

Pueden también descubrirse cantidades muy pequeñas del mismo en las aguas acudiendo á la propiedad que se funda en destilar el tricloruro de arsénico. Este método permite extraer el arsénico de porciones notables de sedimento. Para ello se disuelve en ácido clorhídrico fumante una cantidad notable del sedimento, se añade cloruro ferroso puro, es decir, exento de arsénico, se satura el líquido de ácido clorhí-

drico fumante y se destila en corriente de ácido clorhídrico. En el producto destilado se halla el tricloruro de arsénico, y haciendo pasar una corriente de hidrógeno sulfurado se precipita el trisulfuro, con el cual se pueden hacer las reacciones que le caracterizan, sin duda alguna; por ejemplo, el ensayo con el cianuro potásico y el carbonato sódico. Con este método descubrí el arsénico en los sedimentos ferruginosos de las aguas de La Toja.

Otro procedimiento consiste en disolver el sedimento en ácido sulfúrico é introducir la disolución en un tubo de ensayo que contiene un poco de cinc puro. Se añade después una gota de sulfato cúprico para favorecer la reacción, y el hidrógeno que se desprende se hace pasar á través de un papel de filtro humedecido con nitrato argéntico. La presencia de una mancha amarilla ó negruzca demuestra la existencia del arsénico. El aparatito que uso para estos ensayos es una modificación sencilla del de Treadwell.

Cuando se trata de buscar indicios de arsénico en una gran cantidad de agua; lo mejor es añadir un poco de cloruro férrico puro y precipitar el hierro con carbonato cálcico. Si se sospecha que el arsénico se encuentra al mínimo de oxidación, se añade primero agua de cloro antes del cloruro férrico. El sedimento de hidrato férrico arrastra consigo el arsénico, y disolviéndolo en ácido clorhídrico fumante, se puede después separar el arsénico por el precedimiento de destilación antes indicado.

Bromo y iodo.—En varias aguas españolas, estos elementos se hallan en tal cantidad, que se descubren directamente, por ejemplo, en las agua de Tona (Cataluña). En las de Alceda y Ontaneda (Santander) se investiga también el iodo por el procedimiento siguiente.

Se concentran dos litros de agua, previamente alcalinizada con carbonato sódico, hasta un volumen de 100^{cc}. Líquido y sedimento se pasan á una campana estrecha; se deja depositar el sedimento varias horas y se decanta el líquido claro

que sobrenada. Acidulado este líquido con ácido sulfúrico diluído, añadiendo después unas gotas de cloroformo y, finalmente, una gota de ácido sulfúrico con vapores nitrosos, la coloración violácea que toma el cloroformo demuestra con completa certeza la existencia del iodo.

La determinación cuantitativa del bromo y del iodo en las aguas ofrece notables dificultades, especialmente en las que contienen muy pequeñas cantidades. He hecho numerosos ensayos con los métodos de Weszeleszky (*) sin haber podido llegar á dar á sus procedimientos la confianza necesaria, y así pienso que en muchos casos no puede prescindirse de los agotamientos alcohólicos que Fresenius propone. En aguas minerales del tipo de las Tona pueden aplicarse con éxito los procedimientos de Jannasch, descritos en su libro Praktischer Leitfaden der Gewichtanalyse.

Acido sulfúrico.—En algunas aguas existe el ácido sulfúrico en cantidad inapreciable, por ejemplo, en las aguas de Cabreiroa (Verín). Las aguas directamente no se enturbian con el cloruro bárico previa adición de ácido clorhídrico. Para buscarlo y determinarlo cuantitativamente, al mismo tiempo, concentré dos litros hasta pequeño volumen; acidulé con ácido clorhídrico; separé la sílice y en los líquidos filtrados precipité el ácido sulfúrico. Los resultados obtenidos indicaban algunos centígramos de ácido por litro, lo cual no podía ser cierto, pues, en esa proporción las sales báricas descubrirían directamente el ácido en el agua. La causa del error fué bien fácil de descubrir. El ácido sulfúrico provenía de los productos de la combustión del gas del alumbrado, entre los cuales hay compuestos de azufre que al quemarse forman anhídrido sulfuroso, que después pasa á ácido sulfúrico ó quizá ya directamente ácido sulfúrico. La observación por mí hecha no era nueva y se encuentra señalada por varios autores.

(*) Weszeleszky-*Zeitchrift für Analy Chem.*, 1900, t. 39, p. 81.

FLUOR.—Desde el año 1896 he examinado muchas aguas minerales, adquiriendo la certeza de las suposiciones que entonces hice. El fluor abunda mucho en las aguas minerales de terrenos graniticos, especialmente en las sulfurosas. También se encuentra el fluor en las aguas de terrenos volcánicos, como tuve ocasión de comprobar examinando las de los Geysers del Yellowston, Park (*). El procedimiento que sigo para buscarlo cualitativamente es el que he descrito antes de ahora. Considero de importancia la confirmación del flour por el examen de los cristales de hidro fluosilicato-bárico. La forma de estos cristales los caracteriza, y mucho más si á ella se une su insolubilidad en el ácido clorhídrico. Para la investigación del fluor bastan ordinariamente de dos á cuatro litros de agua.

(*) *Zeitsch für Analy Chemie*, XLIV-1905-729,

IX.—Observaciones morfológicas sobre la sangre de Llama (Auchenia Lama).

Por Gustavo Pittaluga.

Una Memoria publicada en 1906 por U. Biffi (1), ya Director del Instituto de Higiene de Lima (Perú), ha sido el punto de partida de este breve estudio sobre la sangre de un Llama *(Auchenia Lama),* que el propietario del parque zoológico del Retiro, de Madrid, Sr. Cavanna, puso con gran amabilidad—que le agradecemos—á nuestra disposición.

Las observaciones que forman objeto de la presente nota, han sido llevadas á cabo con la cooperación del Dr. Rodríguez Illera, ayudante de la Subsección de Parasitología del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII, en preparaciones de sangre del Llama en cuestión (♂ adulto), extraída por punción de una vena en los días 13 y 19 de Febrero de este año.

***

El Llama *(Auchenia Lama),* tilópodo indígena de las altas mesetas del Perú y de la Bolivia, pertenece á la misma familia (Camelidae), del *Camelus bactrianus* y del *Camelus dromedarius,* y ofrece, como ellos, la particularidad— singular entre los mamíferos—de la forma ovoidea de los hematies. Pero además de éste, otros caracteres son peculiares de la sangre del Llama, y por los datos, todavía muy escasos que de ellos poseemos, merecen, desde luego, nuevas y repetidas investigaciones.

Adaptados á la vida en las grandes alturas de los Andes, en atmósfera rarefacta, necesítan estos rumiantes desarrollar, como compensación para los cambios respiratorios, una gran superficie de campo de oxidación y, por tanto, un número enorme de hematies.

El hecho había sido observado ya por HAYEM (2), que en sus clásicos estudios sobre la sangre había dado las cifras siguientes, resultado medio de la cuenta de glóbulos en un Llama del Jardín zoológico de París:

Hematies.....	—	13.186.000	por milímetro cúbico.
Leucocitos.....	—	8.000	» » »

Los datos reunidos por BIFFI en el trabajo antes citado y en otro publicado con RIBEYRO (3) confirman en conjunto estos de HAYEM, pudiendo establecerse á consecuencia de numerosos recuentos (con cuentaglóbulos de THOMA-ZEISS) un promedio de:

11.545.600	Hematies	por milímetro cúbico.
10.740	Leucocitos	» » »

Resultaba de estas observaciones una desproporción evidente entre el número de hematies y el número de leucocitos en relación con las cifras correspondientes en el hombre y en la casi totalidad de los mamíferos. En éstos, en efecto, la proporción puede formularse, aproximadamente, del siguiente modo: un leucocito por 500 hematies. En cambio, la sangre de Llama contiene, según las cifras anteriores (BIFFI) un leucocito por 1.075 hematies (en condiciones normales).

A pesar de ello, las observaciones de BIFFI y RIBEYRO no habían logrado poner de relieve diferencia morfológica alguna entre los glóbulos blancos (leucocitos) de la sangre de Llama y los de la sangre humana y de los mamíferos superiores. «*I leucociti si presentano assai scarsi in una comune preparazione di sangue* dice exactamente BIFFI en la Memoria citada (4)—*e non mostrano, a fresco, per la forma,*

per la grandezza, pei il nucleo e per le granulazioni del protoplasma alcuna spiccata differenza da quelli del sangue umano.»

En preparaciones teñidas—(con Hematoxilina-Eosina, con el método de ZIEHMANN y con el método de LEISHMAN)—pudo observar BIFFI, y pone de relieve en su trabajo, la existencia de algunos leucocitos eosinófilos con granulaciones irregulares, menos numerosas que las que llenan el citoplasma de los eosinófilos humanos, aunque dotadas al parecer de igual afinidad para el colorante, de igual grado de oxifilia. Notó además que los leucocitos polinucleares neutrófilos contienen con frecuencia de tres á cinco pequeños núcleos enteramente separados el uno del otro, sin puentes intermedios, como acontece en los llamados polinucleares humanos. Los grandes mononucleares, y con menor frecuencia los pequeños, presentan á veces en el protoplasma granulaciones redondas de varias dimensiones, que se tiñen en rojo-violeta brillante con el método de LEISHMAN y en violeta obscuro con el de ZIEHMANN. Estas granulaciones son en todo parecidas á las descritas en los mononucleares de la sangre humana con el nombre de «azurgranula» por MICHAELIS y WOLFF (5); pero se hallan en mayor número y tienen dimensiones mucho mayores. Se encuentran también, según BIFFI, en la sangre de Llama, rarísimas células cebadas (*mastzellen*) y numerosas formas de transición.

Tales son los datos expuestos por este autor, además de los que se refieren á los caracteres físico-químicos de la sangre, acerca de los cuales no hemos de detenernos en la presente nota.

Nuestro objeto fué el de cerciorarnos, con el estudio de numerosas preparaciones, de las formas y variedades leucocitarias que se hallasen en la sangre de Llama, pareciéndonos *à priori* muy singular el hecho afirmado por los precedentes observadores, esto es, que á pesar de la enorme desproporción entre la cantidad de hematies y la de leucocitos con

relación á las de la sangre humana, el aspecto y la estructura citológica de las distintas formas de leucocitos correspondiese enteramente, sin diferencia apenas, á la de los leucocitos contenidos en la sangre humana y de mamíferos cuyas condiciones de constitución y equilibrio hemático tanto se alejan de las del Llama.

Al propio tiempo, otra cuestión interesante llamaba nuestra atención. Me refiero á la de la fina estructura del glóbulo rojo y de la persistencia de restos nucleares en los hematies de los mamíferos. Sabido es que en estos últimos años, y á consecuencia de los trabajos de ISRAEL y PAPPENHEIM (6), de GABRITCHEWSKY (7), de ASKANAZY (8), de EHRLICH y algunos de sus discípulos (9), de SCHMIDT (10), SCHWALBE y SOLLEY (11), STENGEL, WHITHE y PEPPER (12), de LÖWIT, BÖTTECHER y BRANDT, LILIENFELD, WOLDRIDGE, BOTTAZZI y CAPPELLI, MAXIMOW (13), DOMINICI (14), y muy especialmente de ARNOLD y sus discípulos (15), de FOÁ y CESARIS DEMEL (16), PETRONE (17), GIGLIO TOS (18), NEGRI (19), JOLLY (20), LELIÉVRE y RETTERER (21), RUCIZKA (22), ha sido objeto de vivos debates entre los histólogos la existencia de una supuesta red ó de granulaciones, vestigios de la cromatina nuclear en el estroma de los hematies de mamíferos adultos, y la interpretación de los fenómenos de policromatofilia, de basofilia, etc., en los hematies, y más aún de la misma constitución del estroma globular en su totalidad. Considérese, pues, el interés que podria ofrecer una investigación acerca de este problema en un mamífero como el Llama, que presenta la particularidad de que sus glóbulos rojos no son solamente elípticos, como los de los *Camelidae* en general, sino además biconvexos, contrariamente á lo que acontece en las demás especies de la misma familia *(C. dromedarius, C. bactrianus)*. La forma biconvexa de los hematies de Llama bien podía hacer sospechar *à priori* la existencia de un núcleo, ó cuando menos estar en relación con la persistencia de importantes restos de una estructura nuclear que

hubieran aclarado considerablemente el problema de la estructura de los hematies de los mamíferos en general. Podía pensarse, además, que por la misma necesidad de la rápida sustitución ó renovación de una amplia superficie respiratoria por las condiciones especiales del ambiente en que viven estos animales, el proceso hematopoiético, que en los demás mamíferos se desarrolla en su totalidad fuera de los territorios vasculares—medula de los huesos—, se presentase en el Llama constantemente con su último período en el torrente circulatorio, de tal suerte que los hematies nucleados (eritrocitos) constituyesen en esta especie los elementos morfológicos normales de la sangre circulante.

Para contribuir en lo posible al esclarecimiento de estas dos cuestiones, se sometieron unas preparaciones de sangre al examen directo en fresco, otras á diferentes procedimientos de fijación y coloración para su estudio ulterior, y, por fin, se intentó aplicar el método descrito y adoptado por NEGRI, en sus interesantes estudios sobre la substancia cromatófila de los hematies de vertebrados inferiores y de embriones de mamíferos, con soluciones acuosas, fisiológicas (0,75 por 100 de NaCl), al 1 por 100 de Rojo neutro (Neutralroth, GRUBLER).

*
* *

Examen directo, en fresco.—Los glóbulos rojos aparecen, al examen directo, como pequeños cuerpos elípticos, de contornos netos y lisos, de color casi igual al de los hematies humanos, apiñados los unos sobre los otros, pero sin estabilidad ninguna y sin constituir columnas ó pilas, como acontece con los de los mamíferos superiores, y particularmente del hombre. La falta de esta disposición se halla perfectamente justificada, según puso de relieve por primera vez BIFFI, por la forma biconvexa de los mismos glóbulos,

y, quizás, también, por una menor viscosidad de sus superficies y especiales condiciones físico-químicas del plasma (cuyo peso específico es relativamente muy bajo).

Las dimensiones de los hematies de Llama en la sangre periférica, ó, mejor dicho, en la sangre apenas extraída de los vasos periféricos, están comprendidas, según nuestras observaciones (ocular micrométr. Zeiss, número 3), entre 8 y 14 μ de largo (eje mayor), 4 $^1/_2$ y 7 μ de ancho (eje transversal), y aproximadamente 1 $^1/_2$ á 2 $^1/_2$ μ de espesor (en el centro). Estas dimensiones difieren en algo de las observadas por Biffi, el cual obtuvo cifras menores, esto es, 4 á 6 μ de ancho, 7 á 12 μ de largo, y 1 á 2 μ de espesor.

En conjunto, en la sangre del Llama por nosotros observado, se encontraban numerosos glóbulos rojos de dimensiones superiores á la normal; casi todos ellos tenían un aspecto aplastado, es decir, que las dos superficies convexas que determinan el espesor del hematie, aparecían en el punto central más acercadas la una á la otra, casi aplanadas.

Es muy posible que la frecuencia de hematies con este aspecto esté en relación con un estado ligeramente anormal en la vida de estos animales, que realmente en los parques zoológicos de nuestras ciudades se hallan —como hacía notar Biffi á propósito de la misma ciudad de Lima (Perú)— muy alejados de las condiciones de su ambiente natural (*).

Al examen directo, en fresco, no se aprecia en absoluto en el interior de los hematies ninguna apariencia de formación nuclear. Salvo las ligeras diferencias de tono debidas á la hemoglobina, la refringencia uniforme de toda la masa del glóbulo, aun observado en adecuadas condiciones de iluminación y con grandes aumentos, impide percibir detalles de

---

(*) Nótese que, sin embargo, el clima y la situación geográfica de Madrid (á 650 metros s. n. m.), no son muy desfavorables á la vida de los Llamas en comparación con otros (Hambourg, Berlín), en que viven algunos ejemplares de la especie.

estructura y diferenciación de partes en el estroma globular.

Añadiendo á la gota de sangre, para su examen en fresco, una gota de solución 1 por 100 de Azul de Metileno carbonatado, ó mejor de una solución preparada, según la fórmula siguiente:

Azul de Metileno crist. L. Meister...	gramos	0,20
Carbonato sódico.....	»	0,30
Agua destilada.....	»	100,—

se observan al cabo de una media hora algunos hematies teñidos en verde-azulado, casi uniformemente, aunque á veces se aprecian motas de más intensa impregnación, puntos ó zonas de color más obscuro. Hay, pues, algunos hematíes basófilos, y éstos son generalmente de los más pequeños, no superando casi nunca los 8 $\mu \times 4\ \mu \times 1\ \mu$. Los demás conservan en el menstruo colorante el aspecto propio de la sangre examinada directamente en fresco, refractarios, al parecer, aun á las dos ó tres horas (manteniendo las preparaciones en cámara húmeda), á toda impregnación por el color básico. Nunca hemos podido poner de relieve en el interior de los hematies una red ó una disposición parecida á la que con el mismo Azul de Metileno ó con el Azul polícromo de Unna, se observa algunas veces en los hematies de otros mamíferos, y que nosotros hemos visto con frecuencia en los glóbulos rojos de la sangre de cobayas, al emprender una serie de investigaciones sobre los llamados «Cuerpos de Kurloff».

Debemos, pues, confirmar acerca de ello las conclusiones de Biffi, declarando que los hematies de Llama *no contienen, al parecer, un núcleo ni vestigios de una formación nuclear.* En efecto, la basofilia de algunos hematies, á pesar de las opiniones sostenidas por algunos histólogos, no es un dato, ni remotamente suficiente, para hacernos pensar en la persistencia de substancias nucleares esparcidas en el estroma globular.

Biffi ha observado en la sangre de Llama algunos elementos que describe como muy parecidos á los normoblastos de la sangre humana, y que interpreta, por tanto, como hematies nucleados. Nosotros, al examen en fresco, no hemos visto ninguna de estas formas. Al examen de preparaciones teñidas (Hematoxilina-Eosina), según se dirá más adelante, se encuentran en cambio formas muy parecidas á las que Biffi describe como hematies nucleados, cuando dice (página 566, l. c.): «Nelle preparazioni colorate la loro zona protoplasmatica assume avidamente i colori cosidetti acidi, mentre il nucleo si tinge facilmente e intensamente coi colori básici; la sua struttura e piuttosto uniforme, il retícolo cromático poco evidente. Non esiste nucleolo.» La figura 21, en la lámina que acompaña la presente Nota, reproduce una de estas formas, cuyas dimensiones son aproximadamente las de un linfocito (fig. 20), y que sin duda alguna, se confunden por completo con los linfocitos al examen directo en fresco; el borde citoplásmico intensamente eosinófilo las distingue en cambio de aquéllos en las preparaciones teñidas. ¿Se trata realmente de hematies nucleados, ó bien de una variedad leucocitaria? Yo me inclino, desde luego, por esta segunda interpretación: en primer lugar, porque su aspecto es totalmente esférico, cuando los hematies son elípticos: en segundo lugar, porque, aun siendo muy posible que el glóbulo rojo nucleado de Llama tuviese forma esférica y adquiriese posteriormente su aspecto normal elíptico, el borde ó zona citoplásmica que rodea al núcleo aparecería al examen en fresco, teñido en un tono más ó menos ténue con el color de la hemoglobina, cosa que acontece constantemente con los eritrocitos de todos los vertebrados, ya á partir desde su misma formación en los cordones de Wolff, y, por tanto, se distinguiría del citoplasma, absolutamente incoloro, de los linfocitos.

Al examen directo en fresco se distinguen con relativa facilidad, en la sangre de Llama, las variedades leucocita-

rias: *linfocitos*, pequeños, esféricos, con núcleo de aspecto uniforme, regular, y que ocupa la casi totalidad del citoplasma; *grandes mononucleares* y formas correspondientes á los *mielocitos;* pequeños *polinucleares* con protoplasma casi homogéneo, sin granulaciones ó con granulaciones finísimas, imperceptibles; otros con grandes gránulos apiñados, y algunos, á veces, con granulaciones muy refringentes, en forma de bastoncillo, cortadas en ángulos casi cristalinos, y sin duda alguna, pertenecientes al grupo de las descritas por EHRLICH y SCHWARZE (23), con el nombre de «granulaciones cristaloideas» en la rana y en las aves y observadas más tarde por H. F. MÜLLER (24) en los mamíferos.

Los hematoblastos (plaquetas), aparecen muy numerosos y muy grandes, reunidos casi siempre en grupos; presentan en su interior puntos ó gránulos refringentes.

Examen de preparaciones teñidas.—La mayor parte de las preparaciones, secadas y fijadas por el calor y con la mezcla de NIKIFOROF ó con cloroformo—generalmente con la primera,—fueron teñidas con el Triacido de EHRLICH, con Hematoxilina BÖHMER y Eosina, ó con el método de GIEMSA. Algunas fueron teñidas con Tionina fenicada (NICOLLE), con el azul polícromo de UNNA y con el método de EHRLICH (Fucsina ac. y Azul de Metil.) para las granulaciones neutrófilas.

He aquí los resultados de la observación de estas preparaciones.

Los hematies toman intensamente el colorante ácido (eosina); sin embargo, en las preparaciones teñidas con el Giemsa, adquieren muchas veces un tono de color azulado ó violáceo, como se puede apreciar en la figura 11 de la lámina adjunta, y en la misma figura 9; y en las preparaciones teñidas con Tionina, adquieren constantemente una coloración verde bastante intensa.

Los hematoblastos (plaquetas) en las preparaciones teñidas con el método de Giemsa, revelan claramente la presen-

cia de un grupo central de granulaciones cromáticas, de color rojo-violeta, rodeadas de un citoplasma reticular ó esponjoso, en cuyo borde periférico se notan numerosos gránulos pequeños, finos, azulados, que se dirían constituir una delgadísima zona de ectoplasma, cuyo límite no parece determinado por una verdadera membrana.

Veamos ahora los leucocitos. Los polinucleares (ó de núcleo polimorfo) comprenden cuando menos, en la sangre de Llama, cinco variedades distintas, y el conjunto de las formas leucocitarias puede subdividirse del siguiente modo:

a) Existen ante todo, en buen número, los *polinucleares neutrófilos,* con protoplasma finísimamente granuloso, y núcleo revuelto y enrevesado, complicadísimo á veces, y con gran frecuencia — como lo hizo notar Biffi — constituído por distintas porciones completamente separadas la una de la otra (véase la figura 7 de nuestra lámina). En preparados teñidos con Hematoxilina-Eosina, estos leucocitos neutrófilos aparecen (como en la figura 5) con citoplasma rosado, casi homogéneamente teñido, sin que se puedan apreciar granulaciones especiales, y núcleo violáceo. En preparaciones teñidas con el método de Giemsa (figs. 6, 7 y 14) su aspecto es casi igual, si se exceptúa la diferente tonalidad de coloración del núcleo. En preparaciones á la Tionina (figuras 3 y 4), el citoplasma se tiñe en azul claro, conservando aspecto homogéneo ó finísimamente granuloso. Sólo con el método de Ehrlich á la Fucsina y Azul de Metileno se ponen de relieve claramente las pequeñas granulaciones neutrófilas de estos leucocitos.

Una particularidad interesante del aspecto y estructura nuclear, merece ser puesta de relieve. Como ya se ha dicho, el núcleo de estos leucocitos aparece extraordinariamente complicado, desarrollando una gran superficie. Pero además de esto, se observan con gran frecuencia, al lado del núcleo, y por lo general polarizados en dos posiciones excéntricas, dos gruesos gránulos contituídos, al parecer, de cromatina, cua-

les se hallan representados en las figuras 4, 5 y 6. En la figura 22, uno de estos leucocitos, visto á mayor aumento (2.000 diámetros), presenta los dos gránulos en el interior de la concavidad formada por el núcleo, y uno de ellos está en relacion, al parecer, por medio de un delgadísimo filamento de substancia cromática con uno de los lobos del núcleo mismo. En la figura 23, en el intersticio, entre dos macizos cuerpos nucleares enteramente separados el uno del otro, se ve un solo corpúsculo, correspondiente, al parecer, á los anteriormente descritos.

¿Qué significación pueden tener estas formaciones extranucleares en esta clase de leucocitos? En mi entender, dos interpretaciones pueden darse al hecho apuntado: 1.° Los corpúsculos extranucleares pueden considerarse sencillamente como pequeñas porciones nucleares, aisladas en el citoplasma, ó *cariosomas* sin valor morfológico ó energético alguno distinto del propio de la totalidad del núcleo; 2.°, pueden considerarse, en cambio, como *centrosomas*, ó mejor como masas de substancia arcoplasmática — en el sentido dado á esta palabra por Boveri, — destinadas á la orientación del proceso de la división celular.

La primera interpretación puede ser aceptada con mayor facilidad, pues no implica esfuerzo alguno del pensamiento; sin embargo, una observación parece oponerse á ella, y es la de la simetría, de la disposición típica de esos corpúsculos, en relación con las formas nucleares en el interior del citoplasma. La segunda interpretación se apoya, en cambio, precisamente sobre esta consideración, y toma en cuenta, además, los hechos análogos observados por otros investigadores — Heidenhein, Flemming, Ballowitz, Ranvier, Meves (25) — en los leucocitos de vertebrados inferiores *(Salamandra maculosa*, Heidenhein; *Rana esculenta*, *Amblystoma* [axolotl], Ranvier; *Triton cristata*, Flemming). Aun admitiendo como forma constante de la división celular en los leucocitos la directa ó amitósica, resulta no menos constante

la presencia de una esfera, de un centro dinámico, de una zona de arcoplasma con centrosomas, evidente en todos ellos durante el proceso de división. Y la frecuencia de estas formas en la sangre periférica de Llama está en armonía con la hipótesis, que me es forzoso considerar como muy probable, de una renovación ó multiplicación leucocitaria fuera de los territorios hematopoiéticos, en el mismo torrente circulatorio, en relación con la enorme masa globular que poseen estos mamíferos.

b) Al lado de los polinucleares neutrófilos propiamente dichos, existen algunos polinucleares pequeños, cuyo citoplasma homogéneo ofrece una metacromasía evidente en preparaciones teñidas con los colores básicos de anilina. La Tionina, en lugar de teñir en azul pálido, como acontece con el protoplasma finamente granuloso de los comunes neutrófilos antes descritos (figuras 3 y 4, 22 y 23), tiñe el citoplasma de estos pequeños polinucleares en rosa anaranjado, tal como se ve en la figura 2. El núcleo de estas formas se ve constituído casi siempre de tres ó cuatro lobos separados.

c) Los eosinófilos típicos (figuras 9 y 10), relativamente escasos en la sangre de Llama (1,5 por 100), ofrecen aspecto enteramente igual al de los eosinófilos humanos, si se exceptúa la dimensión de las granulaciones, al parecer más pequeñas, muy regulares, apiñadas en la casi totalidad del citoplasma. El núcleo es poco complicado, en herradura ó en forma de S.

d) Al propio tiempo se hallan en la sangre de Llama algunas formas con granulaciones eosinófilas irregulares, al parecer no esféricas, sino poliédricas; formas que corresponden, indudablemente, á las indicadas en forma somera por Biffi. Nuestra figura 16 reproduce uno de estos leucocitos (preparac. Hematoxil.-Eosina). En mi entender, se trata de un período de evolución del mielocito al leucocito eosinófilo. El núcleo ya no es esférico, sino en forma de herradura, pero sin complicaciones de ningún género.

e) Las figuras 11 y 15 representan dos formas de transición, cuales se encuentran muy á menudo en estas preparaciones. Las formas correspondientes á la representada en la figura 11 proceden, indudablemente, de mielocitos, y se hallan en número considerable en la sangre de Llama. Las que corresponden á la figura 15 son, en cambio, mucho menos frecuentres. Su significación queda muy incierta.

f) Muy interesantes por su aspecto, y en número muy considerable—contrariamente á lo indicado por Biffi—aparecen en la sangre de Llama las células basófilas cebadas (Mastzellen), cuyas granulaciones gruesas, hacinadas en el citoplasma, toman, en preparaciones á la Tionina fenicada, un color verde azulado intenso, electivo (figuras 17, 18 y 19). El citoplasma, propiamente dicho, aparece á veces teñido ligeramente en azul, á veces en rosa (fig. 18). El núcleo, en herradura; á veces, en aro completamente cerrado (fig. 19). Se puede calcular en 5 á 8 por 100 el número de Mastzellen encontradas por nosotros en estas preparaciones.

g) Los leucocitos mononucleares de la sangre de Llama pueden dividirse en cuatro clases. La primera está representada por los comunes grandes mononucleares, á citoplasma neutrófilo (fig. 12), con núcleo esférico, central, y contorno celular irregular. Estas formas son relativamente abundantes en nuestras preparaciones.

h) Además de los precedentes se hallan, en número escaso, formas parecidas á la representada en la figura 13. Son grandes leucocitos ovoideos, regulares, de núcleo esférico, y citoplasma metacromático (Tionina). Estos son, en mi entender, verdaderos mielocitos. Su presencia en la sangre periférica, ¿es absolutamente normal, ó es debida á alteraciones de las condiciones naturales de vida en el Llama por nosotros examinado, y que desde algunos años vive en el Jardín Zoológico del Retiro de Madrid? No es posible por ahora contestar definitivamente á esta cuestión.

h) Los linfocitos (fig. 20) son relativamente escasos, en

proporción muy inferior á la que es propia de la sangre humana normal. En el aspecto no ofrecen particularidad ninguna digna de ser apuntada.

i) Al lado de los linfocitos normales se hallan algunas formas, representadas en la figura 21, con protoplasma acidófilo, y que pueden considerarse como pequeños mononucleares de la serie mielógena, en contraposición de los linfocitos propiamente dichos.

Tal es el aspecto de las diferentes variedades leucocitarias de la sangre del Llama por nosotros examinado. Sólo nos queda por añadir, que en muchos preparados, se encuentran grupos de leucocitos—especialmente polinucleares neutrófilos—reunidos los unos á los otros por los bordes celulares como en verdadero tejido. Este aspecto habia sido puesto de relieve por Biffi en su Memoria. (Véase la figura 24 de nuestra lámina.)

Preparaciones al Rojo neutro.—Según hemos indicado, se hicieron preparaciones de sangre fresca con el rojo neutro, siguiendo el metódo de Negri. En estas preparaciones, á las dos horas, no se observaba en los hematies la menor impregnación, ni de partes del estroma, ni de su totalidad (véase la fig. 25). Sólo se notan las formas de poikilocitos, típicas, descritas ya por Biffi. Muchos hematies conservan, sin embargo, su aspecto normal. Examinadas en sucesivos períodos estas preparaciones, no revelan estructura alguna especial en el estroma globular, ni granulaciones, ni red cromática. Sólo en preparaciones de doce á catorce horas, en que la mayor parte de los hematies se hallan ya alterados, con el aspecto característico representado en la figura 26, se encuentran algunos glóbulos rojos uniformemente impregnados por la substancia colorante y teñidos en rojo pálido, sin que en su interior pueda apreciarse ninguna especial estructura.

*
* *

Las conclusiones que pueden sentarse á consecuencia de esta modesta contribución al estudio de la sangre de Llama, son las siguientes:

1.ª Á pesar del aspecto biconvexo que ofrecen los hematies de estos mamíferos, no se logra poner de relieve en su interior, ni con el examen directo, ni con los métodos de impregnación en fresco por el Azul de Metileno y por el Rojo neutro, ningún vestigio de estructura nuclear ó de cariosomas.

2.ª Tampoco existe en dichos hematies indicio de una red ó de granulaciones parecidas á las descritas por otros autores en los hematies de vertebrados inferiores y en los eritrocitos de embriones de mamíferos, ó en hematies de los órganos hematopoiéticos de mamíferos jóvenes.

3.ª Existe en la sangre de Llama mayor número de variedades leucocitarias que en la sangre normal del hombre ó de los comunes mamíferos adultos, y especialmente se aprecian, en el animal por nosotros examinado, formas características, que hemos interpretado como mielocitos, relativamente abundantes en la sangre periférica.

4.ª Contrariamente á lo observado por Biffi, se hallan en cantidades muy considerables los leucocitos basófilos ó «Mastzellen».

5.ª Gran número de leucocitos polinucleares neutrófilos presentan en el citoplasma uno ó, con mayor frecuencia, dos corpúsculos constituídos de substancia análoga á la cromatina nuclear, y orientados simétricamente con relación á la forma y disposición del núcleo. Estos corpúsculos extranucleares deben interpretarse, en nuestro entender, como la representación morfológica de centros dinámicos correspondientes á un período de actividad celular y precisamente á un momento del proceso de división amitósica. Los leucocitos neutrófilos de la sangre de Llama serían, pues, capaces de multiplicarse (con la limitación natural que va aparejada, según todos los observadores, con la reproducción amitó-

sica ó directa) fuera de los territorios de los órganos hematopoiéticos, en la misma sangre periférica.

Madrid, Mayo de 1909.

(Laboratorio de Parasitología del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII.)

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

1. *Alcune osservazioni sul sangue del Lama*, per il Dott. U. BIFFI. (Dall'Istituto d'Igiene della Città di Lima). «Archivio di Fisiologia», Firenze, vol. III, fasc. V, Julio, 1906, páginas 557-571 (con dos láminas fototip.)

2. HAYEM.—*Du sang et de ses altérations anatomiques.*—París, 1899.

3. BIFFI U. Y RIBEYRO R. E.—*Infeccion experimental de la Llama con el virus vaccínico.* «Boletín de la Academia Nacional de Medicina de Lima», núm 4, 1904.

4. Memoria citada, pág. 566.

5. Véase la importante Memoria de A. WOLFF.—*Ueber Leukocitengranulationen*, en «Zeitschrift für Klinische Mediz.», t. LII, 3 y 4, 1902—(citada por BIFFI)—y por cuanto se refiere á las granulaciones leucocitarias en general, la Monografía de C. LEVADITI.—*Le Leucocyte et ses granulations*; colección «Scientia , Paris, C Naud editions, 1902.

6. ISRAEL y PAPPENHEIM.—*Ueber die Entkernung der Saugethiererythroblasten*—en «Virchow's Archiv», Bd. CXLII, 1896—y también: PAPPENHEIM.—*Die Bildung der roth Blutkorperchen.* Disertación inaugur.—Berlín, 1895.

7. GABRITCHEWSKY.—Arch. für experiment. Pathologie», tomo XXVIII, pág. 83, 1891.

8. ASKANAZY.—«*Zeitch f. Klin. Mediz*», t. XXI, pág 415, 1892;—y también «Virchow's Archiv.», t. CXXXVII, 1894.

9. EHRLICH und LAZARUS.—*Die Anaemie*—en el «Tratado de Patologia» de NOTHNAGEL.—Viena, 1898.

10. SCHMIDT.—«Deutsche Mediz. Wochenschr.», 30 Octubre 1902.

11. SCHWALBE y SOLLEY.—«Archiv für pathol. Anatomie», 1902, t. CLXVIII, núm. 3.

12. STENGEL, WHITE y PEPPER.—«American Journal of Medica Sciences», 1902, pág. 873, t. CLXVIII, núm. 3.

13. Citados por F. BEZANÇON y M. LABBÉ.—*Traité d'Hématologie.*—París, G. Steinheil edit., 1904 pág 211 y siguientes.—Para mayores detalles sobre las observaciones y las opiniones de algunos de estos autores, véanse los trabajos de LOWIT, en «Virchow's Arch.», t CXVII, 1889; y en *Archiv für Mikrosc. Anat.*», 1891, t. XXXVIII; y el anterior *(Die Umwandlung der Erythroblasten in rothe Blutkorpenchen)* publicado en las «Actas de las sesiones de la R. Academia de Viena» («Wiener Akadem. Sitzungsberichte»), t CXV, III Cl., 1887, en que describe en la periferia y en el centro de los hematies de conejo, especiales granulaciones, ya aisladas, ya reunidas y enlazadas por filamentos, constituyendo así una trabazón reticular que considera como una red cromática. Los hematies tendrían, por tanto, según L., la estructura de núcleos (Kernahnliche Gebilde); por fin la interesante Memoria: *Studien über Physiol. und Pathol. des Blut*, Iena, 1892; — de LILIENFELD, en «Archiv für Anat. und Phys.», 1893; — de A. MAXIMOW: *Ueber die Structur und Entkernung der rothen Blutkorperchen der Saugethiere*, etc , en «Arch. für Anat. und Phys.», 1899, Anat. Abth., números 1-2

14. DOMINICI.—«Archives de Médecine expérimentale», París, 1902, vol. XIV; y vol. XII, 1900.

15. ARNOLD.—»Virchow' Arch.», t. CXLV, 1896, y t. CLV, 1899; — E. SCHWALBE, - eodem loco, t. CLVIII, 1901, pág. 80.

16. FOÁ.—*Beitrag zum Studium der rothen Blutkorperchen der Saugethiere* en «Ziegler's Beitrage», t. V, 1889; - FOÁ y CESARIS DEMEL—*Sui granuli eritrófili dei globulirossi del sangue*—en «Giornale della R. Accademia d'Medic. di Torino», 1899; — A. CESARIS DEMEL — *Sulla sostanza cromatófila endoglobulare in alcuni eritrociti* - en «Att. della R. Accademia delle Scienze di Torino», vol XXXVI, 1901.

17. PETRONE. — «Bollettino dell'Accademia Gioenia» di Catania, 1897-1900.

18. E. GIGLIO TOS.—*Il rosso neutrale e i granuli emoglobigeni*— en «Zeitschr. f. Wissensch. Mikr.», t. XV, 1898; - *Sulle granulazioni degli eritrociti nei girini di taluni anfibi* - en «Anat. Anzeiger», t. XII, 1896.

19. A. NEGRI. —*Sulla persistenza del nucleo nei globuli rossi dei mammiferi* - en «Bullett. della Soc med. chir. Pavía», 1899; y «Anatom. Anzeiger», t. XVI, núm. 2, 1899; — *Osservazioni sulla sostanza colorabile col rosso neutro nelle emazie dei Vertebrati*—«Memorie del Rº Institº Lombardo d'Scienze e Lettere, vol. XIX, núm. VIII, 1902, Milano (con dos láminas).

20. JOLLY.—«C. R. Société de Biologie», París, 1900, 1902 y 1906-1907 (numerosas notas).

21. LELIEVRE A. ET RETTERER ED. —*Structure des hématies des*

mammiféres adultes— en «C. R. Société de Biologie», 16 Enero, 1909, página 67.

22. Citado por LELIEVRE y RETTERER («C. R. Soc. Biol.», 16 Enero 1909). Según estos autores, RUZICKA habría demostrado la existencia de un retículo con filamentos constituídos de una substancia parecida á la linina, en los hematies de los mamíferos adultos.

23. SCHWARZE.—Disertación inaugur., Berlín, 1880—citado por LEVADITI—*Le leucocyte et ses granulations*. París, 1902, pág. 40.

24. H. F. MÜLLER,—«Arch. für exper. Pathol. und Pharmac.», vol. XXIX, 1892.

25. Véase á este propósito: *Traité d'Histologie* de PRÉNANT, BOUIN y MAILLARD, t. I°, pág. 149.

G. Pittaluga, dib.

Lit. Fernando Rodriguez Barcelona

Explicación de la lámina.

Las figuras 1 á 12 han sido reproducidas con obj. Zeiss $^1/_{12}$ im. homog., oc. 5. (aumento 1.300 diam.), excepto la figura 2, que ha sido reproducida con oc. 4. (aumento 990 diam.).

La figura 13 ha sido reproducida con obj. apoc. Zeiss, 2. m. m., apert. 1.30 oc. comp. 8.

Las figuras 17, 20 y 24 con obj. $^1/_{12}$ Zeiss, oc. 4.

Las figuras 18 y 21 con obj. $^1/_{12}$, oc. 5.

Las figuras 14, 15, 16, 19, 22 y 23 con obj. $^1/_{12}$ oc. comp. 12.

Por fin, las figuras 25 y 26 con obj. im homog. semi-apoc. Koristka $^1/_{15}$, oc. comp. 12.

Las figuras 1 á 4, 13, 17, 18, 19, 20 y 22 han sido reproducidas de preparaciones fijadas con alcohol-éter y teñidas con thionina fenicada.

Las figuras 5, 15, 16 y 21 han sido reproducidas de preparaciones fijadas con alcohol-éter ó con cloroformo y teñidas con hematoxilina Boehmer y eosina.

Las figuras 6 á 12 y 14 han sido reproducidas de preparaciones fijadas con alcohol-éter y teñidas con el método de Giemsa. (Grubler.)

Las figuras 25 y 26 han sido reproducidas de preparaciones frescas en las cuales la gota de sangre fué mezclada con una gota de sol. ac. al 1 p. 100 de rojo neutro. La primera á las dos horas y la segunda á las doce horas.

La interpretación de las figuras está dada en el texto.

X. — Procedimiento rápido de valoración del vanadio en los minerales y productos industriales vanadíferos.

Por E. Piñerúa Alvarez

La determinación cuantitativa ó valoración del vanadio en los minerales y otros productos industriales, v. gr., las aleaciones ferrovanadíferas, ha sido objeto de estudios incesantes desde Berzelius y Rose hasta nuestros días, por Gerland, Goldschmidt, Roscoe, Norblad, Gooch y Gilbert, Gooch y Stockey, Hillebrand, Browning, Truchot, Maillard, Levisato, Hauser y otros muchos químicos.

Algunos de los procedimientos ideados son muy recomendables, pero creemos que el nuestro los aventaja en rapidez y exactitud, pudiendo también aplicarse con ligeras variantes á la valoración del molibdeno y tungsteno ó wolframio en sus menas y productos metalúrgicos.

El procedimiento consiste en fundir el mineral porfidizado, ó el material vanadífero reducido á polvo muy fino (0'5 gramos á 1 gr.), con 7 á 8 veces su peso de *bióxido de sodio* perfectamente seco y puro, manteniendo en fusión la mezcla á la temperatura del rojo durante quince ó veinte minutos.

Después de fría la masa se somete ésta á la acción del agua hirviente, y se separa el residuo insoluble mediante filtración, lavándolo cuidadosamente sobre el filtro.

El filtrado alcalino se acidifica con ácido sulfúrico, se agrega alcohol, y sin separar el precipitado—si lo hubiera—se hace pasar por el líquido una corriente de anhídrido sulfuroso hasta que tenga olor fuerte á este gas.

Conviene prolongar la acción del gas reductor durante

bastante tiempo, sobre todo si el material analizado contiene arsénico.

Luego se filtra—si es necesario—, el líquido *azul* resultante, y se elimina por la acción del calor el alcohol y el gas sulfuroso que tiene disuelto, favoreciendo al final la expulsión de dicho gas mediante una corriente de anhídrido carbónico.

Si el mineral ó material vanadífero contiene arsénico, ver bigracia la *endlichita* (*), la *chileita* (**), el *areoxeno* (***), la *eusynchita* (****), y el *cloro-arseniovanadato de plomo* de Santa Marta (mina Clemente) de la provincia de Badajoz (España), se somete de nuevo el líquido *azul*, después de expulsar el gas sulfuroso, á una corriente de hidrógeno sulfurado en tanto que se forma el precipitado amarillo de trisulfuro de arsénico (*****).

Se separa éste mediante filtración, se elimina el gas sulfhídrico haciendo hervir el líquido, y, por fin, se valora volumétricamente el vanadio de la solución azul hipovanádica, mediante el permanganato potásico en solución al 1 por 1000, titulándola con otra también al 1 por 1000 de metavanadato amónico hervida con lejía de sosa hasta que no desprende amoníaco, reduciéndola por el gas sulfuroso—después de acidificarla fuertemente con ácido sulfúrico—, operando en caliente y en idénticas condiciones de concentración, acidez y temperatura que con el material analizado, terminando la volumetría cuando el líquido azul se descolora, por causa de la transformación de la sal hipovanádica en vanádica, y éste adquiere un ligero *matiz rosa* permanente.

Ejecutando las operaciones como dejamos dicho, se obtie-

(*) GENTH et COLLIE —J. Prakt. Chem. Soc. **55**-94-1899.
(**) DOMEYKO. - An. Min. **74**-1150-1848.
(***) BERGEMANN. -Jahrbuch Mineral **397**-1857.
(****) Rammelsberg.—Sitr. preuss. Akad. 40-1864.
(*****) La cantidad de arsénico encontrada ha sido 5'24 por 100.

nen resultados exactísimos y en mucho menos tiempo que con otros procedimientos.

Trabajando con la *vanadinita* de Santa Marta hemos encontrado una cantidad de arsénico al estado de orthoarseniato, que coincide casi exactamente con la que corresponde á la fórmula $(VaO_4)_2''' (AsO_4)''' Pb_4'' (ClPb)'$ de modo que debe considerarse como un clorarsenio-vanadato de plomo.

(Laboratorio de Análisis Químico especial de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.)

XI.— Reacciones del cinc, el niquel y el cobalto, utilizables en análisis.

Por E. Piñerúa Alvarez

El reactivo empleado es el cobaltocianuro potásico

$$[(Co\,Cy_6)\,K_4]$$

en solución acuosa saturada de anhídrido sulfuroso á baja temperatura.

Se prepara haciendo una disolución al 10 por 100 de sulfato ó cloruro cobaltosos en agua destilada hervida, recién saturada de gas sulfuroso á 0°, y agregando luego cianuro potásico puro hasta redisolver el precipitado *rojo intenso* que se forma primero.

Este líquido reacciona con la mayor parte de las sales metálicas, presentando grandes analogías con el ferrocianuro potásico $[(Fe\,Cy_6)K_4]$.

Son interesantes las reacciones, en frío, con las sales férricas y ferrosas, y, en caliente, con las de calcio, saturadas de cloruro amónico, con las estannosas y otras; pero las que merecen mencionarse más especialmente, por su importancia desde el punto de vista analítico, son las que produce con el cinc, niquel y cobalto.

Cuando á una disolución del reactivo se agrega otra en exceso de sulfato de cinc en agua sulfurosa, recién preparada, se forma un precipitado *rojo anaranjado intenso* de cobaltocianuro cíncico $[(Co\,Cy_6)\,Zn_2]$ que es insoluble en el agua sulfurosa; pero se disuelve en un exceso de reactívo,

dando un líquido de color rojo obscuro que contiene cobaltocianuro cíncico potásico $[(Co\,Cy_6)\,ZnK_2]$.

La sal recogida en un filtro, lavada con la disolución del anhídrido sulfuroso, y desecada á la trompa, tiene *color anaranjado*; pero calentándola de 110 á 120° se vuelve *violácea*, bastando tocarla con una varilla húmeda para que en este punto la masa adquiera el color primitivo.

Si en vez de agregar al reactivo una disolución sulfurosa reciente de sulfato de cinc, fuese de niquel, se formaría un precipitado *amarillo* de cobaltocianuro de niquel

$$[(Co\,Cy_6)\,Ni_2],$$

también insoluble ó poco soluble en el agua sulfurosa, que por desecación se torna *verde*.

Con un exceso de reactivo se redisuelve formando cobaltocianuro niqueloso potásico $[(Co\,Cy_6)\,Ni\,K_2]$, y la solución, que tiene color amarillo, se descompone y descolora fácilmente al agregar otra concentrada de ácido tartárico.

Si al reactivo empleado $[(Co\,Cy_6)\,K_4]$ agregamos una disolución sulfurosa de sal de cobalto, se produciría un precipitado *rojo* de cobaltocianuro cobaltoso $[(Co\,G)_6Co''_2]$, que se disuelve en un exceso de cianuro alcalino dando un líquido *rojo obscuro* que contiene cobaltocianuro cobaltoso potásico $[(Co\,Cy)_6\,Co\,K_2]$, muy difícilmente descolorable por una disolución de ácido tartárico.

La producción del cobaltocianuro cíncico puede utilizarse para el reconocimiento de este metal, aun estando en presencia de otros, v. gr., el aluminio.

La formación de los cobaltocianuros de niquel y de cobalto puede servir también para su investigación cualitativa, pero la aplicación más interesante es para la separación de estos dos metales mediante electrolisis.

Para el reconocimiento de cantidades muy exiguas de niquel y cobalto puede operarse sobre la disolución sulfurosa

de sus sales, ó sobre la de los sulfuros en el agua regia, evaporándola á sequedad en *baño de María*, redisolviendo el residuo de cloruros en la más pequeña cantidad de agua recién saturada de gas sulfuroso, y agregando luego á esta disolución gota á gota otra de cianuro potásico puro.

Si el residuo salino fuese muy pequeño, bastaría introducir en la disolución una varilla impregnada en dicha solución de cianuro para ver el precipitado correspondiente.

Si hay sólo niquel se forma uno de color *blanco verdoso*, que se disuelve en un exceso de cianuro, dando un *líquido amarillo* que se descolora rápidamente al agregar disolución concentrada de ácido tartárico (20 por 100.)

Si hay sólo cobalto se produce al agregar el cianuro un precipitado *rojo* que se redisuelve en un exceso de cianuro, dando un *líquido también rojo*, que no se descolora al agregar el ácido tartárico, sino que resulta amarillo.

Si estuviesen juntos los dos metales, por muy pequeña que sea la cantidad de cobalto (1 miligramo es suficiente en presencia de 1 gr. de niquel) se forma siempre un precipitado *amarillo rojizo*, en vez del *blanco verdoso* del niquel, y después de redisuelto en un exceso de cianuro el líquido amarillo que resulta no se descolora por el ácido tartárico.

Para la separación electrolítica de los dos metales, se agrega cianuro potásico puro á la mezcla de sus sales disueltas en agua hervida y fría, recientemente saturada de gas sulfuroso á 0°, á fin de que se forme el *cobaltocianuro de niquel* de color amarillo, que después de seco es de color verde, y disolviendo 4 á 5 decígramos de esta sal en 50 c. c. de amoníaco ($D = 0,927$), agregando 5 gramos de sulfato amónico y 100 de agua, electrolisando el líquido á la temperatura ordinaria mediante una corriente de $D_{100} = 0'37$ á 0'45 amperios y de 3 á 4 voltios de fuerza electromotriz, se obtiene á las dos horas, sobre el cátodo, todo el niquel metálico exento de cobalto, pero impregnado de algo de carbono.

Separación electrolítica cuantitativa del niquel y el cobalto.

Las grandes dificultades que ofrece la resolución del problema de la separación electrolítica de los metales niquel y cobalto, han impedido hasta hoy hallar un modo operatorio de resultados satisfactorios, y por esta causa nos decidimos á publicar las experiencias que en este sentido hemos realizado.

Si se agrega cianuro potásico puro á una mezcla conveniente de sales de niquel y cobalto disueltas en agua hervida y fría, recientemente saturada á 0° de gas sulfuroso, se forma un COBALTOCIANURO DE NIQUEL $[(Co\,Cy_6)\,Ni_2]$ de color *amarillo,* que después de lavado y seco se torna *verde.*

En dicho compuesto está el cobalto formando un anión complejo muy estable, difícil de descomponer y caracterizar, y en cambio el niquel se halla al estado de catión simple, de fácil caracterización y precipitable por los reactivos ordinarios de este cuerpo.

Disolviendo 0,5 gr. de dicho compuesto (cobaltocianuro de niquel) en un líquido formado por 100 c. c. de agua y 40 c. c. de amoníaco (D=O, 927) y agregando 5 gr. de sulfato amónico, se puede obtener á las dos horas un depósito brillante de *niquel, exento de cobalto,* electrolisando dicho líquido en frío con una corriente D_{100}=3'40 amperios y de 3'7 á 4 voltios de fuerza electromotriz.

Al disolver con ácido nítrico el metal recogido sobre el cilindro de platino perforado (*), se ha visto que el niquel está impregnado de carbono, y en parte en combinación orgánica muy resistente á los agentes de destrucción que adquiere un intensísimo color *verde obscuro* por el ácido clorhídrico.

Disolviendo 1 gr. de la sal citada en 100 c. c. de agua

(*) El ánodo empleado ha sido una espiral de platino.

con 50 c.c. de amoníaco (D = 0'927), agregando 10 gr. de sulfato amónico y electrolisando en caliente (50 á 60°) con una corriente $D_{100} = 1$ amperio, al principio, y 1'5 al fin, y con una F.E = 3'8 voltios, se precipitan entrambos metales al cabo de una hora.

Cómo vemos, puede hacerse la separación del niquel y el cobalto mediante electrolisis de sus sales, operando como hemos dicho antes; pero aún falta estudiar una multitud de cuestiones que serán el objeto de ulteriores trabajos y notas.

(Laboratorio de Análisis Químico especial de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.)

XII. — Determinación de las diferencias de longitud entre Madrid, Barcelona y Desierto de las Palmas (Castellón), por medio del transporte de hora con cronómetros Ditisheim.

Por José Galbis

La rapidez y comodidad con que se obtienen las diferencias de longitud entre diversos lugares de la tierra por medio del transporte de hora en cronómetros de precisión, explica el que los geodestas y geógrafos sigan con gran interés las mejoras que en tales instrumentos se introducen y estudien los límites de precisión á que se puede llegar con su empleo en dicho trabajo

Desde la famosa determinación de esta clase hecha por los rusos en 1843 entre Pulkova y Altona, sólo se ha aplicado por alguno que otro explorador, y, por consiguiente, nuestro Instituto Geográfico y Estadístico no creyó conveniente preocuparse de su utilización en los trabajos que tiene encomendados.

Ahora bien; el ensayo de determinación de diferencia de longitud entre París y Neuchatel, hecho en el año 1905 por el Sr. Paul Ditisheim, con pequeños cronómetros de escape de áncora por él construídos, hizo vislumbrar la posibilidad del empleo de dicho procedimiento en las operaciones geodésicas, é inmediatamente el ilustre Académico Jefe de los servicios geodésicos del Instituto Geográfico, Coronel don Eduardo Mier, atento á implantar en dicho centro cuantos adelantos se presentan en el mundo científico, organizó el ensayo de ese procedimiento, encomendándonos al ingeniero

de minas y geógrafo D. Manuel Barandica y á mí tan interesante trabajo, que debía inspeccionar y dirigir, con su probada competencia en estudios astronómicos de esta clase, el Inspector del Cuerpo de Ingenieros geógrafos D. Juan Borrés.

Con tal objeto se adquirieron los cronómetros de bolsillo de primera categoría, construídos por el Sr. Paul Ditisheim, números 24.602, 24.598, 24.595 y 24.590; y una vez en nuestro poder, en el mes de Septiembre del año 1908, nos ordenaron hacer los primeros ensayos, determinando las diferencias de longitud entre Madrid, Barcelona y Desierto de las Palmas (Castellón de la Plana), tratando, con la acertada elección de estos puntos, de buscar la comprobación de los resultados que obtuviésemos con los valores determinados por medio de comunicación telegráfica entre Madrid y Desierto de las Palmas el año 1891, y entre Madrid y Barcelona el año 1897; trabajos realizados por los geodestas D. Juan Borrés y D. Antonio Esteban.

Aunque suponíamos, desde luego, que dada la época en que se efectuaban estos experimentos, era muy probable que el estado del cielo no nos permitiera seguir un plan sujeto á reglas inmutables, no vacilamos en trazarlo sin pensar en las dificultades de esa clase que se pudieran presentar, esperando que después éstas, y los resultados parciales que se fueran obteniendo, nos indicasen las modificaciones que debíamos introducir.

Nos pareció, desde luego, que una de las primeras comprobaciones de la precisión del método era el cierre entre las tres longitudes qne determinásemos, y, por consiguiente, decidimos dividir el trabajo en períodos constituídos por recorridos del triángulo formado por los tres puntos de observación, ya en un sentido, ya en otro.

Buscando también disminuir algo la influencia en el trabajo de conjunto, de la gradación en que se presentasen las variaciones climatológicas y topográficas, decidimos que

estos viajes fuesen en número par, y alternando el sentido en que se efectuasen.

En vista de esto, ordenamos nuestro ensayo en la forma siguiente:

Primer viaje.—Madrid-Desierto de las Palmas-Barcelona-Madrid.

Segundo viaje.—Madrid-Barcelona-Desíerto de las Palmas-Madrid.

Tercer viaje.—Madrid-Desierto de las Palmas-Barcelona-Madrid.

Cuarto viaje.—Madrid-Barcelona-Desierto de las Palmas-Madrid.

Claro es que esta organización permitía también todas las comprobaciones parciales con las determinaciones de diferencia de longitud, por procedimiento telegráfico, entre Madrid y Desierto ó entre Madrid y Barcelona.

Ahora bien; entendimos qne el objeto principal de nuestro ensayo, era apreciar la influencia que ejercen en las marchas de los cronómetros las vibraciones y sacudidas á que les someten los diferentes medios de transporte en terrenos montañosos, y, por consiguiente, tratamos de que no faltasen en el conjunto del trabajo datos con que poder juzgar los resultados que obtuviésemos.

Afortunadamente, sin gran esfuerzo, hemos logrado nuestro deseo, puesto que entre Madrid y Barcelona utilizamos el buen material de ferrocarril de que están formados los trenes expresos que hacen ese recorrido; en los viajes efectuados entre Madrid y Desierto de las Palmas ó entre Benicasim (estación del ferrocarril más próxima á Desierto) y Barcelona un material muy mediano; en las subidas y bajadas entre Binicasim y Desierto de las Palmas transportamos los cronómetros á pie, y, por último, en el tercer viaje ensayamos también el transporte en carruaje, dejando el tren en Castellón de la Plana, y trasladándonos desde esta población á Benicasim en un pequeño faetón.

No han escaseado tampoco en este ensayo los cambios frecuentes y muy variados de presión. En efecto, entre los tres puntos elegidos, cuyas altitudes eran

Madrid	655	metros.
Barcelona	5	íd.
Desierto de las Palmas	728	íd.

se pasaba de un día al otro del nivel del mar á más de 700 metros.

Si se examina el perfil del trazado de las vías férreas recorridas y el de los viajes á pie entre Benicasim y Desierto de las Palmas, se ve, que entre Madrid y Benicasim desciende la vía férrea hasta Aranjuez á 480 metros, sube luego la meseta de la Mancha hasta alcanzar altitudes de cerca de 930 metros entre Chinchilla y Almansa, baja lentamente hasta 640 metros en La Encina, y, por último, rápidamente desde este punto á Valencia y Benicasim.

El ferrocarril entre Benicasim y Barcelona va constantementre próximo á la costa, sin grandes cambios de altitud.

Entre Barcelona y Madrid marcha la vía férrea próxima á la costa hasta cerca de Reus sin grandes cambios de altitud; asciende después lentamente faldeando las estribaciones de las sierras próximas, manteniéndose en altitudes uo superiores á 200 metros hasta Zaragoza; sube desde este punto hasta alcanzar la altitud de 1.160 metros cerca de Medinaceli, al atravesar la sierra Ministra, y desciende desde este punto hasta Madrid.

En los viajes á pie entre Benicasim y Desierto de las Palmas, en un tiempo menor de tres horas, se sube, atravesando pequeñas lomas, desde 13 á 728 metros.

Duras han sido, por tanto, las condiciones de este género á que hemos sometido los cronómetros, y si á ello se añade la constante variación de estado higrométrico por la situación topográfica de los puntos que se recorren y por la variable calefacción de los coches del ferrocarril, se comprende

han de darnos los resultados que se obtengan cierta garantía para el empleo ulterior de los cronómetros en los trabajos geodésicos.

Ahora bien; estas mismas variaciones, y la dificultad de seguirlas con la precisión y frecuencia debida, imposibilitan, á nuestro juicio, el estudio de las correcciones que se debían aplicar á los cronómetros por la influencia de la densidad del aire; y como creemos que para poder conocer tales datos sería necesario someter los cronómetros á largos, ordenados y muy detallados experimentos, con variación de presiones y estados higrométricos, será preciso contentarse, por ahora, con dejar estas alteraciones agrupadas con las desconocidas y variadas que ocasiona el transporte.

No ha ocurrido lo mismo con los cambios de temperatura. Es el otoño en España la época del año en que más uniformidad existe entre la temperatura de las diferentes regiones, y así se ha visto en el curso de nuestro trabajo; de modo que, aminorada aún aquélla por las condiciones en que se llevaban los cronómetros, y observado con frecuencia el termómetro colocado cerca de ellos, es fácil descontar de las alteraciones de marcha la corrección correspondiente á la variación de temperatura.

Naturalmente, tratándose, según dijimos, de apreciar principalmente el efecto de los transportes en las marchas de los cronómetros, creímos era conveniente determinar el estado de los mismos lo más próximamente posible á dicho transporte, y, por tanto, dispusimos en los tres puntos de observación instrumentos apropiados.

Contábamos para ello en Madrid con el Observatorio Astronómico, y montamos en Barcelona (precisamente en el mismo pilar en que se hicieron los trabajos de determinación telegráfica de longitud) un anteojo de pasos Repsold, un cronómetro Nardín con contactos eléctricos de segundo y un cronógrafo Hipp; y en Desierto de las Palmas, también exactamente en el sitio donde se hicieron los anteriores trabajos

de longitud, un anteojo Repsold, un reloj Strasser Rhode con péndola Rieffer de acero níquel y contactos eléctricos de segundo y un cronógrafo Hipp.

Juzgamos también era esencial comparar las marchas de los cronómetros, en los períodos de transporte y en reposo, y con ese objeto observamos aquéllos durante veinticinco días antes y después de nuestro trabajo.

Del mismo modo, aunque según hemos dicho, pensamos que no era posible introducir en los cálculos, con garantías de acierto, corrección alguna por variación de presión; además de observar ésta con frecuencia en todas épocas, estudiamos también en el primer viaje el estado de los cronómetros en Barcelona y Desierto durante algunos días; de esa manera pudimos ver más claramente el efecto en las marchas de ese elemento perturbador.

Para disminuir en lo posible la influencia de la ecuación personal, se encargó siempre el Sr. Barandica de las determinaciones de hora en Desierto de las Palmas y en Barcelona, y yo de las observaciones de los cronómetros en reposo y en viaje y su comparación cronográfica con los relojes, cuyos estados habían determinado en Madrid los Astrónomos del Observatorio, y en Barcelona y Desierto de las Palmas el citado Sr. Barandica.

La variación semanal de observador en Madrid y la diferencia entre el anteojo meridiano por estos señores empleado, con el anteojo de pasos utilizado por el Sr. Barandica, haría muy larga y complicada la determinación de la ecuación personal entre este señor y dichos Astrónomos; y como, por otra parte, la precisión de las observaciones de estos últimos es grande, la variación de marcha de los relojes magistrales pequeña, distinto el intervalo entre las comparaciones de los cronómetros con ellos y la hora de determinación de su estado, y, por último, insignificante esta influencia de la ecuación personal con relación á las variaciones diurnas y hasta horarias de la marcha de los cronómetros, hemos juz-

gado podíamos renunciar á la determinación de ese elemento de corrección, sin perjuicio de creer es dato que habrá que estudiar á medida que se pida mayor precisión en los resultados.

Acordamos también, con el objeto de simplificar el problema, limitar nuestro ensayo al estudio del transporte de cronómetros en posición horizontal, y con tal objeto, además de colocarlos en esa posición en sus estuches, cuidamos con gran atención no variasen de ella, en instante alguno, de reposo ni de movimiento; por esto se llevaron las cajas de los cronómetros en los trenes sobre las almohadillas de los asientos; y en los transportes á pie, bien suspendidas por medio de unas correas que mantenían las cajas horizontales, bien sobre unas mochilas con palomillas construídas con tal objeto.

Tratamos de aminorar los golpes bruscos y las violentas variaciones de temperatura, y con ese objeto cada estuche de cronómetro se encerraba en otro segundo bien almohadillado, y cada dos de éstos, á su vez, en otra caja también almohadilla y cubierta con una funda de lona.

Dentro de esta última caja, y entre los dos dobles estuches de los cronómetros, se colocó un termómetro que se podía observar desde el exterior á través de unos cristales.

***

Antes de enviarnos el Sr. Ditisheim los cronómetros números 24.602, 24.598, 24.595 y 24.590 se les sometió en el Observatorio de Neuchâtel á las pruebas que señala el reglamento de este centro, y que copio á continuación para que el lector pueda formar idea de las garantías que dicho estudio ofrece.

VI. Chronomètres de poche.

a) *Épreuves de 1.re classe.*

Art. 16. Les chronomètres de poche de 1re classe sont observés dans cinq positions. Les épreuves durent 46 jours répartis en 11 périodes, comme suit:

PÉRIODES	NOMBRE DE JOURS	POSITIONS	TEMPERATURE
1	4	horizontale cadran en haut	ambiante
2	5	„ „	de la glacière (4°)
3	5	„ „	ambiante
4	5	„ „	de l'étuve (32°)
5	5	„ „	ambiante
6	1	verticale pendant en haut	de l'étuve (32°)
7	5	„ „	ambiante
8	4	„ „ à gauche	„
9	4	„ „ à droite	„
10	4	horizontale cadran en bas	ambiante
11	4	„ cadran en haut	„

Le premier jour des périodes 2, 3, 4, 5, 7 et la période 6 ne comptent pas dans le calcul.

Pour obtenir un bulletln de marche les chronomètres de poche de 1.re classe ne doivent pas dépasser les limites suivantes:

1.°	Ecart moyen de la marche diurne	+ 0s,75
2.°	Coefficient thermique	0s,15
3.°	Erreur moyenne de la compensation	2s,00
4.°	Reprise de marche	3s,00
5.°	Différence entre deux marches diurnes consécutives à la température ambiante	2s,00
6.°	Variation des marches moyennes du plat au pendu	4s,00
7.°	Variation des marches moyennes du cadran en haut au cadran en bas	4s,00
8.°	Ecart moyen correspondant à un changement de position	2s,50
9.°	Limite de la marche diurne	6s,00

Los resultados obtenidos se consignan en los resúmenes siguientes:

Chronomètre 24 602.

	Marche diurne moyenne	+ 0s,88
	Somme totale des écarts	± 11s,94
1.	*Écart moyen de la marche diurne*	± 0s,30
	Moyenne des marches des périodes 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11	+ 0s,87
	Somme des écarts de ces marches avec leur moyenne	± 4s,99
2.	*Coefficient thermique*	+ 0s,05
3.	*Erreur moyenne de la compensation*	± 0s,15
4.	*Reprise de marche (périodes 1 et 11)*	+ 1s,30
5.	*Écart moyen correspondant à un changement de position*	± 0s,62
	Variation des marches moyennes du plat au pendu $\left(\text{périodes } 7 - \frac{1+11}{2}\right)$	— 0s,25
	Variation des marches moyennes du cadran en haut au cadran en bas	— 2s,37

Chronomètre 24.598.

	Marche diurne moyenne	— 0s,74
	Somme totale des écarts	± 12s,06
1.	*Écart moyen de la marche diurne*	± 0s,30
	Moyenne des marches des périodes 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11	— 1s,21
	Somme des écarts de ces marches avec leur moyenne	± 14s,84
2	*Coefficient thermique*	— 0s,07
3.	*Erreur moyenne de la compensation*	± 0s,65
4.	*Reprise de marche (périodes 1 et 11)*	+ 0s,60
5.	*Écart moyen correspondat à un changement de position*	± 1s,85
	Variation des marches moyennes du plat au pendu $\left(\text{périodes } 7 - \frac{1+11}{2}\right)$	0s,00
	Variation des marches moyennes du cadran en haut au cadran en bas	+ 0s,80

Chronomètre 24.595.

	Marche diurne moyenne	+ 0s,23
	Somme totale des écarts	± 7s,56
1.	*Écart moyen de la marche diurne*	± 0s,19
	Moyenne des marches des périodes 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11	— 0s,18

	Somme des écarts de ces marches avec leur moyenne	± 6s,23
2.	*Coefficient thermique*	— 0s,07
3.	*Erreur moyenne de la compensation*	± 0s,05
4.	*Reprise de marche (périodes 1 et 11)*	+ 0s,03
5.	*Écart moyen correspondant à un changement de position*	± 0s,78
	Variation des marches moyennes du plat au pendu $\left(\text{périodes } 7 - \frac{1+11}{2}\right)$	— 1s,00
	Variation des marches moyennes du cadran en haut au cadran en bas	— 1s,35

Chronomètre 24.590.

	Marche diurne moyenne	— 1s,43
	Somme totale des écarts	± 11s,00
1.	*Écart moyen de la marche diurne*	± 0s,27
	Moyenne des marches des périodes 1, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11	— 1s,55
	Somme des écarts de ces marches avec leur moyenne	± 9s,61
2.	*Coefficient thermique*	+ 0s,05
3	*Erreur moyenne de la compensation*	± 0s,40
4.	*Reprise de marche (périodes 1 et 11)*	+ 1s,05
5.	*Écart moyen correspondant à un changement de position*	± 1s,20
	Variation des marches moyennes du plat au pendu $\left(\text{périodes } 7 - \frac{1+11}{2}\right)$	— 2s,90
	Variation des marches moyennes du cadran en haut au cadran en bas	+ 0s,12

Para comprobar si los cronómetros habían sufrido alteración durante el transporte de Neuchâtel á Madrid, y á la vez para hacer un primer estudio de su marcha, les sometimos durante unos días antes de empezar el trabajo á comparaciones cronográficas con el reloj magistral del Observatorio de Madrid Strasser Rhode, núm. 222.

Con este objeto, colocamos los cronómetros encerrados en sus triples cajas, sobre una mesa situada en la misma sala donde está emplazado el citado magistral, en forma tal, que no era necesario moverlos para llevar á cabo dichas compa-

raciones, ni aun para darlos cuerda, operación que se hacía diariamente á la misma hora.

Para tal trabajo disponíamos de un gran cronógrafo unido á un reloj eléctrico Peyer Favarger & C.ie (Neuchâtel), ambos instrumentos pertenecientes al citado Observatorio de Madrid, efectuándose las comparaciones en la forma siguiente:

Se transmitían eléctricamente al cronógrafo treinta señales correspondientes á otros tantos segundos consecutivos del reloj Strasser, y con ello deducíamos el estado relativo del reloj Strasser con relación al Peyer, etc., en ese momento.

A continuación se transmitían también al cronógrafo, eléctricamente, los instantes correspondientes á treinta segundos de cada uno de los cronómetros, que de ese modo quedaban comparados con el reloj Peyer, etc.

Por último, se volvía á comparar el reloj Strasser con el Peyer, etc., durante treinta segundos.

Todas estas operaciones eran precedidas y seguidas por una determinación de la paralaje de las plumas.

Con la primera y última comparación del Strasser y el Peyer, etc., conocido el estado absoluto del primero por precisas observaciones diarias de los Astrónomos, calculábamos el estado absoluto del Peyer, etc., en el momento medio del conjunto de las comparaciones, y con tal estado y las comparaciones de los cronómetros los estados absolutos de estos relojes.

Diariamente anotamos también la temperatura de los termómetros del interior de las cajas, y con este dato y las curvas del termógrafo que el Observatorio Astronómico tiene instalado en la sala donde operábamos, conocimos la marcha de las temperaturas á que nuestros relojes se vieron sometidos durante este período.

No descuidamos tampoco la anotación de las presiones.

En el *Cuadro* siguiente puede verse un ligero resumen de los resultados de las comparaciones efectuadas, que duraron desde el 1.° de Octubre al 28 del mismo mes.

FECHA	MOVIMIENTOS DE LOS CRONÓMETROS EN 24 HORAS				Temperatura	Presión.
	24.602	24.598	24.595	24.590		
	s	s	s	s	o	mm
1 Octubre.					22,3	709,6
2 —	+ 1,29	+ 1,85	+ 0,03	— 1,36	22,3	708,7
3 —	+ 1,06	+ 2,41	+ 0,84	— 1,88	21,6	709,5
4 —	+ 0,43	+ 1,06	— 0,15	— 0,56	22,0	711,3
5 —	+ 1,08	+ 2,00	— 0,37	— 1,48	21,8	710,1
6 —	+ 1,10	+ 2,02	+ 0,00	— 0,96	21,9	708,3
7 —	+ 1,17	+ 2,02	+ 0,03	— 0,87	21,9	710,2
8 —	+ 1,24	+ 1,68	+ 0,09	— 0,81	21,6	711,1
9 —	+ 0,59	+ 2,38	— 0,26	— 0,83	21 5	708,9
10 —	+ 1,46	+ 1,37	— 0,48	— 1,13	21,4	708,9
11 —	+ 1,32	+ 2,25	— 0,10	— 0,54	20,7	709,7
12 —	+ 1,09	+ 1,73	+ 0,16	— 0,63	20,5	707,1
13 —	+ 1,04	+ 2,16	— 0,12	— 0,91	20,4	706,8
14 —	+ 0,87	+ 1,38	— 0,36	— 1,05	20,4	705,4
15 —	+ 0,88	+ 1,56	+ 0,71	— 0,78	19,4	703,3
16 —	+ 1,46	+ 1,54	+ 0,73	— 0,69	18,5	706,4
17 —	+ 0,84	+ 1,26	+ 0,59	— 0,94	18,2	707,1
18 —	+ 0,99	+ 1,29	+ 0,49	— 0,63	18,1	706,3
19 —	+ 0,92	+ 1,25	+ 0,18	— 1,08	17,9	706,4
20 —	+ 1,00	+ 1,38	+ 0,19	— 0,99	17,1	707,4
21 —	+ 0,99	+ 1,59	— 0,07	— 0,92	16,9	707,6
22 —	+ 1,15	+ 1,10	— 0,36	— 0,89	16,9	702,8
23 —	+ 1,22	+ 1,44	— 0,40	— 0,78	16,0	701,1
24 —	+ 1,06	+ 1,83	— 0,32	— 1,08	15,5	702,8
25 —	+ 0,94	+ 1,55	— 0,02	— 0,74	15,4	703,7
26 —	+ 0,74	+ 1,42	+ 0,06	— 1,15	14,8	704,5
27 —	+ 0,76	+ 1,44	— 0,40	— 0,89	13,9	709,0
28 —	+ 1,26	+ 1,13	+ 0,37	— 1,02	14,1	712,0

Mientras yo hacía el estudio anterior, el Sr. Barandica, acompañado del Sr. Espuñes, preparó los pequeños observatorios de Desierto de las Palmas y Barcelona; de ese modo el día 28 pude salir para Desierto de las Palmas, empezando la determinación de la diferencia de longitud.

Según dijimos antes, nos proponíamos comparar nuestros cronómetros con relojes de buena marcha, comprobada frecuentemente lo más próximamente posible á la salida y llegada de cada viaje.

De la marcha de los relojes que nos sirvieron para la comparación, dan idea los cuadros siguientes:

Reloj Straner Rhode, núm. 222.

(Normal en el Observatorio Astronómico de Madrid.)

FECHAS	Movimientos en 24 horas.	FECHAS	Movimientos en 24 horas.	FECHAS	Movimientos en 24 horas.
	s		s		s
1 Octubre		27 Octubre	— 0,04	18 Dicbre..	— 0,37
2 —	+ 0,30	28 —	— 0,04	19 —	— 0,22
3 —	+ 0,33	29 —	+ 0,03	20 —	— 0,34
4 —	+ 0,28	18 Novbre.	— 0,09	21 —	— 0,82
5 —	+ 0,21	19 —	— 0,02	22 —	— 0,23
6 —	+ 0,27	20 —	— 0,16	23 —	— 0,41
7 —	+ 0,31	21 —	— 0,11	24 —	— 0,41
8 —	+ 0,32	22 —	— 0,11	25 —	— 0,40
9 —	+ 0,19	28 —	— 0,08	26 —	— 0,41
10 —	+ 0,24	29 —	— 0,11	27 —	— 0,41
11 —	+ 0,21	30 —	— 0,09	28 —	— 0,40
12 —	+ 0,22	1 Dicbre..	+ 0,03	29 —	— 0,46
13 —	+ 0,20	2 —	— 0,17	30 —	— 0,41
14 —	+ 0,10	3 —	— 0,11	31 —	— 0,35
15 —	+ 0,07	4 —	— 0,08	1 Enero .	— 0,30
16 —	+ 0,26	5 —	— 0,07	2 —	— 0,34
17 —	+ 0,10	6 —	— 0,07	3 —	— 0,19
18 —	+ 0,11	7 —	— 0,24	4 —	— 0,15
19 —	+ 0,05	10 —	— 0.33	5 —	— 0,33
20 —	— 0,01	11 —	— 0,38	6 —	— 0,31
21 —	+ 0,05	12 —	— 0,32	7 —	— 0,34
22 —	— 0,10	13 —	— 0,32	8 —	— 0,32
23 —	— 0,10	14 —	— 0,41	9 —	— 0,62
24 —	— 0,00	15 —	— 0,40	10 —	— 0,45
25 —	— 0,03	16 —	— 0,41	11 —	— 0,50
26 —	— 0,03	17 —	— 0,30	12 —	— 0,49

DESIERTO DE LAS PALMAS		BARCELONA	
Reloj Straner, núm. 278.		Cronómetro Nardin, 7/5845.	
FECHAS DE OBSERVACIÓN	MOVIMIENTOS EN 24 HORAS	FECHAS DE OBSERVACIÓN	MOVIMIENTOS EN 24 HORAS
	s		s
31 Octubre.....		9 Noviembre. .	
1 Noviembre....	— 3,84	10 —	+ 2,93
2 —	— 4,29	11 —	+ 3,11
4 —	— 4,65	12 —	+ 3,14
5 —	— 4,05	13 —	+ 3,23
28 —	— 4,06	17 —	+ 3,40
1 Diciembre....	— 4,05	18 —	+ 3,75
2 —	— 4,11	21 —	+ 3,50
10 —	— 4,11	22 —	+ 3,95
		23 —	+ 3,76
		24 —	+ 3,75
		25 —	+ 3,79
		26 —	+ 3,70
		3 Diciembre ...	+ 3,77
		4 —	+ 3,79
		5 —	+ 3,84
		7 —	+ 3,87

Ya hemos dicho que en Madrid los Astrónomos del Observatorio hacían diariamente una cuidadosa determinación de hora por medio del anteojo meridiano.

En Desierto de las Palmas y Barcelona fué el Sr. Barandica, según dijimos, el encargado del servicio de hora, utilizando para ello los anteojos de Repsold, cronógrafos y relojes de que á su tiempo hablamos.

Este señor, en armonia con los instrumentos citados, y también muy principalmente no olvidando la necesidad de

dar facilidad á la determlnación de hora, para aprovechar los momentos de cielo despejado, no muy frecuentes en esta época insegura del año, adoptó el sistema de observar alternativamente con el ocular del anteojo al E y al W, parejas de estrellas formadas por una ecuatorial y otra circuncenital.

Como deseábamos la mayor precisión en el citado método, observó el señor Barandica, siempre que pudo, hasta seis parejas de estrellas.

Para el cálculo del estado ΔH del reloj, empleamos las fórmulas siguientes:

$$\Delta H \pm Cc = \alpha - H - (R\rho + N\nu) \begin{cases} \text{Ocular al E.} \\ \text{Ocular al W.} \end{cases}$$

Siendo:

$$\nu = \frac{1}{2}(i + i'), \qquad \beta = \alpha - H - (\alpha' - H') \qquad N = \sec\varphi,$$

$$R = \frac{\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\delta' - \operatorname{tg}\delta} \qquad \text{y} \qquad C = \sec\delta + R(\sec\delta' - \sec\delta),$$

fórmula en que las letras α, δ, H, i, φ representan, como de costumbre, los valores de la ascensión recta, declinación y hora de paso de cada estrella por el meridiano registrado en el cronógrafo, inclinación del eje de muñones del anteojo de pasos y la latitud del lugar.

Del resultado de toda esta parte del trabajo podemos decir que el error medio de una determinación de hora en Desierto y Barcelona no pasará de $\pm 0^s,08$.

Las comparaciones de los cronómetros con los relojes las hice yo, tanto á la salida y llegada de los viajes como durante la permanencia de los cronómetros con cada localidad, siempre en la forma que se dijo en el Capítulo anterior, si bien en Desierto y Barcelona la comparación de los cronómetros se efectuaba directamente con los relojes magistrales, por estar éstos unidos eléctricamente con el cronógrafo.

El error medio de cada una de estas comparaciones fué siempre inferior á $\pm 0^s,05$.

Para que se pueda formar juicio lo más exacto posible respecto á los resultados de los cronómetros en los diferentes trozos del viaje, será preciso consignemos detalladamente las condiciones en que se efectuaron los transportes, completando lo dicho en el Capítulo I.

En la cortísima distancia que hay entre el Observatorio y la Estación del Mediodía se llevaron los cronómetros suspendiendo las cajas de sus asas de cuero para que los relojes conservasen su posición horizontal, y del mismo modo se hizo entre la Estación del ferrocarril en Barcelona y el Parque de esta población, sitio de nuestras observaciones, según se ha dicho.

En los transportes en ferrocarril iban las cajas sobre los mullidos asientos, siendo los viajes efectuados entre Benicasim y Madrid y entre Benicasim y Barcelona muy malos por las condiciones del material y desigual calefacción, mientras que fueron muy buenos en los trenes rápidos que circulan entre Barcelona y Madrid.

Las subidas desde Benicasim al vértice del Desierto se transportaron, según dijimos, en mochilas palomillas, y quedamos satisfechos de este medio de transporte, porque con la marcha reposada y cadenciosa de los mochileros los relojes sólo experimentaban suaves movimientos de ascenso y descenso.

El transporte en faetón desde Castellón á Benicasim fué una durísima prueba, no sólo por las medianas condiciones del carruaje, sino también por el pésimo estado de la carretera.

En el cuadro inserto á continuación consigno los estados absolutos de los cronómetros del día de la observación, debiéndose advertir que llamo estado absoluto el adelanto ó atraso del cronómetro á las veinticuatro horas de tiempo sidéreo del primer meridiano, que para nosotros es Madrid.

FECHA	HORAS de observación (t. s.)	ESTADOS ABSOLUTOS Á 24 HORAS (T. S.)				Temperatura	Presión.
		CRONÓMETRO — 24.602.	CRONÓMETRO — 24.598.	CRONÓMETRO — 24.595.	CRONÓMETRO — 24.590.		
	s	m s	m s	m s	m s	°	mm
28 Oct.	19,8	+ 1.19,89	+ 1.08,50	+00.20,05	—00.28,77	14,1	712,0
30 —	24,3	+16.13,84	+16.03,67	+15.14,69	+14.22,24	16,6	704,7
31 —	21,5	+16.14,86	+16.05,23	+15.14,86	+14.20,81	15,3	704,4
1 Nov.	23,9	+16.16,06	+16.07,30	+15.14,82	+14.19,87	14,7	704,0
2 —	22,6	+16.17,19	+16.09,27	+15.15,76	+14.18,68	14,3	702,3
4 —	20,7	+16.20,00	+16.13,05	+15.16,54	+14.16,46	14,2	697,4
5 —	22,3	+16.21,18	+16.14,47	+15.17,05	+14.14,49	14,5	696,4
9 —	22,3	+25.06,34	+24.57,24	+23.57,76	+22.48,98	16,5	761,6
10 —	21,8	+25.08,49	+24.58,58	+23.58,32	+22.47,67	16,3	768,2
11 —	21,7	+25.10,78	+24.59,94	+23.59,20	+22.46,60	16,1	769,4
12 —	22,3	+25.13,03	+25.01,45	+24.00,42	+22.45,48	16,0	769,1
13 —	21,6	+25.15,16	+25.03,13	+24.00,99	+22.44,14	15,9	769,0
17 —	3,0	+25.24,31	+25.07,93	+24.04,98	+22.39,19	15,5	767,8
18 —	22,6	+25.26,93	+25.09,90	+24.06,61	+22.38,22	15,3	767,2
19 —	22,7	+ 1.57,81	+ 1.40,50	+00.37,63	—00.53,52	17,1	709,8
20 —	22,9	+ 1.58,95	+ 1.42,57	+00.37,52	—00.54,87	12,2	709,2
21 —	20,6	+ 2.00,14	+ 1.45,47	+00.36,85	—00.56,56	11,5	710,6
22 —	3,5	+25.31,18	+25.16,21	+24.08,21	+22.32,92	15,8	764,9
23 —	22,0	+25.33,49	+25.17,01	+24.08,63	+22.31,29	14,5	762,6
24 —	22,9	+25.36,12	+25.18,03	+24.09,33	+22.29,92	14,6	769,2
25 —	23,6	+25.38,86	+25.20,25	+24.10,28	+22.29,14	14,0	768,9
26 —	3,2	+25.41,40	+25.21,58	+24.11,34	+22.27,81	13,7	770,9
27 —	22,5	+25.43,78	+25.22,65	+24.12,07	+22.26,47	13,7	771,4
28 —	2,4	+17.07,86	+16.46,97	+15.36,53	+13.48,83	14,7	703,2
29 —	11,5	+17.09,56	+16.48,68	+15.35,82	+13.46,66	12,5	703,7
30 —	1,9	+ 2.16,55	+ 1.56,81	+00.44,36	— 1.05,83	16,0	712,9
1 Dic.	22,4	+ 2.18,29	+ 1.59,27	+00.47,73	— 1.07,00	13,5	713,0
2 —	22,6	+17.11,90	+16.52,75	+15.37,07	+13.46,33	14,7	704,3
3 —	12,1	+17.13,61	+16.54,95	+15.36,41	+13.44,45	14,6	705,5
3 —	1,1	+25.50,87	+25.32,21	+24.14,63	+22.23,00	15,7	769,2
4 —	22,9	+25.53,30	+25.34,56	+24.15,02	+22.21,91	16,6	769,2
5 —	22,9	+ 2.24,12	+ 2.05,81	+00.45,97	— 1.09,16	10,0	712,4
6 —	12,7	+ 2.25,56	+ 2.08,91	+00.45,46	— 1.10,79	9,7	710,1
6 —	5,2	+25.55,92	+25.38,36	+24.16,48	+22.19,94	13,4	768,5
7 —	2,0	+25.57,91	+25.39,57	+24.17,33	+22.18,57	12,5	768,0
8 —	23,4	+26.00,23	+ 25.41,09	+24.18,05	+22.17,32	14,6	770,2
9 —	22,0	+17.23,44	+17.05,25	+15.42,11	+13.39,09	16,0	702,5
10 —	8,3	+17.24,85	+17.07,99	+15.42,39	+13.37,78	11,5	703,1
12 —	2,6	+ 2.35,11	+ 2.17,96	+00.53,16	— 1.17,68	9,5	705,0

Creímos conveniente, después de terminar nuestro trabajo el 12 de Diciembre, comprobar la marcha de los cronómetros en reposo durante un período de un mes, siendo los resultados los consignados en el cuadro siguiente:

FECHA	MOVIMIENTOS DE LOS CRONÓMETROS EN 24 HORAS				Temperatura	Presión.
	24.602	24.598	24.595	24.590		
	s	s	s	s	o	m
13 Dicbre.	+ 1,87	+ 2,42	— 1,60	— 0,33	9,7	706,9
15 —	+ 1,68	+ 2,00	— 1,51	— 1,98	9,6	697,9
16 —	+ 1,88	+ 2,58	— 1,43	— 1,03	9,6	698,0
17 —	+ 1,75	+ 2,24	— 1,24	— 1,76	9,0	705,1
18 —	+ 1,73	+ 1,95	— 1,50	— 1,25	9,0	709,1
19 —	+ 0,61	+ 1,68	— 1,78	— 1,80	9,0	713,0
20 —	+ 2,27	+ 2,67	— 1,12	— 0,98	9,0	711,1
21 —	+ 1,76	+ 2,23	— 1,12	— 1,76	9,0	710,3
22 —	+ 1,85	+ 1,86	— 1,27	— 1,23	8,8	708,7
23 —	+ 2,14	+ 1,66	— 1,36	— 1,90	8,5	706,6
24 —	+ 1,92	+ 2,71	— 1,44	— 1,52	8,0	704,7
25 —	+ 2,23	+ 2,05	— 1,22	— 1,62	8,7	698,8
26 —	+ 1,48	+ 1,96	— 0,73	— 1,56	7,8	704,0
27 —	+ 1,55	+ 2,05	— 1,22	— 1,31	7,7	705,0
28 —	+ 2,22	+ 1,69	— 0,43	— 1,71	7,5	706,2
29 —	+ 1,56	+ 2,09	+ 0,70	— 1,39	7,0	706,7
30 —	+ 1,56	+ 1,89	+ 1,46	— 1,53	7,3	711,9
31 —	+ 1,55	+ 1,88	+ 0,15	— 1,39	7,2	714,9
1 Enero.	+ 2,23	+ 2,02	— 0,98	— 1,35	6,8	715,7
2 —	+ 1,95	+ 2,30	+ 1,40	— 1,23	7,1	716,8
3 —	+ 1,53	+ 1,90	+ 1,15	— 0,94	6,5	715,7
4 —	+ 2,58	+ 2,05	— 0,20	— 1,07	6,3	716,2
5 —	+ 1,97	+ 1,84	+ 0,03	— 1,44	6,8	717,6
6 —	+ 0,52	+ 2,20	— 0,88	— 0,97	7,1	715,8
7 —	+ 1,77	+ 2,74	+ 0,13	— 1,45	6,9	713,8
8 —	+ 0,54	+ 2,55	— 0,15	— 0,70	6,7	709,1
10 —	+ 2,93	+ 2,03	— 0,68	— 1,31	6,3	708,2
11 —	+ 1,92	+ 2,46	+ 0,30	— 0,93	6,4	711,4
12 —	+ 0,91	+ 3,43	+ 1,08	— 1,01	6,5	713,3

CÁLCULO DE LAS DIFERENCIAS DE LONGITUD

Dos clases de factores intervienen en el cálculo de las longitudes: los estados absolutos correspondientes á los cronómetros en los puntos de observación y sus movimientos más probables durante el viaje de uno á otro punto.

Depende la precisión con que se obtengan los estados absolutos, de la corrección de los métodos empleados en las determinaciones de hora de los relojes magistrales y en la comparación de éstos con los cronómetros, y se comprende fácilmente, que si se dispone de instrumentos astronómicos buenos y se trabaja con esmero, podrá llegarse á obtener excelentes resultados.

Ya hemos dicho los procedimientos que nosotros empleamos, por creerlos más apropiados á los elementos y circunstancias en que se efectuaron estos trabajos.

No está del mismo modo en manos del observador el acercarse al conocimiento exacto de los movimientos de los cronómetros durante los viajes, puesto que, como hemos dicho, es en ellos muy irregularmente variable la temperatura, la presión y la humedad, y además se ven sometidos á sacudidas inevitables en todos sentidos, sin que nos sea dable determinar su influencia, por su variedad é incalculable intensidad.

Por consiguiente, es preciso contentarse con deducir tales valores de la marcha de los cronómetros en épocas próximas, y claro es que la mayor ó menor semejanza de los resultados obtenidos en el cálculo de las longitudes que con esos valores se obtengan, en las diferentes y variadas condiciones de observación en que se trabaje, darán idea de la mayor ó menor influencia de las causas perturbadoras en las marchas de los cronómetros, objeto principal de este trabajo.

Aunque de un modo gradual y no muy sensible, han ido variando los movimientos de los cronómetros en el curso de

este ensayo; por consiguiente, no creemos puede tomarse como movimiento correspondiente á los diferentes viajes, el que se deduzca de la observación de los cronómetros en los períodos anterior y posterior al trabajo. Además, como son muy frecuentes las determinaciones de estados de reloj, parece natural acudir á los datos que estén más próximos á la época del viaje, y nos ha parecido que, toda vez que las observaciones se han dividido en cuatro periodos, todos con el punto de partida y llegada en Madrid, asimismo debíamos sujetar el estudio del movimiento á la misma división.

Creemos que con esto aislamos más los errores de cada viaje y conoceremos mejor la influencia de las circunstancias en que cada uno de ellos se ha realizado, y pensábamos también que, con la organización dada á los mismos, podíamos esperar que, al reunir los resultados de los cuatro, se eliminarían algunas de las causas perturbadoras de presentación gradual en uno ú otro sentido.

Empleamos para el cálculo de los movimientos más probables en cada uno de los cuatro períodos un mètodo semejante al Daussy.

Ahora bien, como el empleo del citado método exige el conocimiento aproximado del movimiento del reloj y de la longitud de los lugares de observación para la reducción de los estados al lugar inicial elegido, tuvimos que calcular un valor aproximado de estos dos datos.

Dedujimos los movimientos aproximados de los cronómetros en el conjunto de la campaña, de los estados absolutos en Madrid el 28 de Octubre y el 12 de Diciembre, fecha de la primera salida y último regreso á Madrid, y con los cuatro movimientos así obtenidos calculamos los valores provisionales de las diferencias de longitud buscadas.

Corregidos los estados de los cronómetros por las diferencias de longitud, aplicando el método ya citado y corregidos los movimientos de la influencia de la temperatura, aplicando los coeficientes térmicos para referirlos á la media de la

campaña 14°,2, obtuvimos los movimientos más probables para cada cronómetro y recorrido, resultando los 16 valores siguientes:

MOVIMIENTOS MAS PROBABLES

RECORRIDOS	Cronómetro n.° 24.602.	Cronómetro n.° 24.598.	Cronómetro n.° 24.595.	Cronómetro n.° 24.590.
1.er recoarido.. ...	+ 1 s,67	+ 1 s,53	+ 0 s,77	— 1 s,14
2.o recorrido. ...	+ 2 s,11	+ 1 s,38	+ 0 s,78	— 1 s,11
3.er recorrido.. ...	+ 1 s,51	+ 1 s,81	+ 0 s,56	— 0 s,68
4.o recorrido.....	+ 1 s,63	+ 1 s,74	+ 0 a,11	— 1 s,32

Con estos valores pudimos obtener las diferencias de longitud que se engloban en el siguiente *Estado:*

DIFERENCIAS DE LONGITUD

Madrid - Desierto.

CRONÓMETROS	1.er Recorrido.	2.o Recorrido.	3.er Recorrido.	4.o Recorrido.
24.602	14m.50 s,61	14m.55 s,12	14m.52 s,10	14m.53 s,00
24 598	52 s,11	53 s,25	51 s,67	53 s,51
24.595	53 s,10	52 s,24	52 s,78	49 s,45
24.590	53 s,29	51 s,38	54 s,01	52 s,82

Desierto - Barcelona.

CRONÓMETROS	1.er Recorrido	2.o Recorrido.	3.er Recorrido.	4.o Recorrido.
24.602	8m.38 s,48	8m.38 s,03	8m.37 a,26	8m.38 s,42
24.598	36 s,65	37 s,06	37 s,26	37 s,58
24.595	37 s,63	36 s,32	38 s,22	36 s,05
24.590	39 s,05	36 s,53	38 s,55	36 s,91

Madrid - Barcelona.

CRONÓMETROS	1.er Recorrido.	2.o Recorrido.	3.or Recorrido.	4.o Recorrido.
24.602	23m.30s,79	23m.28s,93	23m.30s,69	23m.30s,36
24 598	30 2,93	29s,36	30s,56	29s,45
24 595	29s.75	30s,58	29s,61	31s,02
24.590	30s,60	30s,59	30s,39	30s,73

Los valores más probables para las diferencias de longitud buscadas, serán:

Madrid-Desierto..... = + 14m 52s,52
Desierto-Barcelona..... = + 8 37 ,50
Barcelona-Madrid..... = — 23 30 ,27

Las sumas de los cuadrados de las diferencias entre los valores más probables y los diversos encontrados, pueden agruparse de diferentes modos.

Agrupados por las diferencias de longitud, nos da:

Madrid-Desierto..... $\Sigma\ v^2 = 27,3284$
Desierto-Barcelona..... $\Sigma\ v^2 = 6,0726$
Barcelona-Madrid..... $\Sigma\ v^2 = 11,9496$

Por cronómetros:

Número 24.602..... $\Sigma\ v_1^2 = 15,2107$
— 24.598..... $\Sigma\ v_1^2 = 5,4039$
— 24.595..... $\Sigma\ v_1^2 = 15,3021$
— 24.590..... $\Sigma\ v_1^2 = 9,4339$

Por períodos:

1.er período..... $\Sigma\ v_2^2 = 9,9331$
2.o período..... $\Sigma\ v_2^2 = 14,3009$
3.er período..... $\Sigma\ v_2^2 = 5,6332$
4.o período..... $\Sigma\ v_2^2 = 15,4834$

La primera agrupación es muy interesante por acusar perfectamente las condiciones de mayor ó menor bondad de los medios de comunicación empleados en los viajes y en perfecto acuerdo con lo que dijimos en el Capítulo I de la presente *Memoria.*

Hecho el cálculo de errores, nos da para los más probables, los valores

Madrid-Desierto.	r_0'	$= \pm 0^s,23$
Desierto-Barcelona	r_0''	$= \pm 0\ ,15$
Barcelona-Madrid.....	r_0'''	$= \pm 0\ ,11$

Por tanto, tendremos finalmente:

DIFERENCIAS DE LONGITUD

Madrid-Desierto.	$= + 14^m\ 52^s,52 \pm 0^s,23$
Desierto-Barcelona...	$= + 8^m\ 37^s,50 \pm 0^s,15$
Barcelona-Madrid	$= - 23^m\ 30^s,27 \pm 0^s,11$

Y el cierre del triángulo Madrid-Desierto-Barcelona, será:

$$- 0^s,25.$$

Comparando los valores por nosotros obtenidos con los deducidos por el método telegráfico entre Madrid y Desierto por los Sres. Borrés y Esteban en el año 1891, resulta:

Diferencia de longitud. — MADRID-DESIERTO DE LAS PALMAS	Borrés-Esteban (1891).....	$+ 14^m\ 53^s,220$
	Galbis-Barandica (1908) ...	$+ 14^m\ 52^s,52$
	Diferencia..	$0^s,70$

Del mismo modo entre Madrid-Barcelona:

Diferencia de longitud. — MADRID-BARCELONA	Borrés-Esteban (1897).. . . .	$+ 23^m\ 30^s,693$
	Galbis-Barandica (1908)....	$+ 23^m\ 30^s,27$
	Diferencia..	$0^s,42$

Como se ve, la precisión del resultado obtenido excede á

lo que podía esperarse, dadas las condiciones en que se llevó á cabo este trabajo.

Por consiguiente, lo utilísimo de tal procedimiento, permitirá al Instituto Geográfico sembrar el territorio español de determinaciones de diferencia de longitud, y plácemes merece por ello el Sr. Mier, á quien se debió también en el año 1903 la implantación del rápido método de determinaciones relativas de la intensidad de la fuerza de gravedad y hoy el importante servicio sismológico que se está montando.

Creo no debo terminar este artículo sin consignar la organización que debe darse á los trabajos que en lo sucesivo se realicen, como consecuencia de las enseñanzas que proporcionó este ensayo.

Comoquiera que en poco aumenta las molestias del transporte el hacer el trabajo con algunos cronómetros más, y en cambio aumentaría la posición del procedimiento, entiendo debía disponerse de otros dos cronómetros, por lo menos.

Siendo las principales características de este método las economías de tiempo y dinero, será preciso tender á dar á éstas el mayor valor posible, y con tal objeto debe suprimirse la instalación de Observatorios provisionales; y como, por otra parte, es necesario que las determinaciones de la hora sean muy precisas, habrá que disponer los elementos de modo que se pueda cumplir esta última condición.

Para ello debe utilizarse, en primer lugar, un buen instrumento universal portátil de los modernos modelos, que construyen las casas Bamberg ó Salmoraghi, alemana é italiana, respectivamente, y observar con el sobre pilares de ladrillo, previamente contruídos; este instrumento será el mismo en todos los puntos de observación y único el operador que efectúe el trabajo; de este modo no habrá que temer los errores debidos á ecuaciones personales ni á variedad de instrumentos. En segundo lugar, las determinaciones de hora y las comparaciones de unos cronómetros con otros, se harán cronográficamente, y, por consiguiente, es necesario dis-

poner de un cronógrafo portátil, que manejado por un auxiliar, pueda acompañar al operador en todos los lugares de observación.

Naturalmente, dicho cronógrafo debe poderse instalar en pocos minutos y con gran sencillez, condiciones que, entre otros modelos, reune el que construye la casa Ditisheim, el cual está encerrado en una caja con un buen cronómetro interruptor eléctrico de segundos y las pilas secas necesarias para su fucionamiento, todo dispuesto para poderse utilizar en el momento que sea necesario.

Es conveniente también estudiar una suspensión para las cajas de los cronómetros que permita disminuir las alteraciones que produzca las sacudidas á que se ven sometidos en los trenes y carruajes.

Con tales elementos, y eligiendo anualmente los puntos de observación de modo que se pudiesen recorrer con un itinerario de figura cerrada, el trabajo se haría del modo siguiente:

Antes de empezar la campaña, un auxiliar construiría pequeños pilares de observación en los puntos elegidos.

El operador, partiendo de Madrid, recorrería el itinerario elegido en uno y otro sentido alternativamente un número par de veces, deteniéndose en cada punto el tiempo necesasario para hacer dos determinaciones de hora, que, naturalmente, es convenientísimo sean en días sucesivos é inmediatos á la llegada y salida del punto de observación.

En caso de que el mal estado del cielo no permitiese hacer determinación de la hora el día de llegada, se compararán todos los cronómetros cronográficamente entre sí, y esto mismo se hará cuantos días no se pueda determinar su estado astronómicamente.

A la campaña debe preceder y seguir un período de estudio de los cronómetros en el Observatorio astronómico de Madrid.

Es también necesario determinar las constantes de densi-

dad del aire de los cronómetros, trabajo que convendría encomendar al constructor, primero, por disponer de elementos apropiados, y segundo, porque esto le permitiría ir introduciendo modificaciones en las comparaciones de sus máquinas, hasta hacerlas casi insensibles á los cambios atmosféricos.

Cumpliendo el anterior programa, y eligiendo la época del año de modo que sean de esperar muchas noches despejadas, seguramente en menos de tres meses se podrían hacer hasta ocho diferencias de longitud.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Universitá di Sassari.—Studi Sassaresi. Pubblicati per cura di alcuni Professori della...—Anno V, Sez II, Supplemento núm. 1 3.—Sassari, 1907-1908.

Bureau of Standards.—Department of Commerce and Labor.—Bulletin of the... Vol. 4, N.º 1.—Washington, 1907.

Smithsonian Institution.—Smithsonian Miscellaneous Collections.—Quarterly Issue.—Vol. III, Part. 4; ídem. IV, íd. 1; íd. XLIX.—N.º 1717-1770-1721.—City of Washington, 1907.

Reale Accademia Peloritana.—Resoconti delle Tornate delle Classi (Marzo, Aprile-giugno, 1907).—Messina, 1907.

Kungl. Svenska Vetenskapsakademiens.—Arsbok för ar, 1907.—Upsala & Stockholm, 1907.

Philosophical Society of Washington.—Bulletin.—Vol. XV, pp. 27-56.—Washington, July, 1907.

Ohio State University.—Bulletin.—Vol. XI, N.º. 15.—June, 1907.

Leyst (Prof. Dr. Ernst)—Meteorologische Beobachtungen in Moskau im jahre, 1905.

American Museum of Natural History.—Bulletin of the...—Vol. XVIII, Part. IV, pp. 279 454. New York, May I, 1907.

American Museum of Natural History.—Anthropological Papers of the...—Vol. I, Part. III.—New York, May, 1907.

Instituto y Observatorio de Marina de San Fernando. Almanaque Náutico para el año 1909, calculado de orden de la Superioridad en el...—Sección tipográfica del Observatorio, 1907.

Instituto de Reformas Sociales.—Estadística de las Huelgas (1906).—Memoria que presenta la Sección 3.ª técnico administrativa.—Madrid, 1908.

Instituto de Reformas Sociales.—Sección primera.—Proyecto de reforma de la ley de accidentes del trabajo de 30 de Enero de 1900.—Madrid, 1908.

Real Academia de Jurisprudencia y Legislación.—Discurso resumen del curso de 1906 á 1907, leído por el Secretario general D. César Davara Pereira.—Madrid.

Real Academia de Jurisprndencia y Legislación.—Discurso leído por el Excelentísimo Sr. D. Eduardo Dato Iradier, Presidente de la... en la sesión inaugural del curso de 1907 á 1908, celebrado en 21 de Enero de 1908.—Madrid, 1908.

Escuela especial de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.—Catálogo de la Biblioteca.—Primer suplemento, Segundo ídem, Tercero íd.—Madrid, 1875, 1883, 1896, 1905.

(Se continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

VI.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia segunda 97

VII.—Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones del borde de los astros *(conclusión)*, por *Vicente Ventosa* 116

VIII.—Consideraciones acerca de algunos métodos empleados en el análisis de las aguas minerales, por *José Casares Gil* 131

IX.—Observaciones morfológicas sobre la sangre de Llama (Auchenia Lama), por *Gustavo Pittaluga* 141

X.—Procedimiento rápido de valoración del vanadio en los minerales y productos industriales vanadíferos, por *E. Piñerúa Alvarez* 160

XI.—Reacciones del cinc, el níquel y el cobalto, utilizables en análisis, por *E. Piñerúa Alvarez* 163

XII.—Determinación de las diferencias de longitud entre Madrid, Barcelona y Desierto de las Palmas (Castellón), por medio del transporte de hora con cronómetros Ditisheim, por *José Galbis* 168

Publicaciones recibidas 196

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 5

(Noviembre de 1909)

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1909

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XIII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia tercera.

SEÑORES:

Al empezar este curso tuve el pensamiento de entrar desde luego en el estudio de la electricidad, y en el de la Física matemática moderna, que con aquélla se relaciona íntimamente, porque vienen á cambiar la Mecánica clásica, ó por lo menos exigen que esta última Ciencia se amplie en lo que se refiere principalmente al movimiento de lo que hoy se llama los átomos eléctricos; pero pensé luego, que antes de abordar esta árdua cuestión, sería conveniente desembarazar el terreno, y preparar el estudio de los nuevos problemas, y si es permitido expresarse de esta manera, armarnos de todas armas antes de acometer la difícil empresa.

La Física matemática, ya parta de la hipótesis mecánica, ya de otra hipótesis cualquiera, tiene que acudir constantemente á las Matemáticas puras, y en ellas, á problemas de cálculo integral y á multitud de cuestiones de análisis, que en nuestros cursos universitarios no suelen estudiarse, ó no se estudian con la extensión, que en nuestro caso se exige.

En la teoría de la elasticidad, que es la que nos ha ocupado hasta aquí, no se necesitan realmente sino teorías matemáticas de las más elementales, no se acude sino á las primeras nociones de la Mecánica; pero en las demás teorías de la Física matemática no sucede lo propio, y por esta

razón, que no hago más que indicar, he creido conveniente dar una especie de introducción sobre cuestiones de análisis para los cursos sucesivos en que estudie la electricidad y el magnetismo.

He aquí por qué en estas conferencias voy á dar algunas ideas elementales, las que considere suficientes para mi objeto, de las teorías que ya indiqué en la conferencia anterior, aunque es probable que en algunas más me ocupe.

Estas materias, según indiqué, eran las siguientes:

1.° Teoría de los vectores.

2.° Como complemento de la teoría anterior, explicaré algunas notaciones de Grassmann, que hoy van estando en uso.

3.° Teorema de Green.

4.° Teorema de Stocks.

Estos dos teoremas son fundamentales y de un uso constante.

5.° Principio de Dirichlet y estudio de las armónicas y de los polinomios de Legendre.

6.° Teorema de Fourier y sus aplicaciones.

Teorema que ya representaba un papel importantísimo en la Física matemática clásica.

7.° Teoría de los cuaternios, de que tanto uso hacen los autores ingleses.

8.° Cálculo simbólico aplicado á la integración de ecuaciones diferenciales, que en las memorias de los matemáticos ingleses también se encuentra frecuentemente.

De todas estas teorías y problemas, sólo diremos lo puramente preciso para las aplicaciones que de ellos hemos de hacer.

Una vez más lo repito, aunque varias veces lo he dicho en mis explicaciones: estas conferencias tienen un doble carácter.

Son muy modestas, y son muy ambiciosas, permítaseme que me exprese de este modo.

Son modestas, porque no pasan de ser elementales; y son ambiciosas, porque mi deseo sería, y es, aunque no llegue á conseguirlo, hacer una enciclopedia de Física matemática clásica y de Física matemática moderna.

Una enciclopedia elemental, en que la materia no se agote ni se abarque en toda su extensión, esto sería absolutamente imposible; pero que pueda servir de base para el estudio de obras y memorias especiales.

Mi labor en esta asignatura se puede condensar en dos palabras: preparación y propaganda de la alta Ciencia.

Es el complemento de la labor que hace muchísimos años emprendí sobre Ciencia popular.

Y claro es, que siempre que la ocasión se presenta, consigno ideas propias, valgan por lo que valieren, que esto queda entregado al juicio del lector imparcial.

Y empecemos, desde luego, la labor propia de las conferencias de este curso.

Teoría de los vectores.

Muy poco hemos de decir de ella, y aun lo poco que nos proponemos decir, pudiéramos excusarlo, porque es bien conocida de los que se dedican al estudio de las Matemáticas en España.

Se enseña en varios centros de instrucción, y en la obra moderna de Mecánica racional, del Sr. D. José Ruiz Castizo, se empieza precisamente por la teoría general de los vectores.

Tenemos, además, otro motivo para no insistir sobre esta materia, y es que, en rigor, para las aplicaciones que hemos de hacer, todos mis discípulos y oyentes y cuantos lean estas conferencias cuando se publiquen, con tal que hayan estudiado la Mecánica racional clásica, siquiera con mediana extensión, conocerán lo más importante de dicha teoría de los vectores, aunque acaso con otro nombre.

Porque si estudiaron la teoría de las fuerzas, su composición, sus sistemas y, sobre todo, la teoría de los pares y de sus ejes, es decir, la preciosa teoría de Poinsot, conocerán de la teoría vectorial lo preciso para seguir sin dificultades mis conferencias.

Y sólo exceptúo de estos conocimientos elementales la multiplicación de vectores, que es ya un simbolismo especial, que tiene su puesto en los métodos de Grassmann, de que hacen frecuente uso algunos escritores modernos; por ejemplo: en una Memoria muy interesante de Max Abraham, titulada «Principios de la Dinámica del electrón», aparece ésta entre otras notaciones y simbolismos, que explicaremos en ocasión oportuna.

En rigor, dicho concepto del vector no es nuevo, se ha empleado muchas veces, aunque con otros nombres, en la Mecánica clásica.

Una fuerza es un vector, que se aplica á un punto determinado.

Una velocidad es un vector también.

Lo es una aceleración, porque es una fuerza.

El eje de un par es un vector, según las definiciones de Poinsot; y más general que los anteriores, porque se puede prescindir del punto de aplicación, como hace Grassmann, en su teoría vectorial.

En suma, como veremos bien pronto, un vector no es más que un concepto abstracto; es una abstracción geométrica y la generalización de muchos conceptos concretos.

Por esto exige algunas explicaciones.

Y empecemos explicando lo que se entiende por vector.

***

Consideremos el espacio indefinido y tres ejes coordenados trirrectangulares x, y, z (figura 1.ª).

Imaginemos un punto A de dicho espacio, punto que estará determinado por sus tres coordenadas.

$$Od = x,$$
$$ad = y,$$
$$Aa = z.$$

Por el punto A consideremos una recta de magnitud determinada $AB = W$, en la cual consideraremos un sentido que es el que marca la flecha, es decir, desde A hacia B.

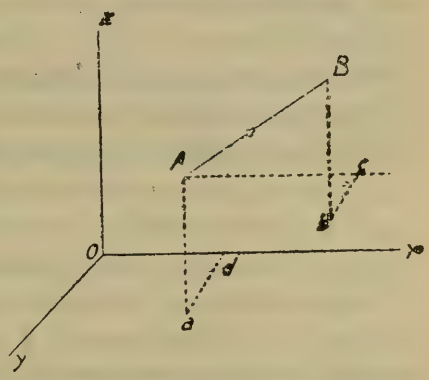


Figura 1.ª

Pues bien; el vector, para el punto A, será dicha recta AB.

1.° Que parte del punto A.

2.° Que tiene una magnitud determinada AB.

3.° Que ocupa determinada posición, la cual podrá definirse de muchas maneras, según enseña la geometría analítica.

Y 4.° Que tiene un sentido en su dirección, lo cual completa la definición del vector.

Por las explicaciones que hemos dado, ó si se quiere por la definición precedente, puede observarse que el vector tiene grandes analogías con la fuerza; no es una fuerza mientras conserve su carácter abstracto, pero podrá llegar á serlo cuando, en un problema determinado, el vector se convierta en fuerza, como decimos.

Insistamos todavía sobre este punto, por más que parezca pueril: para el principiante nada es pueril, y todo, por sencillo que sea, puede llegar á ser motivo de confusión.

El vector, por el pronto, ya lo dijimos antes, es una abstracción, y si se atiende á su origen podemos decir que es una generalización.

Por ejemplo, la aritmética estudia relaciones entre números determinados: 2, 3, 20, 1000....., al menos la aritmética elemental.

Mas aparece el álgebra, y no se fija en ningún número particular, ni entero, ni fraccionario, ni comensurable, ni incomensurable, sino que generaliza y representa los números por letras, y dice: *a*, *b*, *c*..... representan números, ¿cuáles?

Por el pronto, todos ó cualquiera de ellos en particular.

Pues algo así sucede con los vectores.

En el origen de la Física matemática, y aun de la Mecánica racional, no se hablaba de vectores, se hablaba de *fuerzas*, de su composición, de sus sistemas; se hablaba de velocidades, de aceleraciones y también de sus composiciones y descomposiciones; se hablaba de los ejes de los pares de Poinsot, y así sucesivamente, á medida que se extendía el campo de la Física matemática á problemas más y más complejos.

Y como se notó bien pronto que todos estos elementos geométricos y mecánicos tenían multitud de propiedades comunes; como, por ejemplo, dos fuerzas se componían por el paralelogramo, y del mismo modo dos velocidades y por el mismo procedimiento los ejes de los pares; como, por último, en la Física matemática se encontraron conceptos físicos tales, que si se les daba representación geométrica gozaban de las propiedades ya indicadas, ocurrió, ó debió ocurrir, esta idea: dar un nombre genérico, el nombre de vector, á todos estos conceptos que indican idea de dirección, de sentido y de intensidad.

Por eso decimos que el vector es una generalización.

A la manera que en álgebra una letra puede representar cualquier número, pasando de ser concepto abstracto á con-

cepto concreto, así, en la Mecánica moderna, el vector puede representar cualquiera de los elementos que hemos indicado y otros muchos que en las nuevas teorías aparecen, en suma: una fuerza, una velocidad, una aceleración, el eje de un par, el eje de un torbellino, como veremos en su día, un eje magnético y otros varios que puedan ocurrir.

Basta que todos y cada uno de estos conceptos cumpla con las condiciones indicadas: un punto de aplicación, una magnitud, una posición y un sentido.

Será vector, mientras conserve su carácter abstracto. Será fuerza, cuando se convierta en este concepto físico. Y en otro caso cualquiera, tendrá el nombre que le corresponda.

Es, pues, una generalización, según acabamos de explicar, y será, como antes indicábamos, vector mientras conserve su carácter abstracto.

***

Claro es que la palabra vector puede emplearse, y se emplea, en otros sentidos, que tienen con el actual relación más ó menos íntima.

En la teoría de las imaginarias, mejor dicho, en la representación empleada por Cauchy, también pueden considerarse vectores.

Y también se consideran vectores en la teoría de los cuaternios, y otro tanto podemos decir de los métodos vectoriales de Grassmann.

Pero en cada uno de estos casos habrá que explicar lo que por vector se entiende.

Por el pronto, y mientras no digamos otra cosa, el vector será para nosotros lo que, en términos precisos, definimos hace un momento.

El proceso de generalización es, por decirlo así, un proceso histórico.

El vector ha nacido, si se permite la palabra, ó se comprende que ha podido nacer como otros muchos conceptos de las Ciencias matemáticas, por generalizaciones sucesivas y naturales; no por generación espontánea, sino como resultado de algo que les ha precedido. Por analogías, por semejanzas, por generalización y por abstracción: reuniendo lo que tengan de común una fuerza, una velocidad, el eje de un par, el eje de un torbellino. Y, á la vez, prescindiendo de lo que tengan de diferente.

En suma, creando con los caracteres comunes á todos estos conceptos concretos, un nuevo ser ideal.

Este ha podido ser el proceso histórico.

Y así se ha venido á parar al concepto del vector por una serie de abstracciones de la realidad.

***

Pero no limitemos ni los vuelos de la imaginación, ni los derechos evidentes y fecundos de lo que pudiéramos llamar la creación científica.

Insistamos en esta idea, que ya hemos desarrollado otra vez, ó acaso muchas veces, pero que nos parece importante, sobre todo ante la tendencia utilitaria que hoy se pretende dar á la Ciencia matemática.

El matemático, y acaso el hombre de ciencia en general, pero hablemos por hoy sólo del matemático, tiene derecho á crear, en el campo de la imaginación, todos los seres y todos los mundos y todas las relaciones, que para sus especulaciones propias le convengan.

Claro es que la palabra crear no tiene aquí el sentido bíblico.

Para nosotros vale tanto en esta ocasión como imaginar, ó mejor aún, imaginar definiendo.

Quién sabe, acaso en esto que llamamos crear, se mezclan muchas cosas de la potencia intelectual del cerebro: la imaginación, la convención, la definición y cierta intuición de que nunca se puede prescindir en las Ciencias matemáticas.

Y en este trabajo, que he llamado creador, lo que puede exigirse es, en primer término, que en la definición no existan elementos contradictorios; yo no puedo imaginar un triángulo que tenga tres lados y cinco ángulos, como tampoco puedo admitir que en las relaciones internas de estos seres imaginativos exista tampoco nada cotradictorio.

Pero salvando estos puntos generales, que no puedo señalar aquí más que de una manera general, en todo lo demás sólo imperan las leyes de la lógica, ó, si se quiere, las leyes de mi razón, que es como es, y que no puedo hacer que sea de otro modo.

De suerte, viniendo á nuestro caso, que sin necesidad de concebir la teoría de los vectores sobre abstracciones y generalizaciones de otros conceptos tomados de la experiencia ó tomados de teorías precedentes, el matemático tiene derecho á emplear por sí una teoría de los vectores ú otras teorías más complicadas ó más abstractas, aunque el motivo ocasional de esta teoría hayan sido hechos y conceptos de la mecánica y de la Física matemática.

Ahora bien, en la definición de vectores no hay, en efecto, nada contradictorio: un punto, una recta de magnitud determinada, una dirección y un sentido.

Todo esto constituye una definición, y luego en la combinación ó cálculo geométrico de los vectores de otras definiciones ó convicciones se partirá también.

Pero antes de seguir adelante fijemos bien las ideas.

Decir que la resultante de dos vectores, ó sea el vector que los suple y á ellos equivale, es la diagonal del paralelogramo formado sobre ambos, es una convención ó una definición y nada más.

Pretender demostrarlo es pretender un absurdo, puesto

que el concepto abstracto de vector no tiene por sí realidad en la Naturaleza; y la Naturaleza y el método experimental á nada puede conducirnos en este caso.

Puede demostrarse experimentalmente y quizá matemáticamente admitiendo ciertos postulados, que la resultante de dos fuerzas ó de dos velocidades que pasen por un punto es la diagonal del paralelogramo, pero no puede demostrarse lo mismo para los vectores.

En los vectores abstractos, las resultantes ó las sumas geométricas no dependen, como hemos dicho, de una demostración.

Dicha manera de sumar es defición ó es convención.

Convenimos en llamar resultante de dos vectores á la diagonal del paralelogramo que forman, y esto es todo.

Y esta convención tiene un objeto práctico, y es que la teoria de los vectores se pueda aplicar sin contradicción á teorías más concretas de la Física ó de la Mecánica, sin que resulte contradicción alguna entre la teoría abstracta que hemos imaginado y otras teorías de seres más concretos como las fuerzas, las velocidades, los ejes de los pares.

Precisamente por esto, pueden considerarse los vectores como generalizaciones, aun cuando al principio fueran creaciones de la imaginación.

El matemático, á veces, crea mundos abstractos; pero si piensa que ha de aplicarlos á la realidad, los crea de modo que á la realidad ó á muchas realidades puedan ajustarse sin contradicción.

Sobre este mundo imaginativo y abstracto de los vectores hacemos después multitud de construcciones y combinaciones, y de este modo llegamos tan lejos como se quiera en esta rama de las matemáticas.

Si luego vemos que en el mundo real hay algo cuyas propiedades reales y fundamentales coinciden con las que para los vectores hemos supuesto, todas las consecuencias abstractas á que lleguemos tomarán un sentido real dentro de

la lógica, es decir, dentro de las leyes de la razón humana, y podremos aplicar todas estas consecuencias á las fuerzas, á las velocidades, á los pares, á los ejes de los torbellinos, á los ejes magnéticos, á las líneas de fuerza y á casi toda la Física matemática.

Ya estas ideas las expusimos en otra forma en el curso anterior y en las dos conferencias precedentes, y no será la última vez que en ellas nos ocupemos.

*
* *

¿Si no existiera la Física matemática con sus teorías y sus problemas, se les hubiera ocurrido á los matemáticos crear la teoría de los vectores como conjunto de conceptos puramente ideales?

Yo creo que sí; pero este punto de Filosofía y de historia matemática no es para discutido en el momento presente.

Lo que hoy nos importa señalar, dentro del campo en que se desarrollan estas conferencias, es que la Física matemática y, sobre todo, la Física matemática moderna, ha contribuído á dar gran importancia á la teoría de los vectores.

Expongamos sobre este punto algunas ideas, que tampoco serán nuevas en esta serie de conferencias.

En la Mecánica clásica, ó al menos en la mayor parte de sus problemas, el espacio tenía poca importancia, ya en las relaciones dinámicas de dos masas ponderables, ya en las relaciones de dos masas eléctricas ó magnéticas.

Las fuerzas iban de punto material á punto material, fuera el punto material una masa ponderable, fuera una carga eléctrica; y el espacio intermedio importaba poco.

Cuando se decía la acción de una masa M sobre un punto del espacio, distante de ella la magnitud d, tiene por valor $\frac{M}{d^2}$, no se quería decir que en ese punto A del espacio ac-

tuaba materialmente una fuerza de la intensidad indicada. Se expresaba una posibilidad; algo en potencia, no en acto.

Si en el punto *A* no había masa ninguna, la acción de la fuerza no existía.

Y lo que quería significarse era, que si en dicho punto se colocaba una masa igual á 1, sobre esa masa igual á la unidad actuaría la fuerza

$$\frac{1 \cdot M}{d^2}$$

Pero si el punto estaba vacío, la acción efectiva era nula.

Por eso el espacio no era propiamente un campo de fuerzas, como lo es en la Física matemática moderna; por eso en dicho espacio no existían realmente, vectores de fuerza, y por eso, en fin, sólo tenían importancia estos vectores cuando actuaban sobre masas ponderables eléctricas ó magnéticas.

El resto del espacio era inerte ó estaba vacío.

***

Todo esto ha cambiado en la Física matemática moderna, y por eso, como vamos á explicar, la teoría de los vectores ha adquirido la gran importancia que hoy tiene.

Imaginemos una masa ponderable *M*, ó eléctrica, ó magnética, en una posición cualquiera del espacio; su inflencia se extenderá todo alrededor hasta lo infinito, decreciendo en razón inversa del cuadrado de las distancias; pero en la Física antigua esta influencia era puramente abstracta, ideal, era, en todo caso, una posibilidad, porque si el espacio estaba vacío y sólo tenía una existencia geométrica, la acción de la masa era nula, y así se establecía explícitamente ó así se suponía con el silencio.

Nadie podía imaginar que en el espacio geométrico ejerciera una influencia real la masa *M*.

Si para fijar las ideas, suponemos que era una masa eléctrica, la influencia eléctrica en cualquier punto era nula, y sólo era real en aquellos puntos en que de antemano existía otra masa eléctrica, y por eso no se hablaba de vectores.

Tales vectores, si se les hubiera dado este nombre, hubieran sido nulos, exceptuando en aquellos puntos cargados de electricidad.

Y lo que decimos de la electricidad, pudiéramos decir del magnetismo y aun de las fuerzas newtonianas.

En la Física moderna el espacio ya no está vacío, ya no es inerte: el espacio está lleno de éter, aun cuando no exista una teoría definitiva de esta substancia hipotética.

De aquí resulta, que no se puede considerar una masa aislada, ponderable, eléctrica ó magnética, que no ejerza una influencia real sobre el espacio que le rodea, sea este espacio un dieléctrico, sea lo que pudiéramos llamar un espacio magnético, ó sea el éter definido de ésta ó de aquella manera.

Así es que, alrededor de la masa eléctrica *M*, se ejercerán acciones reales y efectivas, que podrán representarse por rectas de magnitud determinada y de posición y sentido determinados también.

Ya la influencia de la masa *M* no se pierde en el vacío, sino que hace presa, por decirlo de esta manera, en el éter ó en el dieléctrico, ó en el campo magnético; en suma, en la materia, sea esta materia la que fuere.

De aquí resulta, que todo el espacio que rodea á la masa *M* en todos sus puntos lleva consigo una acción que puede estar representada por un vector, y tendremos lo que se llama un campo de vectores: vectores eléctricos ó vectores magnéticos; y si el campo estuviera formado por electrones, y en el centro de cada electrón suponemos un corpúsculo ponderable, hasta se comprende que pudiera haber una

complicación de campos ponderables y de campos eléctricos representados por un número infinito de vectores.

Precisemos aun más estas ideas con algunos ejemplos que no son teorías generales, que hemos de estudiar más adelante, sino, como hemos dicho, ejemplos que aclaren nuestra explicación.

Imaginemos una masa eléctrica μ (fig. 2.ª), y supongamos que todo el espacio que la rodea constituye lo que se llama un dieléctrico, una especie de red dividida en celdillas *a b c d*, *a′ b′ c′ d′*, *a″ b″ c″ d″*.....

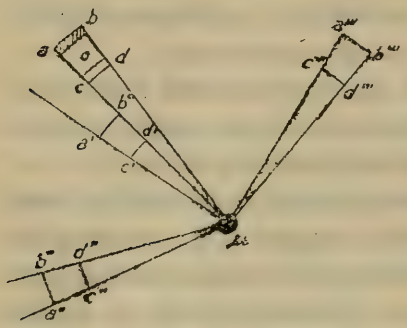


Figura 2.ª

Supongamos que en cada celdilla existe cierta cantidad de electricidad en estado neutro, es decir, que el flúido positivo y el flúido negativo están combinados en cantidades iguales que se equilibran.

Dicho espacio, antes de que en él se presente la masa μ, al parecer será un espacio neutro, tan inerte como el vacío geométrico, y no hay motivo para hablar ni de atracciones, ni de repulsiones, ni de vectores

Por el pronto, esta es la idea que nos ocurre mientras no penetremos con la experiencia, ó con la hipótesis, en las profundidades de ese flúido neutro que llena el espacio.

Supongamos, además, que los dos flúidos eléctricos positivo y negativo, aunque se separen, no puedan salir de cada celdilla.

Decíamos antes, que el espacio era una inmensa red, red, por expresarnos de este modo, de tres dimensiones, dividida en celdillas, cuyas paredes, en cierta manera, son impermeables al flúido eléctrico.

Tenemos, si se permite la comparación, una colmena eléctrica en que las abejas, que son partículas eléctricas, no pueden hacer otra cosa que agitarse en el interior de cada celdilla.

Pues bien, cuando en el campo eléctrico se presente la masa μ, por su influencia, y aquí, siquiera provisionalmente, admitimos la acción á distancia, aunque pudiéramos hacer un esfuerzo para prescindir de ella, pero este problema no es del momento; por influencia, repetimos, de la masa μ, se alterará la distribución eléctrica en cada una de las celdillas.

Se polarizarán, y esta es la palabra consagrada por el uso.

Consideremos la celdilla *abcd:* lo que de ella digamos, diremos de todas las demás.

Bajo la acción de la masa μ, el flúido neutro de la celdilla *abcd* se dividirá en sus dos elementos positivo y negativo. Si la masa μ es una masa de electricidad positiva, la electricidad positiva de la celdilla se acumulará en la parte más lejana de la misma, *ab;* en cambio, la parte negativa, se acumulará en *cd*, y las repulsiones entre μ y *ab* y las atracciones entre μ y *cd* darán una resultante, que podemos suponer aplicada al centro de la celdilla, como hemos representado en la figura 3.ª. Y ahora se comprende la diferencia entre las hipótesis de la Física matemática clásica y las de la Física matemática moderna.

Figura 3.ª

En aquélla no existía vector para el punto *o* del espacio geométrico, ni había que pensar en tales vectores, ni era preciso darles un nombre, bastaba con el de fuerzas.

En las teorías modernas, la masa eléctrica μ ejerce una acción efectiva y real sobre el campo que le rodea; una perturbación en el inmenso dieléctrico que este campo representa, y, por lo tanto, un esfuerzo, también efectivo y real, sobre cada punto; y por eso conviene darle un nombre, y

crear un concepto genérico para este caso, y hablar de vectores de dicho campo, y aun llamarle campo eléctrico en vez de llamarle espacio ambiente.

Porque dicho campo, una vez polarizado, está constituído de un número inmenso de masas eléctricas positivas y negativas, según determinada distribución.

Es un inmenso elemento dinámico.

Y por eso decíamos en el curso anterior que en la nueva Mecánica de la electricidad los problemas se complicaban por manera prodigiosa.

No era ya una masa que se movía bajo la acción de una fuerza; sobre cada masa actúa todo el campo que la rodea, campo creado por la acción de otras masas y por la masa misma.

De todas maneras, el ejemplo que acabamos de presentar hace comprender la importancia que en la Física matemática moderna ha tomado este concepto, á que se le ha dado el nombre de vector.

***

Pero presentemos otro ejemplo, sólo como nuevo ejemplo, no para establecer teorías electromagnéticas ó electrodinámicas; es un ejemplo, volvemos á repetir, en que se ve:

Cómo á las fuerzas aisladas de la antigua mecánica, ó cuando más, á sistemas de fuerzas actuando sobre diferentes puntos de un cuerpo, se sustituyen en la nueva Física matemática fuerzas que pueden actuar sobre todos los puntos del espacio y que se llaman sistemas de vectores; y cómo reciben el nombre de campos eléctricos y magnéticos el conjunto de sus puntos de aplicación.

Imaginemos, como antes, que el espacio está dividido en un conjunto de celdillas.

Sea una de ellas *abcd* (fig. 4).

Imaginemos dentro de esta celdilla, y lo mismo diríamos de las restantes, un número inmenso de corrientes eléctricas cerradas *c*, *c'*, *c''*.....

Así suponemos, *como ejemplo,* que está constituído todo el espacio que consideramos, que puede ser limitado ó puede ser infinito.

Como las corrientes interiores á cada celdilla *abcd,* tienen todas las orientaciones, puede admitirse, y es lo natural,

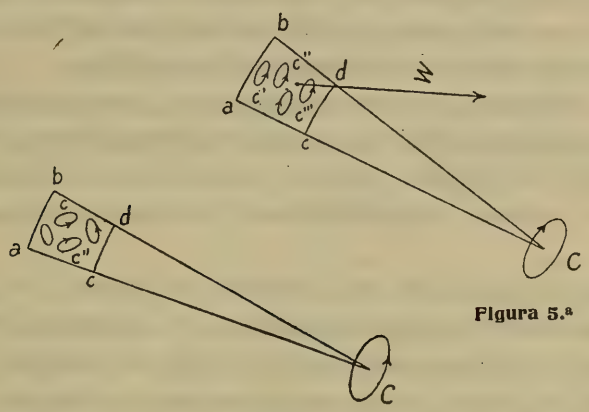


Figura 5.ª

Figura 4.ª

que sus efectos á lo exterior se anulen; y el espacio, en esta hipótesis, aparentemente, y para experiencias superficiales, por decirlo de este modo, en nada diferirá del espacio puramente geométrico. Será un espacio inerte.

Pero supongamos que en dicho espacio se introduce una corriente *C*.

Su influencia sobre las corrientes de cada celdilla será evidente é inevitable.

La corriente *C* tenderá á dar orientación, como se ve en la figura 5, á las corrientes *c*, *c'*, *c''*..... y entre la corriente *C* y las corrientes que rellenan la celdilla se establecerán fuerzas electrodinámicas, que tendrán una resultante aplicada al centro *o* de la celdilla y que podremos representar por *W*.

Y como esto se repetirá para todas las celdillas del espacio, resulta que la corriente *C* habrá creado un campo de esfuerzos, que en este caso se llamará campo de vectores electrodinámicos.

Así como antes la carga eléctrica en las figuras 2 y 3 creaba un campo eléctrico.

Y si dividiendo siempre el espacio en celdillas, en cada una de ellas suponemos masas magnéticas ó pequeños imanes, un imán introducido en el campo, ó una corriente, polarizarán en cierto modo los flúidos de dichas celdillas y tendremos un campo de vectores electromagnéticos.

Y tendremos en todos estos ejemplos, campos eléctricos, campos electrodinámicos, campos electromagnéticos, y aplicados á los diferentes puntos de estos campos vectores eléctricos, vectores electrodinámicos ó vectores electromagnéticos.

Claro es, que todos estos vectores son fuerzas y en rigor no necesitábamos para la exactitud de las teorías, ni este nuevo concepto, ni este nuevo nombre de vectores; pero también es cierto, que en nuevas teorías, ó en nuevos fenómenos, ó en nuevos puntos de vista es natural que empleemos para simplificar y para dar unidad á las ideas, nombres apropiados á los nuevos hechos del mundo físico.

*
* *

Los ejemplos que hemos presentado harán comprender la importancia de la teoría moderna de los vectores: va unida en cierto modo á un conjunto de nuevas hipótesis; ya en rigor ocurre su aplicación al estudiar los dieléctricos y su aplicación es aún más conveniente al estudiar el éter, ó si se quiere, al estudiar los diferentes campos de acciones eléctricas.

En rigor, no hay una teoría definitiva del éter precisamente porque hay muchas teorías, pero en todas ellas el éter que rellena el espacio se muestra mucho más activo y adquiere más importancia que en las teorías clásicas.

Y siempre el éter, si se nos permite la expresión, aparece asaeteado de vectores.

Autores hay que rechazan toda hipótesis respecto á la constitución del éter ó de los dieléctricos y de los campos en general, y definen cada punto de estos diferentes espacios por dos vectores: el eléctrico y el magnético.

No dicen cómo está constituído dicho campo, se limitan á decir: para un punto cualquiera (x, y, z) existe el vector eléctrico W_e y el vector magnético W_m, expresados de este modo:

$$W_e = \alpha\,(x, y, z)$$
$$W_m = \beta\,(x, y, z)$$

y sólo con esto dan por definido el campo.

En rigor esto no sería bastante; necesitarían agregar para dicho punto una cantidad *escalar,* como explicaremos en la conferencia próxima; pero si ciertos espíritus que por huir de todo sensualismo caen á veces en idealismos un tanto obscuros, rechazan toda hipótesis sobre la constitución del éter, más son, á no dudarlo, los que buscan como apoyo una representación material de los fenómenos y de las cosas.

Y de aquí resultan multitud de hipótesis sobre la constitución del éter.

Así algunos suponen, que el éter es un flúido compuesto de partículas innumerables sometidas á fuerzas intensas atractivas ó repulsivas, según la hipótesis clásica de la teoría de la luz, sin estudiar, por lo común, las condiciones de equilibrio estable ó inestable de dicho sistema.

Otros aconsejan el éter á un conjunto de celdillas rellenas de fiúido eléctrico, como antes indicábamos.

Otros dan distinto relleno, si vale la palabra, á la colmena

eléctrica, admitiendo multitud de pequeñas corrientes, con lo cual asemejan al éter á un cuerpo magnético ó susceptible de imantación.

Algunos suponen corpúsculos con atmósferas eléctricas en constante agitación dentro de estas celdillas reales ó ideales, y aquí podíamos indicar algo de la teoría de Lorentz; pero no es teoría para expuesta de un modo incompleto y de paso.

Y por fin, para no hacer interminable esta enumeracion, en que caben infinitas combinaciones de innumerables hipótesis, hay también estudios de mucha importancia en que se supone al éter como un conjunto de infinitos giróscopos infinitamente pequeños: en esta hipótesis se marca la tendencia á suponer que las energías acumuladas no dependen de las distancias, sino de las rotaciones.

Pero todo esto constituye una masa enorme de teorías matemáticas, que aplazamos para su día, si ese día llega.

Hemos querido en esta conferencia justificar la importancia que en el momento presente tiene la teoría de los vectores.

En la conferencia próxima esperamos terminar esta materia, haciendo algunas indicaciones sobre lo que pudiéramos llamar composición y descomposición de vectores.

XIV. — Determinación de algunas constantes físicas de la manganina.

Constantes elásticas y su variación con la temperatura.—Influencia de la tracción y la temperatura combinadas sobre la resistencia y la resistividad.—Coeficiente de dilatación.

POR B. CABRERA.

En un trabajo anterior (*), aparecido en esta misma Revista, dimos cuenta de nuestros estudios sobre los cambios que la resistencia en la manganina experimenta cuando se la recuece. Estos estudios constituían la primera parte de una serie en proyecto, cuya continuación ha dado motivo á la presente Memoria y á alguna otra que á ésta seguirá.

Los problemas que conjuntamente nos propusimos resolver, cuando emprendimos la serie de investigaciones de que hoy damos cuenta, indicados quedan en el epígrafe: pero, para mayor claridad, los podemos enumerar en la siguiente forma:

1.° Cambio de la resistencia con la tracción á diferentes temperaturas.

2.° Determinación del coeficiente de elasticidad por la tracción (inversa del módulo de Young) y su variación con la temperatura.

3.° Determinación de la rigidez y su variación con la temperatura.

4.° Cálculo del coeficiente de Poisson.

5.° Cambio de la resistividad con la tracción.

(*) Números de Noviembre y Diciembre de 1908.

6.° Coeficiente de dilatación y su variación con la tracción.

7.° Variación con la tracción de la temperatura del máximo de resistencia y de los coeficientes térmicos de esta última constante.

Un primer avance de los resultados obtenidos se ha publicado con anterioridad (*), y nuestro objeto hoy es publicar el detalle de los métodos puestos en práctica y la discusión de dichos resultados. Cúmplenos declarar, antes de pasar adelante, que todo el material empleado nos lo ha suministrado la Junta para Investigaciones Científicas, sin cuyo auxilio hubiéramos tenido que renunciar á nuestro proyecto.

I.—Métodos empleados.

Aparato tractor.—El aparato destinado á ejecutar las tracciones sobre los hilos objeto de estudio, había de cumplir las siguientes condiciones, impuestas por los múltiples problemas señalados:

a) Capacidad de un cambio continuo en la tracción sin trepidación;

b) Aislamiento perfecto de la muestra estudiada, para medir su resistencia sin error apreciable;

c) Posibilidad de medir las variaciones de longitud con independencia de los cambios posibles en los soportes fijos;

d) Posibilidad de alterar la temperatura de la muestra.

Todas ellas nos parecieron suficientemente cumplidas en el aparato que describimos á continuación, construído bajo nuestra dirección por la casa Viuda de Aramburo, de esta plaza.

A un sólido trípode de madera (fig. 1.ª) se fijó un cilindro de latón de unos 80 centímetros de longitud por 15 de diá-

---

(*) *An. de la Soc. Esp. de Física y Química*, VII, 389.

metro, envuelto, exteriormente, por una espesa capa de amianto B, que le aisla térmicamente, y cerrado en su extre-

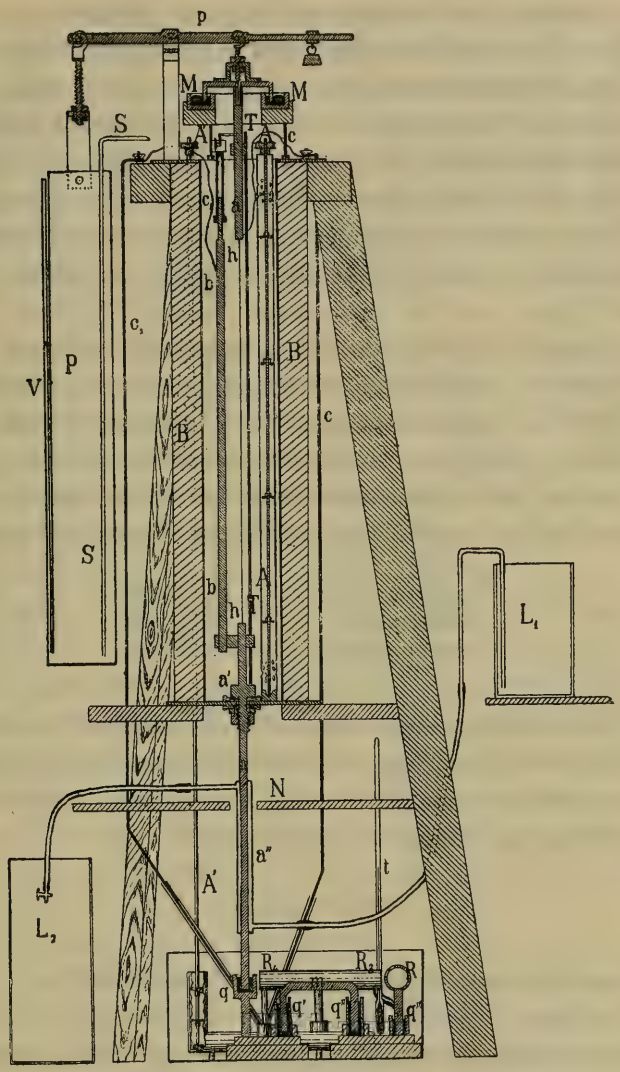


Figura 1.ª

midad inferior mediante una chapa, también de latón, de unos 0,5 centímetros de espesor. Esta chapa posee un orifi-

cio central, por el cual pasa la barra de cobre de un centímetro de diámetro, *a'*, fija á la chapa mediante una fuerte tuerca, pero aislada eléctricamente por rodajas de amianto.

A esta barra soldamos con plata la extremidad inferior de las muestras estudiadas, cuya longitud total fué siempre próxima de los 50 centímetros, mientras la extremidad superior se soldaba también á otra barra *a* de cobre de igual diámetro, provista de un doble gancho que se apoya sobre la cuchilla del brazo menor de una palanca *p*, de primer género y brazos desiguales, de cuyo brazo mayor cuelga un cilindro de cinc *P*.

La longitud de los brazos de la palanca la medimos cuidadosamente, mediante un metro de invar de la Cambridge Sc. Inst. Co., que además ha servido en todas las restantes medidas de este género hechas en el curso del trabajo. Hicimos varias determinaciones de cada uno de los brazos y de la longitud total, obteniendo los siguientes resultados medios:

Brazo menor.....	=	7,330
Brazo mayor.....	=	11,855
Longitud total.....	=	19,190

que demuestran podemos responder de la décima de milímetro, pues la suma de las dos primeras medidas apenas difiere en media unidad de este orden, de la longitud directamente medida. Así, la relación de brazos será

$$K = 1{,}617,$$

con un error que podemos estimar en un 2 por 100.

El cilindro *P* sirve para efectuar la tracción, llenándole con cantidades variables de agua, cuyo volumen se mide por el tubo de nivel *V*. Para ello trazamos previamente una escala sobre la pared exterior de *P*, inmediatamente detrás del tubo *V*, determinando el enrase del líquido en el tubo con aquellas divisiones mediante un anteojo, para evitar errores

de paralaje. En la determinación de la capacidad de cada división utilizamos una probeta tarada á 15° y dividida en centímetros cúbicos, pudiendo estimarse el error que este método haya introducido en los valores de la tracción, inferior á un medio por ciento. Dada la capacidad total del cilindro *P*, podíamos hacer cambiar la tracción entre 0 y $5{,}2 \times 10^5$ dinas, ó teniendo en cuenta que los hilos fueron siempre de diámetro próximo de 0,05 centímetros, entre 0 y $2{,}7 \times 10^9$ dinas por centímetro cuadrado; pero no rebasamos nunca $2{,}1 \times 10^9$ dinas, por ser muy sensible la histeresis elástica por encima de este límite. La llamada tracción cero no lo es propiamente, pues para ella el hilo estaba sometido realmente á un esfuerzo de 5×10^4, necesario para mantenerle recto.

Pudiera temerse que los cambios de densidad del agua con la temperatura ó el empuje del aire alteren los valores de estas constantes en el curso del trabajo; pero es fácil ver que estas alteraciones introducen errores que no rebasan el 1 por 1.000, siendo, por ende, depreciables.

El agua se introduce ó retira del cilindro *P* mediante el sifón *S*, que comunica con un depósito que se puede colocar á una altura variable, por un largo tubo de caucho, donde se intercaló una llave de vidrio para establecer ó suprimir la comunicación, á voluntad del operador. El diámetro de los tubos y la llave y las diferencias de nivel, se dispusieron de tal suerte que el gasto no excedía de 100 $^c/_c$ por minuto.

Basta lo dicho para comprender que la primera de las condiciones exigidas al aparato se cumple.

En cuanto al aislamiento eléctrico del hilo, lo logramos montando sobre ebonita las distintas piezas metálicamente unidas á su extremidad superior, con lo cual pierde importancia el defecto que en este sentido puede tener el aislamiento por amianto de la extremidad inferior.

Para medir los cambios de longitud del hilo empleamos la disposición siguiente, que cumple con las condiciones exigidas y da sensibilidad suficiente: Una larga varilla de cobre *b*

de unos 0,8 centímetros de diámetro se fija á la barra *a'* por una doble collera de tornillo que hace imposible todo desplazamiento relativo. En la extremidad superior de esta varilla, sobre la cual se ha hecho un pequeño rebajo, resbala un tubo corto, que se puede fijar por un tornillo de presión á la altura deseada, y lleva una disposición que se representa en detalle en la figura 2.ª, para la medida de los cambios de longitud del hilo. Esta figura comprende un corte horizontal y otro vertical. El tubo *b* termina en un vástago terrajado, que sirve de eje á una chapa metálica dos veces doblado su ángulo recto: la tuerca *t* se fija en la posición que se desee. En cada una de las ramas verticales se fija una lámina de marfil mediante dos pequeños tornillos, y en ella existe un orificio, cuya parte inferior tiene forma de *V*, sobre el cual descansa el eje *e* de un espejo esférico *E'* de 75 centímetros de distancia focal; los agujeros por donde pasan los tornillos de sujeción de las piezas de marfil están rajados, con el fin de colocar el eje *e* horizontal. Al mismo eje está rígidamente unida una barrita de hierro *p* doblada en forma de *U* invertida, cuya otra ex-

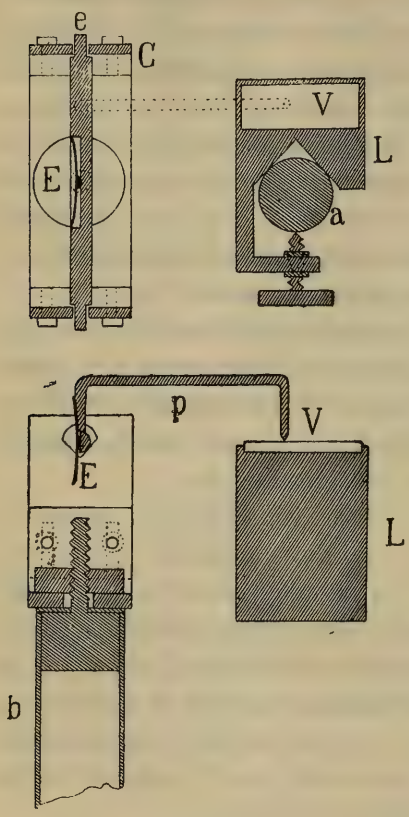


Figura 2.ª

tremidad termina en punta. Esta punta descansa en la lámina de vidrio V sujeta á la pieza L, que puede fijarse á la altura conveniente en la barra de cobre a, por un tornillo de presión: en la posición inicial se hace que el plano de vidrio contenga al eje e. Si el hilo sufre un cambio de longitud, el plano V queda por encima ó por debajo del eje e y éste gira arrastrando al espejo, y del ángulo girado por este último, que se mide por el método ordinario, se deduce la prolongación mediante la fórmula que vamos á encontrar.

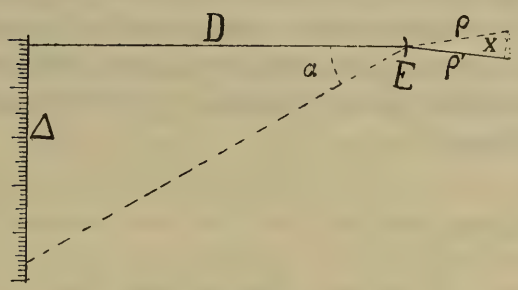


Figura 3.ª

En la figura 3.ª, E representa el espejo y las líneas p y D, llenas, las posiciones de la recta que une el eje e con la punta de hierro y del eje óptico del espejo en la posición inicial: la escala será entonces normal á D. Las líneas de trazos representan las posiciones de la recta p y del rayo luminoso después del giro del espejo, de forma que el ángulo que forma la primera con su posición inicial será la mitad del descrito por el rayo luminoso α. Llamando x el alargamiento del hilo, es evidente, sin más que mirar á la figura, el siguiente valor de

$$x = p \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = p \left[1 - \left(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

que, despreciando los términos de orden superior al tercero, se convierte en

$$x = \frac{p}{2} \operatorname{tg} \alpha - \frac{3p}{16} \operatorname{tg}^3 \alpha = \frac{p}{2} \frac{\Delta}{D} - \frac{3p}{16} \frac{\Delta^3}{D^3},$$

llamando Δ la lectura en la escala y D la distancia del espejo á esta última.

La distancia p es una de las constantes del aparato, y fué determinada con la máquina de dividir, llevando el hilo del microscopio á coincidir sucesivamente con las dos generatrices del eje, situadas sobre el plano diametral que pasa por la punta de hierro, y sobre esta misma punta. Suponiendo que el eje geométrico de giro equidista de aquellas generatrices, hallamos para

$$p = 2{,}031_2 \text{ cm.};$$

de suerte que

$$x = 1{,}015_6 \frac{\Delta}{D} - 0{,}3808 \frac{\Delta^3}{D^3}.$$

D cambia de una muestra á otra, y se determinó en cada caso con una aproximación de 0,1 centímetros; pero su valor fué siempre del orden de 150 centímetros.

La aproximación con que puede determinarse Δ puede calcularse en 0,02 centímetros, error que corresponde á 1.10^{-4} centímetros para x, ó sea una milésima de milímetro.

La disposición del aparato que hemos descrito, permite mantener el hilo en un baño de un líquido aislador, cuya temperatura puede variarse á voluntad, realizando de esta suerte la última de las condiciones arriba exigidas. El líquido elegido fué un aceite de petróleo de muy alto punto de ebullición, manteniéndole en agitación permanente con el auxilio de la turbina A, y el calentamiento se obtiene por una bobina, no representada en la figura, que se aloja á lo largo de

una generatriz muy próxima á la turbina. También á lo largo de una generatriz, pero diametralmente opuesto á la bobina y al agitador, se aloja el regulador de temperatura, constituído por un recipiente de vidrio en forma de termómetro de peso, lleno de mercurio: un contacto de platino situado en el tubo capilar, comanda el circuito de un *relais*, destinado á intercalar una resistencia en el circuito de calefacción y determinar así el enfriamiento del baño.

La temperatura del baño la determinamos con un termómetro de resistencia. Un hilo de platino comercial de un metro de longitud próximamente, se sujetó, doblado en U, á lo largo de una varilla de vidrio, mediante una cinta de seda y cubriéndole luego con goma laca en solución alcohólica, hasta formar una capa consistente. Los extremos del hilo se soldaron á dos flexibles de cobre, llegando también hasta el mismo sitio de la soldadura otros dos conductores idénticos que se soldaron entre sí, para compensar los anteriores, según la disposición empleada en los termómetros de Callendar-Griffttis, uno de cuyos modelos de puente (n.° III de la casa The Cambridge Sc. Ins.) utilizamos para la medida de la resistencia. El hilo de platino se colocó próximo al de manganina estudiado, y de tal suerte que ocupan la misma región del baño, según indica la figura I en *TT*, de suerte que las temperaturas medias de ambos fuesen iguales.

Si llamamos t_p la temperatura definida por el termómetro en cuestión, según la fórmula

$$t_p = \frac{R - R_{25}}{R_{100} - R_{25}} 75,$$

y admitimos la fórmula de Callendar para la diferencia entre la temperatura normal y la anterior,

$$T' - t_p = \delta \left[\left(\frac{T'}{75} \right)^2 - \frac{T'}{75} \right],$$

necesitamos, para determinar la constante δ, hallar los valores de R á 25°, 100° y otra temperatura cualquiera. La extraña elección que hemos hecho de 25° para el punto fijo inferior, obedece á conveniencias operatorias.

Para calcular δ con mayor seguridad, hicimos medidas directas de R para 16°, 25°, 40°, 60°, 80° y 100°, empleando en la determinación de las temperaturas un termómetro tipo de Baudin, graduado en décimas hasta 101°; de esta suerte nos era posible hallar cuatro valores para δ. R no se obtuvo directamente á cada una de las temperaturas, sino que se dedujo de cinco ó seis medidas ejecutadas en un intervalo de dos ó tres grados, alrededor de cada una de ellas, utilizando en el cálculo el método de interpolación de Cauchy. Así se han encontrado los siguientes valores de R con los pesos que se indican:

Temp.	Resistencia.	Peso.
16°	11.3631	18.3
25°	11.4591	12.5
40°	11.6133	15.1
60°	11.8144	17.9
80°	12.0129	9.4
100°	12.1833	33.3

Los valores de la constante δ que estos números suministran se consignan en el siguiente cuadro, donde T expresa la temperatura correspondiente á la tercera R necesaria para este cálculo:

T	T'	t_p	$T'-t_p$	δ
16°	— 9°	— 9°,84	0,94	7,00
40°	15°	15°,97	— 0,97	6,06
60°	35°	36°,81	— 1,81	7,30
80°	55°	57°,37	— 2,37	12,10

Con la media de estos números, á cada uno de los cuales se asigna el mismo peso que á la R_t correspondiente, calcu-

lamos las temperaturas T' que se consignan en el adjunto cuadro:

T' obs	15°,0	35°,0	55°,0	— 9°,0
T' calc	14°,8	34°,9	55°,7	— 8°,9

que nos denuncian claramente la conveniencia de prescindir de la determinación R_{30}, evidentemente errónea. Así lo hicimos, aceptando para δ la media aritmética de los tres valores restantes,

$$\delta = 6{,}79,$$

cuyos pesos son comparables, y con ella conduce para T' á la fórmula

$$T' = 451,6 - \sqrt{203940 - 828{,}2\, t_p},$$

calculamos las temperaturas que siguen:

T' obs	— 9°,0	15°,0	35°,0
T' calc	— 9°,0	15°,0	35°,1

No conformes aún, ante el temor de que fuera δ demasiado grande para aceptar la fórmula de Callendar, buscamos una fórmula de interpolación para R por el método de Cauchy: primero, partiendo de todas las determinaciones de R, que nos condujo á las diferencias finales

	16°	35°	40°	60°	80°	100°
R obs—R cal	+.0020	+.0009	+.0033	+.0021	—.0027	—.0027;

después, prescindiendo de R_{80}, en cuyo caso dichas diferencias fueron

	16°	35°	40°	60°	100
R obs—R cal	$-.0005_5$	$+.0000_6$	$+.0016_2$	$-.0007_0$	$-.0016_4$.

La fórmula que dió estos últimos resultados, preferible á la primera, es

$$R_t = 11{,}4579\,[1 + .0_3 924\,(t - 25) - .0_5 103\,(t - 25)^2].$$

Ahora bien; comparando estas últimas diferencias con las que corresponden á la fórmula de Callendar, se comprueba inmediatamente que esta última es perfectamente aplicable, y con ella construimos la tabla que nos ha servido para la medida de las temperaturas del baño.

Medida de las resistencias.—El método utilizado para la medida de las resistencias de los hilos objeto de estudio fué el del puente de Thomson, realizado en la siguiente forma:

La barra superior á que se halla soldado el hilo *h h* (Figura 1), termina por una T que se sumerge en un pocillo circular de cobre lleno de mercurio *M M*, donde termina uno de los polos de la pila. Á la barra inferior *a'* se atornilla otra *a''*, envuelta por un tubo de latón, por el cual puede pasar una corriente de agua fría, procedente del depósito *L*, y que derrama en L_2; esta barra termina en un pocillo con mercurio *q* que comunica con otro *q'*. Cerca de este último existe otro par de pocillos *q''* y *q'''*, también ligados entre sí, de los cuales el último aloja un terminal de la resistencia de comparación *R*, cuyo otro terminal comunica con el segundo polo de la pila, mientras que el *q''*, junto con el *q'*, sirven para colocar la barra *m* que ha de ser retirada ó reintegrada á su lugar en las operaciones necesarias para lograr el equilibrio del puente: esta operación se ejecuta desde distancia por una cinta de seda no representada en la figura.

La resistencia de comparación *R* está construída con el mismo hilo que las muestras estudiadas, según las reglas del Reichsantald de Berlín. Su valor le determinamos por el métod o de sustitución en un puente de Wheatstone, comparándole con un tipo de Otto Wolf de Berlín, obteniendo para resultado medio de varias determinaciones, hechas en condiciones diferentes,

$$R_{17} = 1{,}06523_0.$$

Terminado este trabajo y repetida la determinación mediante un puente Carey-Foster modificado, hallamos

$$R_{17} = 1{,}06563_2,$$

de forma que su valor había cambiado 4.10^{-4} ohmios en los ocho meses transcurridos. La variación con la temperatura de esta resistencia, la estudiamos entre 14° y 40° con el mismo puente de Callendar-Griffths que nos sirvió para el termómetro de resistencia de platino, ya descrito: dos series de ocho y diez puntos, respectivamente, nos dieron para la variación térmica por unidad

$$[1 + 0{,}0_4 26\ (t\text{-}25) - 0{,}0_6 3\ (t\text{-}25)^2]$$
$$[1 + 0{,}0_4 28\ (t\text{-}25) - 0{,}0_6 5\ (t\text{-}25)^2]$$

con errores que no excedieron de dos unidades del quinto orden decimal. Como los pesos de ambas series son iguales, hemos adoptado en definitiva para R la ecuación

$$R_t = 1{,}06549\ [1 + 0{,}0_4 27\ (t\text{-}25) - 0{,}0_6 4\ (t\text{-}25)^2].$$

Las derivaciones interiores y exteriores en el puente de Thomson las formamos con resistencias iguales, del orden de los 10 y 100 ohmios, respectivamente. Cada par están arrolladas en un mismo cilindro, siguiéndose también en su construcción las prescripciones del Reichsantald; y lo mismo el punto común á ambas, que constituyen uno de los vértices del galvanómetro, que las dos extremidades libres, están soldadas á gruesos alambres de cobre, que sirven para establecer las comunicaciones mediante pocillos de mercurio. Los valores de estas resistencias se determinaron, antes de la ejecución de este trabajo, por el método de sustitución en el puente de Callendar-Griffths, comparándolas á tipos O. W. de 10 y 100 ohmios, y posteriormente en el Carey Foster que ya hemos citado.

	Fecha.	Bob. I.	Bob. II.	Relación $\frac{II}{I}$
Derivación interior.. .	10/III	10,3032	10,3021	0.99990
	15/XI	10,2510	10,2525	1.00015
Derivación exterior...	11/III	101,729	102,319	1,00581
	16/IX	102,024	102,116	1,00090

Los resultados que se consignan en el cuadro anterior, demuestran que la construcción de estas resistencias es mucho más imperfecta que la de *R*, por su mayor variación con el tiempo. Sin embargo, estas variaciones únicamente podrían influir en los valores de la resistencia específica, y para estas constantes los errores que dependen de la medida del diámetro del hilo, exceden con mucho á los que pueden resultar de dicho cambio.

Los terminales de cobre que corresponden á las bobinas I de ambas derivaciones, se sumergen directamente en los mismos pocillos en que se introducen los de la resistencia *R*, mientras que los de las bobinas II han de ligarse á las extremidades del hílo *h*. Lógrase esto mediante gruesos alambres de cobre *c* y *c* (fig. 1.ª), que se une á flexibles, también representados en la figura, y que vienen á sumergirse en los pocillos de mercurio que corresponden á las bobinas II. Esta comunicación introduce, en los brazos correspondientes, resistencias que influyen en el cálculo final y que hemos tenido en cuenta.

El conjunto de las dos derivaciones y la resistencia *R*, están sumergidas en un baño de aceite de petróleo, agitado por la turbina *A'*, cuyo tubo posee una pequeña bobina de calefacción para regular su temperatura, que mide un termómetro *t* de Baudin en décimas. En la figura 1.ª sólo se ha representado el par de bobinas inferiores R_3 R_4. Todos los conductores necesarios para la pila, el galvanómetro y las derivaciones que empleamos para lograr el equilibrio, termi-

nan en los pocillos de mercurío convenientes, y penetran en el baño envueltos por tubos de vidrio; estos conductores no se han representado en la figura para evitar la confusión, pero los tubos de vidrio, á que hemos hecho alusión, se observan envolviendo á *c* y *c*.

El circuito de la pila contenía una resistencia *r* (fig. 4.ª) y un conmutador *c*, y el galvanómetro era un modelo Broca de

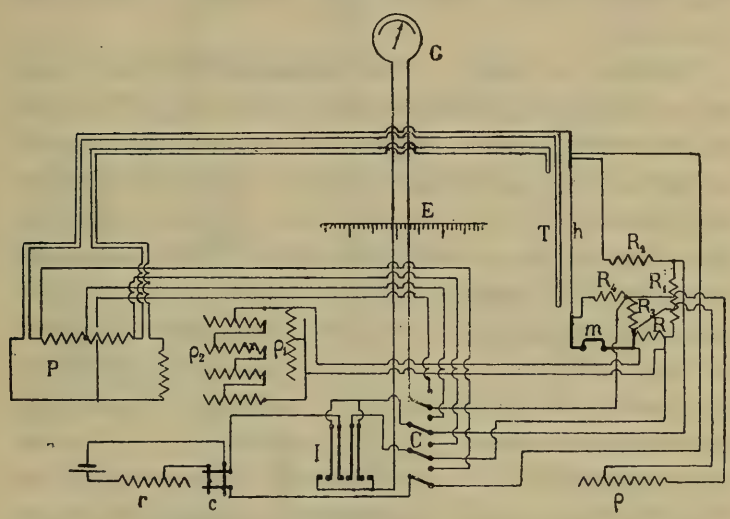


Figura 4.ª

la Cambridge Soc. Ins. Co. El galvanómetro y la pila, así como el interruptor de Griffhts I, se empleaban también en el puente para el termómetro de platino, ejecutando la conmutación con el auxilío de un conmutador de mercurio C.

Sabido es que siendo

$$m\,[R_1\,(R_4 + h) - R_2\,(R_3 + R)] + (R_1 h - R_2\,R) = 0,$$

la ecuación de equilibrio del puente doble, uno de los métodos más cómodos de lograr éste, es anular separadamente ambos paréntesis. Para el primero basta levantar *m*, con lo

cual se convierte el sistema en un puente sencillo, cuyo equilibrio buscamos mediante la derivación ρ' sobre la resistencia de 10 ohmios R_3; vuelta m á su lugar, se suprimía la desviación del galvanómetro actuando sobre la doble derivación ρ_1, ρ_2, hecha en la resistencia R. Basta repetir esta operación un par de veces para lograr que el galvanómetro permanezca en el cero, ya esté m en su lugar ó fuera de él. Así hemos logrado apreciar con claridad la millonésima de ohmio.

Medida de la rigidez.—Para determinar la rigidez elegimos el método de las oscilaciones. El hilo h (fig. 5.ª), objeto de este estudio, también de unos 50 centímetros de longitud, se sujeta por su extremidad superior á una fuerte pinza de latón, soldada á la tapa de un cilindro de dobles paredes, que se fija á él por un tornillo de presión. De la extremidad inferior del hilo pende el sistema oscilante, sujeto á él por una pinza idéntica á la anterior. Este sistema está constituído por una varilla cilíndrica vertical, en cuyo extremo se fija por una tuerca una lámina horizontal de hierro M, que posee cuatro ejes verticales 1, 2, 3, 4, destinados á alojar las masas adicionales N_1 y N_2; las rodajas de plomo P ejercen sobre el hilo una tracción equivalente á la media de las que sufre en el aparato de la figura 1.ª El sistema lleva aún un espejo cóncavo E de un metro de distancia focal. Una caja de madera le envuelve para evitar las corrientes de aire, y un termómetro de mercurio nos suministra la temperatura del sistema.

Llamando T' y T'' los períodos de oscilación que corresponden á las posiciones 1, 4 y 2, 3 de las masas N, para las cuales el momento de inercia toma los valores $\mathfrak{M}_1$ y $\mathfrak{M}_2$, sabemos que el par de torción es

$$C = \frac{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}{T'^2 - T''^2} 4\pi^2,$$

despreciando la influencia del decremento logarítmico, por

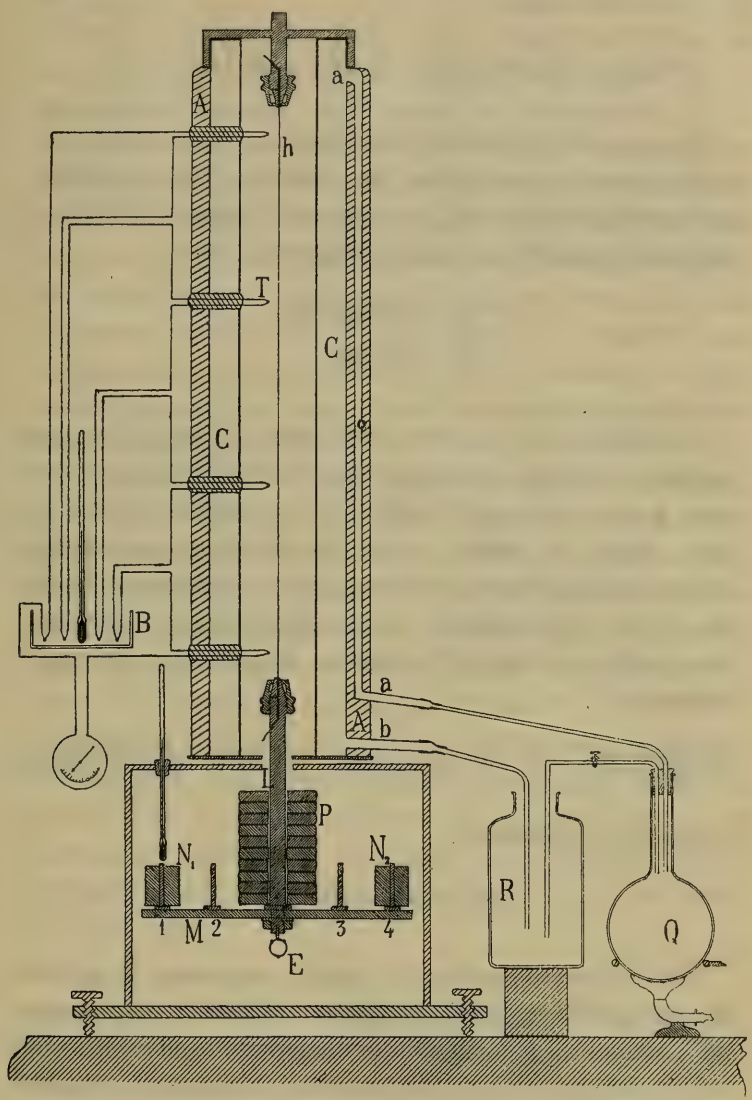


Figura 5.ª

ser en este caso inferior al orden de los errores experimentales. Pero si M_1 y M_2 son las masas de los cilíndros y

d_1, d_2, d_3, d_4 las distancias de los centros de los pivotes 1, 2, 3, 4 al eje de giro

$$\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = M_1 (d_1^2 - d_2^2) + M_2 (d_4^2 - d_3^2)$$

Así, para esta determinación únicamente necesitamos medir las masas de los cilindros, las distancias d y los períodos. Las masas, determinadas por pesadas á carga constante en una balanza sensible al medio miligramo, valen

$$M_1 = 82{,}041 \text{ gr.}$$
$$M_2 = 81{,}781 \text{ »}$$

Las distancias se midieron colocando la chapa M en una máquina de dividir, de suerte que la línea de sus centros fuese paralela al eje del tornillo. De las lecturas hechas sobre la cabeza del tornillo, cuando el retículo del microscopio era tangente al contorno de los agujeros destinados á alojar los pivotes y el vástago L, en los puntos en que dicho contorno corta á la línea de los centros, se dedujeron las cuatro distancias

$$d_1 = 8^{cm},002_8, \quad d_2 = 4^{cm},503_0, \quad d_3 = 4^{cm},519_7, \quad d_4 = 8^{cm},022_2;$$

de donde, en definitiva,

$$M_1 - M_2 = 7183{,}23.$$

Para la determinación del periodo seguimos el método descrito por Watson (*), empleando el péndulo de segundos del Laboratorio, y contando un número de oscilaciones suficiente para que el error fuera inferior á una parte en 100.000. Este periodo era del orden de 14^s cuando las masas adicio-

(*) *Practical Physical*, p. 107.

nales se alojaban en 1 y 4, y de 12^s cuando lo estaban en 2 y 3.

Tal es el método seguido cuando operábamos á la temperatura ambiente. Pero según ya advertimos, nuestro objeto era estudiar el cambio de la rigidez con la temperatura, para la cual el vapor desarrollado en el matraz *Q* y conducido por el tubo *a*, circula por el espacio *C* entre las dos paredes del cilindro, saliendo por el tubo *b* para condensarse en el baño de agua *R*. Una envoltura de amianto *A* proteje el aparato del enfriamiento por radiación, y un sifón con llave que liga directamente al matraz *Q* con el frasco *R*, juntamente con una pinza de Meyer colocada en el tubo *b*, consienten regular la corriente de vapor, para obtener una temperatura arbitraria entre la ambiente y 90^0.

La temperatura media del hilo se determinó con el auxilio de cuatro pares constantan-cobre en serie, cuyas soldaduras calientes, distribuidas á lo largo del hilo, se situaban muy próximas á la región por él ocupada, mientras las frías se colocaron muy próximas entre sí, y al depósito de un termómetro Baudin, en un baño de petróleo *B*: estos pares atraviesan la cubierta por tapones de ebonita.

La fuerza electromotriz se midió por un microvoltímetro Paul Roberts, cuya última división corresponde á 0,0001 de voltio, y su ecuación, obtenida por comparación con el termómetro Baudin que nos sirvió en la graduación del termómetro de resistencia de platino, era, para el intervalo 100^0—18^0,

$$E_t = 0{,}00635 + 163{,}7 \,.\, 10^{-6} (t - 60^0) + \\ + 0{,}418 \,.\, 10^{-6} (t - 60)^2,$$

de donde

$$t - 60 = -196 + \sqrt{38400 + \frac{E_t - 0{,}00635}{0{,}418 \,.\, 10^{-6}}}$$

Teniendo en cuenta que la serie de determinaciones de C, á diferentes temperaturas, se ejecutaban sin variar la posición de las rodajas de plomo, se comprende la conveniencia de calcular el momento del sistema oscilante fijo, partiendo de las operacíones ejecutadas á la temperatura ambiente, pues de esta suerte se reduce á la mitad el tiempo necesario para conseguir nuestro deseo. Llamemos T_t y $T_{t'}$ los periodos que corresponden á las temperaturas t y t', de las cuales la primera suponemos representa la temperatura ambiente, mientras la segunda designa la temperatura del hilo medida por los pares que acabamos de describir. Esta última no es nunca la del sistema oscilante, que mide el termómetro colocado en la caja protectora, y que designaremos por θ^0, temperatura que á lo más excede en 15^0 á t. Teniendo en cuenta estas observaciones se obtiene

$$T_t = 2\pi\sqrt{\frac{M_t}{C_t}} \qquad T_{t'} = 2\pi\sqrt{\frac{M_\theta}{C_{t'}}}$$

donde M designa el momento total del sistema oscilante. Así

$$C_{t'} = C_t \frac{T_t^2}{T_{t'}^2}\,\frac{M_\theta}{M_t}.$$

Pero, llamando $\mathfrak{M}_{Pb}$ el momento de inercia de la parte fija del sistema, que podemos considerar totalmente constituída por plomo, para los efectos de la corrección de temperatura, por ser de esta substancia la parte más importante de su masa, y designando por α_R, α_L y α_{Fe} los coeficientes de dilatación del plomo, el latón y el hierro,

$$\mathfrak{M}_\theta = \mathfrak{M}_{Pb}[1+2\alpha_{Pb}(\theta-t)] + (M_1K_{(1)}^2 + M_2K_{(2)}^2[1+2\alpha_L(\theta-t)] + \\ + (M_1d_{(1)}^2 + M_2d_{(2)}^2)[1+2\alpha_{Fe}(\theta-t)],$$

que puede escribirse

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_t [1 + \alpha (\theta - t)],$$

si tomamos para α el valor

$$\alpha = \frac{2\alpha_{Pb}\mathfrak{M}_{Pb} + 2\alpha_L (M_1 K_{(1)}^2 + M_2 K_{(2)}^2) + 2\alpha_{Fe}(M_1 d_{(1)}^2 + M_2 d_{(2)}^2)}{\mathfrak{M}_{Pb} + (M_1 K_{(1)}^2 + M_2 K_{(2)}^2) + (M_1 d_{(1)}^2 + M_2 d_{(4)}^2)}$$

Para el cálculo de α tomamos los siguientes valores de los coeficientes de dilatación

$$\alpha_{Pb} = .0_4 292, \quad \alpha_{Fe} = .0_4 125, \quad \alpha_L = .0_4 178.$$

Respecto de $\mathfrak{M}_{Pb}$ se puede determinar mediante los dos períodos T' y T'', que corresponden á las posiciones (1), (4), y (2), (3) de las masas adicionales, utilizando la fórmula

$$2\,\mathfrak{M}_{Pb} = (\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2)\frac{T'^2 + T''^2}{T'^2 - T''^2} - (\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2),$$

que ha dado para las tres muestras números 3, 4 y 5, los valores

Muestra número 3.....	18113,05
» » 4.....	18056,67
» » 5.....	18770,85

cuyos números están reducidos á los 20°. Su variabilidad pone de manifiesto la influencia que tiene la colocación de las masas de plomo, á que arriba haciamos referencia; pero no tiene influencia sensible sobre el valor de α, pues el paso del más pequeño al más grande de los valores de $\mathfrak{M}_{Pb}$ sólo influye en dos unidades del orden de la cifra dudosa. Así, adoptamos para el coeficiente de temperatura

$$\alpha = .0_4 462.$$

En definitiva, el valor corregido del par de torción será

$$C_{t'} = C_t \frac{T_t^2}{T_{t'}^2} [1 + .0_4462 (\theta - t)].$$

Pero no es esta constante la que nos interesa sino la rigidez, ligada á ella por la fórmula conocida

$$n_{t'} = 32 \frac{l_{t'} C_{t'}}{\pi d_{t'}^4},$$

y como los valores de l y d que nosotros indicamos en cada caso no son los que corresponden á esta temperatura, sino á la ambiente t, es necesario corregir los números correspondientes por la dilatación de la manganina, para cuyo coeficiente de dilatación adoptamos el número . 0_4183, de suerte que

$$n_{t'} = 32 \frac{l_t C_t}{\pi d_t^4} \frac{T_t^2}{T_{t'}^2} \frac{[1 + .0_4183(t' - t)][1 + .0_4462(\theta - t)]}{1 + .0_4732 (t' - t)} =$$

$$= n_t \frac{T_t^2}{T_{t'}^2} [1 + .0_4462 (\theta - t) - .0_4549 (t' - t)],$$

fórmula definitiva empleada en los cálculos de n á las temperaturas superiores á la ambiente, donde esta constante queda determinada en función de su valor á ésta última.

Método general seguido en el estudio de cada muestra.— El proceso general de las medidas ejecutadas con cada una de las muestras objeto de estudio, le detallamos á continuación:

1.° Determinación de la rigidez á la temperatura ambiente. Una vez sujeto el hilo en las pinzas que describimos al ocuparnos del aparato destinado á este fin, determinamos su longitud mediante un metro de invar construído por «The

Cambridge Sc. Inst.», al cual agregamos dos correderas análogas á las empleadas en los calibres *Columbus,* con el fin de poder apreciar la fracción de milímetro. El diámetro, necesario para calcular *n*, le medimos siempre después del estudio completo del hilo, por ser conveniente dividirle en pequeños trozos para este fin.

2.° Soldado á las barras de cobre *a* y *a'*, le sometimos á una tracción comparable á la media de aquéllas que había de soportar, midiendo su longitud en la misma forma que acabamos de indicar. Una vez ejecutada esta operación, terminamos el montaje en el aparato de tracción, manteniéndose durante veinticuatro horas sometido á una acción mecánica de este género, superior al límite máximo de las que había de sufrir en la operación siguiente.

3.° Estudio de un ciclo de tracción entre 0 y 21 · 10^8 dinas por centímetro cuadrado. En éste, como en los demás ciclos que luego referiremos, se han hecho simultáneamente las determinaciones de resistencia y alargamiento, tomando diez puntos equidistantes para las tracciones crecientes, y otros tantos para las decrecientes. A pesar de la lentitud con que la carga cambiaba, esperamos siempre unos minutos después de que el agua alcanzaba el nivel apetecido, antes de efectuar las medidas. Estas, en cada uno de los puntos, se ejecutaron por el orden siguiente:

a) Colocado el conmutador *C* en la posición que corresponde al termómetro de platino, medimos la temperatura del baño;

b) Vuelto el conmutador *C* á la otra posición, en que se le representa en la figura 4.ª, buscamos el equilibrio del puente de Lord Kelvin, que describimos arriba;

c) Inmediatamente rectificamos la temperatura del baño, repitiendo las anteriores operaciones siempre que notábamos diferencias, entre esta temperatura y la primera, superiores á 0°,1;

d) Determinación del alargamiento; y

e) Comprobación de la invariabilidad del nivel del agua en el aparato de tracción.

4.° Recocido durante nueve ó diez horas á una temperatura constante, próxima de 150°, pero que en algunas ocasiones subió por encima de este límite durante periodos cortos, llegando en la muestra núm. 5, por ejemplo, á alcanzar unos 180°. Este recocido se hizo unas veces con la muestra sometida á una tracción superior al límite más alto de los ciclos y otras sin tracción alguna, pero en todo caso, antes de las determinaciones que siguen, ha permanecido bajo dicha acción mecánica durante 24 horas.

5.° Determinación de las curvas de dilatacíón y de cambio de resistencia con la temperatura, mientras la tracción permanecía constante. Las tracciones empleadas fueron, sucesivamente, 414×10^6, 835×10^6, 1243×10^6, 1660×10^6, 2078×10^6, expresadas siempre en dinas por centímetro cuadrado. Los puntos tomados varían entre 8 y 10, distribuídos de 10° en 10°, salvo en las proximidades del mínimo de resistencia donde el intervalo se reduce á 5°; de esta suerte hemos cubierto la escala de temperaturas entre la ambiente y los 80°. El método seguído en cada medida es el descripto en el párrafo 3.°, y las medidas corresponden siempre á temperaturas crecientes, razón por la cual no nos podíamos asegurar de que el recocido fuese suficientemente completo para que esta curva quedase bien deflnida, pero sospechamos que los errores dependientes de esta causa pueden ser pequeños, y desde luego no corresponden á la irregularidad que parece existir en esta parte de nuestro trabajo.

6.° Cuatro ciclos de tracción á temperaturas diferentes y próximas á 25°, 50°, 70° y 100°, donde las medidas todas se ejecutaron por el método que indicamos en el párrafo 3.° Pudiera parecer supérfluo este trabajo, pues sus resultados pueden deducirse teóricamente de aquellos que corresponden á las medidas indicadas en el párrafo anterior; pero, á más de que para obtener de ellas curvas de esta clase bien

definidas sería menester aumentar el número de las anteriores, la precisión en las medidas absolutas habría de ser muy superior á la que exigen buenas medidas relativas. Iguales serían las objeciones que podrían hacerse á un procedimiento inverso.

7.° Determinación de la rigidez á la temperatura ambiente y en las proximidades de los 50° y 80°.

8.° Medida del diámetro. Terminadas las operaciones anteriores, cortamos cinco pequeños trozos de cada una de las extremidades y de la región central, midiendo el diámetro de cada uno de ellos para cuatro posiciones que forman entre sí ángulos de 45°. El aparato empleado fué un compás de la «Soc. Genevoise», sensible á la .001 de milímetro, ó un palmer un poco menos sensible.

(Continuará.)

XV.—Sobre un problema de Física (*).

POR JUAN JACOBO DURÁN-LORIGA.

Consideremos tres focos luminosos, de igual intensidad, colocados en los vértices *A*, *B* y *C* de un triángulo equilátero, y otro de *intensidad suma*, situado en su centro *O*. La cuestión que nos proponemos estudiar es:

Encontrar los puntos del plano igualmente iluminados por los tres primeros que por el cuarto.

También puede considerarse esta investigación como un problema de *atracción*, según la ley de Newton, y, en fin, si se la quiere revestir de un ropaje completamente geométrico, puede enunciarse así:

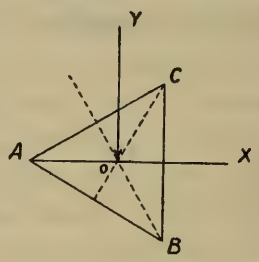


Figura 1.ª

Encontrar el lugar geométrico de los puntos del plano de un triángulo equilátero, tales, que el cuadrado del vector dirigido á su centro sea media armónica de los cuadrados de los vectores relativos á sus vértices.

La ecuación que plantea el problema será, evidentemente, la siguiente:

(*) Esta cuestión me fué sugerida por una pregunta de mi hija Pilar, relativa al asunto, no presumiendo que la respuesta ocasionase tantos cálculos.

La presente Memoria ha sido enviada á la Academia, en cumplimiento de un precepto reglamentario, que atañe á los deberes de los Correspondientes nacionales, los cuales han de presentar, cada dos años, un trabajo original.

$$\frac{3}{x^2+y^2}=\frac{1}{\left(x+\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2+y^2}+$$

$$+\frac{1}{\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2+(y+a)^2}+\frac{1}{\left(x-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2+(y-a)^2}$$

habiendo representado por $2a$ el lado del triángulo y elegido los ejes que aparecen en la figura 1.ª

Haciendo operaciones se llega á la siguiente ecuación:

$$3(x^2+y^2)^2-4a\sqrt{3}\,x(x^2-3y^2)+4a^2(x^2+y^2)-$$
$$-\frac{16a^4}{3}=0.$$

Y si para evitar irracionales se pone en función del radio R de la circunferencia circunscripta al triángulo, resulta, en definitiva,

$$(x^2+y^2)^2-2Rx(x^2-3y^2)+R^2(x^2+y^2)-R^4=0\ldots\ldots\ (1)$$

Se trata, pues, de *una cuártica* cuyos puntos en el infinito son evidentemente los *puntos cíclicos* y la curva es bitangente á la *recta del infinito* en dichos puntos. Se deduce del propio enunciado del problema (y la ecuación en coordenadas polares lo justificará) que las alturas del triángulo son *ejes ternarios* de simetría. Esto permite establecer *à priori* que la curva no puede tener *puntos dobles*, propiamente dichos, ni de *retroceso*.

En efecto, es sabido que una cuártica no puede tener más que tres puntos dobles sin descomponerse en curvas de grado inferior. Caso, pues, de tenerlos, sería sobre los ejes de simetría; es decir, en los vértices, pues si los tuviese en otros

puntos, la triple simetría exigiría que la existencia de uno trajese consigo la de otros cinco. Ahora bien; los vértices no lo son, porque la intersección de la curva con el eje de las x da los cuatro puntos *simples*, que tienen las siguientes abscisas:

$$x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1) \quad » \quad x_2 = -\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$» \quad x_3 = \frac{R}{2}(1+\sqrt{-3}) \quad » \quad x_4 = \frac{R}{2}(1-\sqrt{-3})$$

reales los dos primeros é imaginarios los otros dos, siendo muy digno de notarse que las abscisas de los puntos reales son los lados de los decágonos estrellado y convexo, correspondientes á la circunferencia circunscrita al triángulo, lo que permite su inmediata determinación por medio de la regla y el compás.

La fórmula de Plücker

$$c = m(m-1) - 2d - 3r,$$

nos da, por consiguiente,

$$c = 12.$$

Así como la

$$i = 3m(m-2) - 6d - 8r$$

establece que $i = 24$, es decir que tiene la curva 24 puntos de inflexión.

Llevando estos datos á la tercera fórmula

$$m = c(c-1) - 2t - 3i,$$

resulta que el número de tangentes dobles es 28, de ellas 4

reales, como se ve claramente en la figura 2.ª, y, por consiguiente, 24 imaginarias.

Resumiendo, resulta para lo que pudiéramos llamar la *filiación* de la curva:

Cuártica de clase 12 y género 3, bitangente á la recta del infinito con 24 puntos de inflexión y 28 tangentes dobles y presentando tres ejes de simetría. Claro está, que aunque citamos todas las circunstancias, algunas son forzosa consecuencia de otras, en virtud de las fórmulas de Plücker.

Si queremos comprobar que la curva es de clase 12, vamos á ver las tangentes que se le pueden trazar por un punto, que por comodidad elegiremos en el infinito sobre el eje de las y. Sabido es que los puntos de contacto de estas tangentes, estarán en la intersección de la curva con la *primera polar* del punto en cuestión, que tiene por ecuación (tomando el radio por unidad):

$$f'_y = 4y^3 + 4x^2y + 12xy + 2y = 0$$

que se descompone en las dos siguientes:

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2y^2 + 2x^2 + 6x + 1 = 0 \end{cases}$$

la intersección de la cuártica con la $y = 0$ (es decir, el eje de las x) da los cuatro puntos que ya anteriormente hemos considerado, y las otras tangentes paralelas al eje de ordenadas, tendrán los puntos de contacto en la intersección de la segunda línea, que se ve es una circunferencia, con la curva propuesta. Pero las abscisas de estos puntos son las raíces de la ecuación de cuarto grado.

$$0x^4 + 32x^3 + 36x^2 + 12x + 5 = 0$$

una de ellas infinita, como debía suceder, pues no debe ol-

vidarse que la curva es bitangente á la recta del infinito, y las otras responden á la ecuación de tercer grado

$$32\,x^3 + 36\,x^2 + 12\,x + 5 = 0.$$

Esta ecuación tiene una raíz real y dos imaginarias, pues la expresión $4\,p^3 + 27\,q^2$ aplicada á la ecuación transformada, que es

$$z^3 - 3\,z + 62 = 0$$

da un resultado positivo.

La raíz real tiene por valor:

$$x = \frac{1}{8}\left[\sqrt[3]{-31 + \sqrt{31^2 - 1}} + \sqrt[3]{-31 - \sqrt{31^2 - 1}} - 3\right]$$

á cada una de estas abscisas corresponden *dos* puntos de contacto (respondiendo á las tangentes dobles), cuyas ordenadas se obtendrian por medio de la ecuación

$$2\,y^2 + 2\,x^2 + 6\,x + 1 = 0.$$

Resulta, pues, que hay *cuatro* puntos de contacto sobre el eje de las x, *seis,* simétricamente colocados respecto al de las y, y por último, *los dos puntos cíclicos;* es decir, en total 12, que es lo que corresponde á la clase de la curva.

El círculo que hemos considerado, y que por la intersección de su circunferencia con la curva da los puntos de contacto de las tangentes dobles, paralelas al eje de las y (una real y dos imaginarias), tiene por centro el punto cuyas coordenadas son:

$$x = -\frac{3\,R}{2} \quad » \quad y = 0$$

y su radio tiene por valor:

$$\rho = \frac{R\sqrt{7}}{2}.$$

Tratemos de encontrar la *ecuación polar* de la curva, tomando como eje polar el de las x, y por polo el anterior origen, haremos pues,

$$x = \rho \cos \omega \qquad » \qquad y = \rho \operatorname{sen} \omega$$

y resulta:

$$3\rho^4 - 6R\rho^3 \cos^3 \omega + 18 R \rho^3 \cos \omega \operatorname{sen}^2 \omega + 3 R^2 \rho^2 - 3 R^4 = 0$$

ó bien

$$\rho^4 - 2R\rho^3 \cos^3 \omega + 6R\rho^3 \cos \omega (1 - \cos^2 \omega) + R^2 \rho^2 - R^4 = 0$$

de la que se deduce:

$$\rho^4 - 2 R \rho^3 (4 \cos^3 \omega - 3 \cos \omega) + R^2 \rho^2 - R^4 = 0$$

ó finalmente:

$$\rho^4 - 2 R \rho^3 \cos 3 \omega + R^2 \rho^2 - R^4 = 0. \qquad (2)$$

Esta ecuación demuestra, como ya habíamos anunciado al principio, la triple simetría de la curva, pues su ecuación polar no cambia poniendo en lugar de ω, $\omega + \frac{2\pi}{3}$ y además entra el coseno.

También nos permite la ecuación (2) observar que, puesto que queda verificado para el valor $\rho = R$ (radio del círculo circunscripto) y los valores de ω, $20^0 - 100^\circ - 140^\circ - 220^\circ - 260^\circ - 340^\circ$, podemos obtener inmediatamente *seis*

puntos sobre la circunferencia circunscripta; pero nótese que no es construcción exacta por la *geometria canonica de la regla y el compás*, pues, p. e., el formar un ángulo de 20° no es factible exactamente, y la división que marca el transportador es, *aún teóricamente*, aproximada (*). No debe sorprendernos el encontrar la mayor parte de los puntos de la curva, no construibles por la *geometría elemental*, pues el examen de la ecuación polar hace ver que lleva fatalmente encarnado el problema de la trisección del ángulo. Es decir, que se trata de una curva *trisectriz*, como decían los antiguos.

Podemos observar de paso, que los puntos que acabamos de considerar sobre la circunferencia circunscripta pertenecen también á la intersección de dicha circunferencia con la *cúbica*, que tiene por ecuación:

$$2Rx(x^2-3y^2)-R^2(x^2+y^2)=0$$

ó en coordenadas polares:

$$\rho=\frac{R}{2\cos 3\omega}$$

que es una curva conocida llamada *espiga* (**), algébrica

(*) Siendo *20* la dieciochava parte de la circunferencia, en la que entra el factor primo *tres* elevado al cuadrado, resulta la división aproximada, pues está perfectamente demostrado que no puede dividirse la circunferencia en un número de partes en el que entre la potencia superior á la unidad de un número primo impar.

(**) En rigor *Aubri* llamó espigas á las que traduce la ecuación:

$$\rho=\frac{a}{\operatorname{sen} m\omega}$$

pero es fácil ver que se pasa de unas á otras por un cambio conveniente del eje polar.

cuando el coeficiente de ω que figura bajo el coseno es *racional* (como en este caso), y *transcendente* en los demás, y se compone evidentemente de tantas ramas como indica el citado coeficiente cuando es entero (tres en este caso), y en el caso de ser fraccionario, y *supuesto irreducible*, el valor que indica el numerador *ó su doble*, según sean ambos términos de la misma ó distinta paridad. En nuestro caso salta á la vista que la recta inclinada 30° sobre el eje de las x y su simetría son *asíntotas* de la curva. Las espigas son *cuadrables*; pero su rectificación depende de *integrales elípticas* de primera y segunda especie.

Aún más generalmente puede observarse que la curva que estudiamos es el lugar geométrico de las intersecciones de la circunferencia

$$x^2 + y^2 = KR^2$$

y la cúbica

$$2x(x^2 - 3y^2) = (K^2 + K - 1)R^3$$

siendo K un parámetro (numérico) variable.

Basta para convencerse de ello, eliminar K entre ambas ecuaciones.

La ecuación de dicha línea de *tercer orden* en coordenadas polares es:

$$\rho^3 = \frac{(K^2 + K - 1)R^3}{2\cos 3\omega},$$

que representa una curva análoga á las *espigas*. Haciendo variar K se obtendrían cuantos puntos se quisieran de la curva que estudiamos; pero claro está que este sería un procedimiento puramente teórico.

Bajo el punto de vista práctico hay que determinar gráfica

ó numéricamente diversos puntos de la cuártica que motiva este estudio, para lo cual será útil su ecuación en coordenadas polares. Conviene empezar por determinar varios puntos cuya construcción sea factible por medio de la regla y el compás; pero ante todo debe observarse, en vista de lo que llevamos dicho, que la cuártica está por completo encerrada en la *corona* que determinan las circunferencias que tienen por centro el del triángulo y por radios respectivos.

$$\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) \quad \text{y} \quad \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

siendo dichas circunferencias triplemente tangentes á la curva en los *seis* vértices. Basta, por otra parte, observar que sólo hay que ocuparse de determinar puntos de una media hoja, es decir, la parte comprendida en el ángulo CoX ó en el CoD (fig. 1.ª).

Encontremos, por de pronto, la iutersección de la curva con el eje de las y. Haremos en la ecuación (1) $x=0$, y la ecuación bicuadrada que resulta tiene por expresión:

$$y^4 + R^2 y^2 - R^4 = 0$$

cuya raiz real positiva es:

$$y = \sqrt{R.\frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)}$$

es decir, la MEDIA GEOMÉTRICA *entre el lado del decágono convexo y el radio de la circunferencia circunscripta*. Así, pues, refiriéndonos á la figura 2.ª, bastará describir sobre $d_1\,k$, como diámetro, una semicircunferencia, y su intersección con oy marcará el punto e_1. Se tendrán, pues, todos los puntos análogos, encontrando la intersección de la circun-

ferencia de radio oe_1 con las perpendiculares levantadas á las alturas en el *circuncentro* del triángulo.

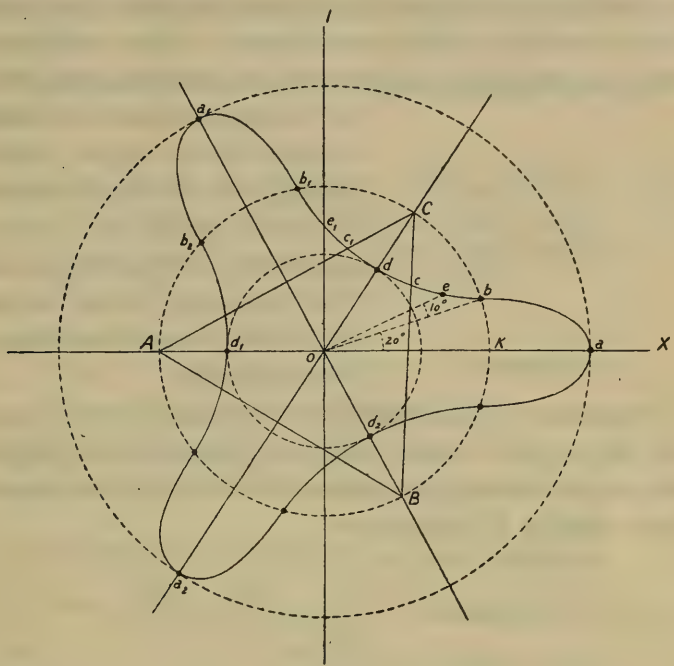


Figura 2.ª

La intersección de la curva con el lado BC se obtendrá haciendo

$$x = \frac{R}{2}$$

pues la apotema del triángulo equilátero es igual á la mitad del radio, y de este modo se obtiene:

$$\overline{Lc}^2 = \frac{R^2(4\sqrt{6} - 9)}{4}$$

y por consiguiente

$$\overline{oc}^2 = R\sqrt{2}.R(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

es decir, que *oc es media proporcional entre el lado del cuadrado y el exceso sobre éste del del triángulo equilátero, ambos inscriptos en el circunciclo del triángulo dado.* La circunferencia descripta desde *o* como centro, con este radio marcará en su encuentro, con los lados de dicho triángulo, otros *seis* puntos de la curva. No debe extrañar que se hayan encontrado por la *Geometría elemental* varios puntos de la curva, pues sus vectores forman con el *eje polar* ángulos que son tercera parte de otros, cuya trisección es posible.

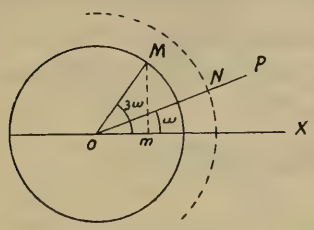


Figura 3.ª

Procediendo en la misma forma se podrán encontrar nuevos puntos; pero vamos á dar una construcción general, *aunque aproximada,* para encontrar todos los que se deseen. De la ecuación (2) deducimos:

$$R \cos 3\omega = \frac{1}{2}\left(\rho + \frac{R^2}{\rho} - \frac{R^4}{\rho^3}\right).$$

El segundo miembro puede construirse fácilmente por medio de terceras proporcionales, una vez fijado ρ gráficamente, y se obtendrá un segmento que llamaremos l, y la ecuación se reducirá á:

$$R \cos 3\omega = l$$

y si tomamos una longitud $om = l$ (fig. 3.ª), y levantamos la perpendicular mM en la circunferencia de radio R, se tendrá el ángulo 3ω, y dará un punto de la cuártica la intersección N de la circunferencia de radio ρ con el vector oP que forma el ángulo ω. Como ya dijimos, esta construcción es aproximada, pues exige dividir un ángulo en tres partes iguales.

Para obtener los puntos de *inflexión* de la curva, habrá

que encontrar la ecuación de la *hessiana*, cuya intersección con la propuesta dará exclusivamente los puntos de *inflexión*, ya que, según hemos dicho, esta curva no tiene puntos dobles.

De la ecuación de la curva, *una vez homogenizada*, deducimos:

$$
\begin{aligned}
f'_x &= 4x^3 + 4xy^2 + 6zy^2 - 6x^2 z + 2xz^2 \\
f'_y &= 4y^3 + 4x^2 y + 12xyz + 2yz^2 \\
f'_z &= -2x^3 + 6xy^2 + 2zx^2 + 2zy^2 - 4z^3 \\
f''_{x^2} &= 12x^2 + 4y^2 - 12xz + 2z^2 \\
f''_{xy} &= f''_{yx} = 8xy + 12yz \\
f''_{xz} &= f''_{zx} = 6y^2 - 6x^2 + 4xz \\
f_{y^2} &= 12y^2 + 4x^2 + 12xz + 2z^2 \\
f''_{yz} &= f''_{zy} = 12xy + 4yz \\
f''_{z^2} &= 2x^2 + 2y^2 - 12z^2
\end{aligned}
$$

Y por consiguiente, la ecuación de la *hessiana* será:

$$
\begin{vmatrix}
6x^2+2y^2-6xz+z^2 & 4xy+6yz & 3y^2-3x^2+2xz \\
4xy+6yz & 6y^2+2x^2+6xz+z^2 & 6xy+2yz \\
3y^2-3x^2+2xz & 6xy+2yz & x^2+y^2-6z^2
\end{vmatrix} = 0
$$

que después de cálculos, verdaderamente largos, nos llevó definitivamente á la siguiente ecuación para la *hessiana*

$$
\begin{cases}
42y^6 - (108x^2 + 18xz + 405z^2)\,y^4 + (342x^4 - 11x^3 z + \\
+540x^2 z^2 - 912xz^3 - 165z^4)\,y^2 + 6x^6 + 6x^5 z + 45x^4 z^2 - \\
\qquad - 276x^3 z^3 + 267x^2 z^4 - 72xz^5 + 6z^6 = 0
\end{cases}
$$

las 24 soluciones comunes á esta ecuación y á la (1) nos darían las coordenadas de los puntos de *inflexión*; pero ya comprenderá el lector que hemos renunciado á esta investigación, *completamente teórica*, al tratarse, como en este caso, de curvas cuya ecuación es complicada, más que por su grado, por el número de términos que la constituye.

El *radio de curvatura* de la curva que estudiamos no afecta forma sencilla en general; vamos, sin embargo, á determinarlo, para luego hacer aplicación á los vértices de la curva.

Derivando la ecuación (1) respecto á x, se obtiene:

$$4x^3 + 4xy^2 + 4x^2 y.\frac{dy}{dx} + 4y^3.\frac{dy}{dx} -$$
$$-6x^3 + 6y^2 + 12xy.\frac{dy}{dx} + 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

Volviendo á derivar respecto á x, resulta:

$$12x^2 + 4y^2 + 8xy.\frac{dy}{dx} + 4x^2.\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4x^2 y.\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$+ 12y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4y^3.\frac{d^2y}{dx^2} - 12x + 12y.\frac{dy}{dx} +$$
$$+12x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 12xy\frac{d^2y}{dx^2} + 2 + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2y.\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

De la primera, deducimos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x^3 - 4xy^2 + 6x^2 - 6y^2 - 2x}{4x^2 y + 4y^3 + 12xy + 2y}$$

y de la segunda, resulta

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-12x^2 - 4y^2 + 12x - 2 + \frac{dy}{dx}\left[-16xy - 24y\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[-4x^2 - 12y^2 - 12x - 2\right]}{4x^2y + 4y^3 + 12xy + 2y}$$

Substituyendo estos valores en la conocida expresión del *radio de curvatura*, poniendo en la segunda derivada el valor obtenido, para la primera y hechas reducciones, se encuentra:

$$\rho = \frac{\left[y^2(4x^2+4y^2+12x+2)^2+(4x^3+4xy^2-6x^2+6y^2+2x)\right]^{\frac{2}{3}}}{y2(4x^2+4y^2+12x+2)^2\left[-12x^2-4y^2-12x+2+(16x+24)(4x^3+4xy^2-6x^2+6y^2+2x)\right]-}$$
$$-(4x^2+12y^2+12x+2)(4x^3+4xy^2-6x^2+6y^2+2x)^2$$

haciendo $y = 0$, se obtiene

$$\rho = \frac{(4x^3-6x^2+2x)^3}{-(4x^2+12x+2)(4x^3-6x^2+2x)^2} = -\frac{2x^3-3x^2+x}{2x^2+6x+1}$$

si además hacemos

$$x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$$

tendremos el *radio de curvatura* en el vértice de la derecha; hechos los cálculos y restableciendo el radio, resulta en valor absoluto

$$\rho = \frac{R}{62}(15-13\sqrt{5})$$

Para el vértice de la izquierda se obtendría

$$\rho = \frac{R}{62}(15+13\sqrt{5})$$

Vamos á encontrar también la ecuacién de la cuártica en *coordenadas baricéntricas*, que realmente es en este caso la forma más natural y elegante de resolver el problema; pero no la que debe preferirse, por prestarse mal estas coordenadas á todo lo que atañe á *propiedades métricas*.

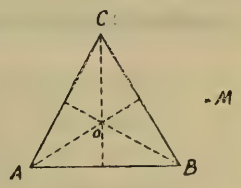


Figura 4.ª

Representemos, según costumbre, por S el á rea del *triángulo fundamental*, y por α, β, γ las coordenadas de un punto cualquiera M (fig. 4.ª) del lugar

geométrico. Sabemos que la distancia d entre dos puntos está dada por la fórmula

$$d^2 = -\frac{1}{S^2} . \Sigma a^2 (\beta_1 - \beta_0)(\gamma_1 - \gamma_0)$$

En este concepto, la distancia MA del punto M al vértice A (S, o, o) será, teniendo en cuenta que en el caso en que estamos $a = b = c$:

$$\overline{MA}^2 . S^2 = -a^2 [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\beta + \gamma) . S]$$

y análogamente

$$\overline{MB}^2 . S^2 = -a^2 [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\alpha + \gamma) S]$$
$$\overline{MC}^2 . S^2 = -a^2 [\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - (\alpha + \beta) S]$$
$$\overline{MO}^2 . S^2 = -a^2 \left[\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \frac{S^2}{3}\right].$$

La ecuación del lugar será, suprimiendo en los denominadores el factor común $-\frac{a^2}{S^2}$, y representando por ω la expresión $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$:

$$\frac{1}{\omega - (\beta + \gamma) S} + \frac{1}{\omega - (\alpha + \gamma) S} + \frac{1}{\omega - (\alpha + \beta) S} = \frac{9}{3\omega - S^2}$$

y quitando denominadores

$$\left\{ \begin{array}{c} [\omega - (\alpha + \gamma) S] [\omega - (\alpha + \beta) S] [3\omega - S^2] + \\ + [\omega - (\beta + \gamma) S] [\omega - (\alpha + \beta) S] [3\omega - S^2] + \\ + [\omega - (\beta + \gamma) S] [\omega - (\alpha + \gamma) S] [3\omega - S^2] = \\ = 9 [\omega - (\beta + \gamma) S] [\omega - (\alpha + \gamma) S] [\omega - (\alpha + \beta) S] \end{array} \right.$$

ó bien desarrollando los cálculos y teniendo en cuenta que

$$\alpha + \beta + \gamma = S \quad \text{y} \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma - \omega,$$

resulta

$$S^4 - 6\omega S^2 + 9 S \alpha\beta\gamma + 3\omega^2 = 0 \ldots\ldots \quad (3)$$

y por último, substituyendo de nuevo las cantidades S y ω por sus valores, se obtiene para ecuación de la cuártica:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 - 2\alpha^3(\beta+\gamma) - 2\beta^3(\alpha+\gamma) - 2\gamma^3(\alpha+\beta) - \\ -3(\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2) - 3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma) = 0 \ldots\ldots (4) \end{array}\right.$$

Esta ecuación (4), y mejor aún bajo la forma (3), prueba de nuevo que la cuártica es *bitangente* á la *recta del infinito,* pues, siendo la ecuación de dicha recta, en este sistema de coordenadas,

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,$$

ó bien

$$S = 0,$$

la intersección de dicha recta y la cuártica es la misma que la de

$$\left\{\begin{array}{l} \omega^2 = 0 \\ S = 0 \end{array}\right.$$

que son los *puntos cíclicos*, puesto que la ecuación $\omega = o$, que en un triángulo cualquiera representa la *elipse de Steiner circunscripta,* en este caso particular que tratamos, de un triángulo equilátero, representa la *circunferencia circunscripta,* y como tal, pasando por los puntos circulares del infinito.

Hemos tratado el problema que motivó este trabajo, *en el plano*, y ahora vamos á generalizarlo *para el espacio.*

El problema será el siguiente:

Encontrar los puntos del espacio igualmente iluminados por tres focos luminosos colocados en los vértices de un triángulo equilátero, y DE IGUAL INTENSIDAD, *que por otro de intensidad* SUMA, *situado en su centro.*

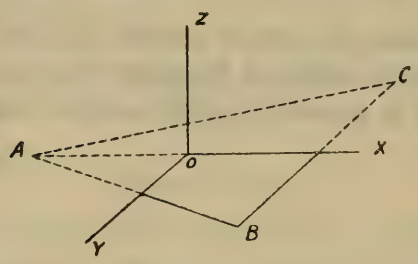


Figura 5.ª

Conservando las notaciones anteriores, la ecuación del problema será evidentemente:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{(x+R)^2+y^2+z^2}+\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2}+ \\ +\dfrac{1}{\left(x-\dfrac{R}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)^2+z^2}=\dfrac{3}{x^2+y^2+z^2} \end{array}\right.$$

y desarrollando los denominadores, resulta:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2+y^2+z^2+2Rx+R^2}+\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-Rx-R\sqrt{3}\,y+R^2}+ \\ +\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2-Rx+R\sqrt{3}\,y+R^2}=\dfrac{3}{x^2+y^2+z^2}. \end{array}\right.$$

Haciendo por abreviar:

$$x^2 + y^2 + z^2 = H \quad » \quad x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = L$$

se obtiene

$$\frac{1}{L + 2Rx} + \frac{1}{L - Rx - R\sqrt{3}\,y} + \frac{1}{L - Rx + R\sqrt{3}\,y} = \frac{3}{H}$$

pero de las igualdades

$$x^2 + y^2 + z^2 = H \quad » \quad x^2 + y^2 + z^2 + R^2 = L$$

se deduce

$$L - H = R^2 \quad » \quad 3L - H = 2(x^2 + y^2 + z^2) + 3R^2$$

y sustituyendo estos valores y haciendo operaciones, se obtiene:

$$x^4 + y^4 - z^4 + 2x^2y^2 - 2Rx^3 + 6Rxy^2 + R^2(x^2 + y^2) - \\ - 2R^2z^2 - R^4 = 0$$

á cuya ecuación se puede dar la forma

$$(x^2 + y^2)^2 - 2Rx(x^2 - 3y^2) + R^2(x^2 + y^2) - \\ - (Z^2 + R^2)^2 = 0 \ldots\ldots \qquad (1)$$

que es la ecuación de la superficie que traduce la propiedad geométrica del enunciado, y que, según se ve, es de *cuarto orden.*

Vamos á encontrar la intersección de la superficie con los planos coordenados ¿ para $Z = 0$, resulta:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2Rx(x^2 - 3y^2) + R^2(x^2 + y^2) - R^4 = 0$$

que es la cuártica que hemos estudiado en la primera parte de este trabajo, como naturalmente debía suceder.

Para $y = 0$, se obtiene la ecuación

$$x^4 - Z^4 + R^2 x^2 - 2 R x^3 - 2 R^2 Z^2 - R^4 = 0$$

que, aunque de cuarto grado, no representa una *cuártica* propiamente dicha, puesto que su primer miembro se descompone en los dos factores siguientes:

$$[x^2 - Rx - (Z^2 + R^2)]\,[x^2 - Rx + (Z^2 + R^2)] = 0$$

el primer factor igualado á cero da la *hipérbola equilátera*, que tiene por ecuación

$$Z^2 - x^2 + Rx + R^2 = 0$$

y el segundo es un *círculo imaginario*, que tiene por centro el pie de la altura del triángulo relativa al vértice A, y por radio

$$\frac{R\sqrt{-3}}{2}.$$

En cuanto á la hipérbola, tiene por centro el mismo punto, y su eje real tiene por valor $R\sqrt{5}$.

La intersección de la superficie con el plano Zy se obtendrá haciendo $x = 0$, y resulta la cuártica

$$(Z^2 + R^2)^2 - y^4 - R^2 y^2 = 0$$

cnyos puntos *en el infinito* son los *puntos cíclicos*, y los *puntos del infinito* situados sobre las bisectrices del ángulo $I o Z$, evidentemente tiene por centro el origen de coordenadas y por asíntotas las bisectrices de los ejes.

Vamos ahora á encontrar la intersección de la superficie con un plano cualquiera pasando por el eje de las Z; ten-

dremos que hacer en la ecuación (1) $y = Kx$, y resultará para *la proyección* de la sección sobre el plano xz (fig. 6.ª):

$$\begin{cases}(1 + K^2)^2 x^4 - Z^4 - 2R(1 - 3K^2)x^3 + \\ + R^2(1 + K^2)x^2 - 2R^2 Z^2 - R^4 = 0 \ldots\ldots \quad (2)\end{cases}$$

pero lo que verdaderamente interesa es, no la proyección de la sección, sino la *línea misma* en el plano Zot que produce

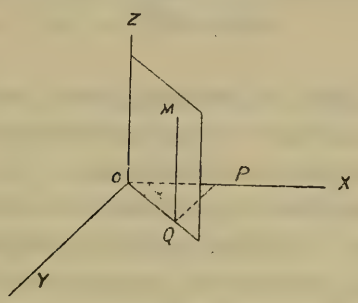


Figura 6.ª

la sección: he aquí el procedimiento que hemos seguido y que primero expondremos de un modo general.

Sea la ecuación de la proyección de la sección sobre el plano xZ

$$f(Zx) = 0$$

si llamamos α el ángulo que forma la traza del plano en cuestión, con la parte positiva del eje de las x, se tendrá $K = tg\alpha$; pero en el triángulo rectángulo oPQ (fig. 6.ª), se verifica

$$oP = oQ \cos \alpha$$

es decir,

$$x = t \cos \alpha = \frac{t}{\sqrt{1 + tg^2 \alpha}} = \frac{t}{\sqrt{1 + K^2}}$$

poniendo este valor en $f(Z, x) = 0$ resultará $\varphi(Z, t) = 0$, que es la ecuación de la intersección que se desea.

Aplicando esto á la ecuación que antes hemos obtenido, resulta para la sección *en el plano Zot*:

$$Z^4 - t^4 + 2RK' t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \ldots\ldots (3)$$

habiendo llamado K', á la cantidad

$$\frac{1 - 3K^2}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Se obtienen, pues, de un modo general, *cuárticas* que pasan por los puntos cíclicos y por los *puntos en el infinito* de las bisectríces del ángulo de los ejes.

Se puede comprobar la exactitud de la ecuación (3), deduciendo de ella, como caso particular, las secciones que ya hemos obtenido directamente causadas por los planos Zx y Zy, y que corresponden, respectivamente, á las hipótesis $K = 0$ y $K = \infty$.

La primera nos da, teniendo presente que entonces $K' = 1$ y la variable t se convierte en x,

$$Z^4 - x^4 + 2Rx^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 x^2 + R^4 = 0$$

que es la misma que ya hemos obtenido.

Al hacer $K = \infty$, K' se convierte en $\frac{\infty}{\infty}$, y para salvar la indeterminación hallaremos el cociente de las *derivadas* respecto á K, que es

$$K' = \frac{-6K}{3K(1 + K^2)} = \frac{-2}{1 + K^2} = 0 \text{ (para } K = \infty \text{)}$$

haciendo, pues, esta hipótesis en la ecuación (3) se obtiene, teniendo en cuenta que ahora t es y,

$$(Z^2 + R^2)^2 - y^2 (y^2 + R^2) = 0$$

también conforme con lo obtenido anteriormente.

Volviendo á considerar la cuártica (3)

$$Z^4 - t^4 + 2RK^1 t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \ldots\ldots \quad (3)$$

Vamos á determinar las *asíntotas* de la curva general que representa. Sus *coeficientes angulares* se obtendrán haciendo $t = 1$ y $Z = a$, en los términos de cuarto grado ó igualando el resultado cero. Esto es, escribiendo la ecuación

$$a^4 - 1 = 0$$

que da para a los cuatro valores

$$a = +1 \quad » \quad a = -1 \quad » \quad a = +\sqrt{-1} \quad » \quad a = -\sqrt{-1}$$

que responden los dos primeros á *asíntotas reales*, y los otros á las imaginarias, de que prescindiremos.

Las *ordenadas en el origen*, resultarán de la ecuación

$$4a^3 b + ZRK' = 0$$

que da

$$b = \frac{-RK'}{2a^3}$$

para $a = 1$, resulta:

$$b = \frac{-RK'}{2} = \frac{-R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

para $a = -1$, se obtiene:

$$b = \frac{RK'}{2} = \frac{R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Las *asíntotas reales,* tienen, pues, por ecuaciones

$$Z = t - \frac{R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}} \quad » \quad Z = -t + \frac{R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Es decir, que son paralelas á las bisectríces del ángulo Zot en sus distintas posiciones, ó lo que es lo mismo, forman ángulos de 45°, la una con la parte positiva y la otra con la negativa del eje de las Z; además cortan á dicho eje en puntos equidistantes del origen, como es natural, dada la simetría de la superficie respecto al plano xoy.

Al girar el plano Zot alrededor de oZ, estas asíntotas engendrarán *dos superficies regladas,* que tendrán como *directriz rectilínea* el eje de las Z, y como *cono director* el que se obtendría trazando por el origen rectas formando ángulos de 45° con la parte positiva y negativa del eje de las Z, superficies que serán *asintóticas* de la que estudiamos.

Tratemos de encontrar la ecuación de dichas superficies, por ejemplo, para la *primera asíntota.*

La proyección de dicha recta sobre el plano xoz se obtendrá haciendo

$$t = x\sqrt{1 + K^2}$$

en la

$$Z = t - \frac{R(1 - 3K^2)}{2(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

y resulta

$$2Z(1 + K^2)^{\frac{3}{2}} = 2(1 + K^2)^2 x - R(1 - 3K^2)$$

se obtendrá, pues, el *lugar geométrico,* eliminando K entre esta última ecuación y la $y = Kx$ y así resulta

$$2Z\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^{\frac{3}{2}}=2\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)^2 x-R\left(1-\frac{3y^2}{x^2}\right)$$

ó bien

$$2Z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=2(x^2+y^2)^2-R(x^2-3y^2)x \ldots\ldots (4)$$

Si se hubiese partido de la otra asíntota, se obtendrá la ecuación:

$$2Z(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=-2(x^2+y^2)^2+R(x^2-3y^2)x \ldots\ldots (5)$$

Estas superficies se cortan sobre el plano xoy según la curva que tiene por ecuación

$$2(x^2+y^2)^2=R(x^2-3y^2)x$$

ó sea en *coordenadas polares:*

$$\rho=\frac{R}{2}\cos 3\omega$$

que es la curva llamada *rosácea*, que viene á ser el lugar geométrico de las intersecciones con el citado plano de las asíntotas de una y otra clase.

Este hallazgo curioso de la curva *rosácea* para el lugar geométrico de las trazas de las asíntotas, nos lleva por una pendiente natural á decir dos palabras sobre estas curvas, no sólo interesantes, sino hasta *agradables*, bajo el punto de vista *estético*.

Fueron estudiadas por primera vez por Guido-Grandi en el primer tercio del siglo XVIII y son *curvas algébricas* siempre que el coeficiente de ω sea *racional;* cuando dicho coeficiente es *entero*, la curva tiene tantas *ramas* como indica este

coeficiente si es *impar*, y el *doble* en el caso de ser *par*, cuando es fraccionario, y *supuesto irreducible*, el número de ramas es igual al *numerador* ó á su *doble*, según que los términos de la fracción sean de la *misma* ó *distinta* paridad. Estas curvas son *cuadrables*, pero la *rectificación* depende de las *integrales elípticas*, de aquí el que se les aplique un teorema análogo al célebre de Fagnano, como ocurre con otras curvas: el *caracol de Pascal*, la *curva de los senos*, etc., etcétera.

Pueden consultarse sobre estas curvas las obras de nuestros ilustres amigos los Sres. Gómes Teixeira y Brocard, *Tratado de curvas especiales* y *Curvas Geométricas*, así como un trabajo, muy interesante, que publicó en Mathesis en 1894, nuestro también excelente amigo el sabio geómetra italiano señor Pirondini, en donde dió á conocer un curioso procedimiento mecánico para la descripción de estas curvas.

Terminada la anterior digresión, volvamos á considerar la superficie (4) y tratemos de encontrar su intersección con el cilindro recto que tiene por ecuación

$$x^2 + y^2 = R^2$$

esto es, el que tiene por sección recta, según el plano xy, la circunferencia circunscripta al triángulo. Haremos en la ecuación (4)

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y se tendrá

$$2\,Z\,R^3 = 2\,R^4 - R\,(4x^2 - 3\,R^2)\,x$$

las *proyecciones*, pues, de la curva intersección sobre los planos xy y xz tienen por ecuaciones

$$x^2 + y^2 = R^2$$

y

$$2\,ZR^2 + x\,(4\,x^2 - 3\,R^2) = 2\,R^3.$$

Así, pues, la superficie (4) puede engendrarse por una recta que resbala sobre esta curva y el eje de las Z, formando un ángulo constante de 45° con la parte positiva de dicho eje.

Volviendo á considerar la curva

$$Z^4 - t^4 + 2RK' t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \ldots\ldots (3)$$

que representa la sección de la superficie (1) por un plano cualquiera que pasa por el eje de las Z, es muy fácil darse cuenta de las variaciones que va experimentando en sus distintas posiciones; para esto será conveniente poner el parámetro K' en función del ángulo que llamaremos ω, que forma su traza ot sobre el plano xy con el eje de las x. Tenemos

$$K' = \frac{1 - 3K^2}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

pero evidentemente $K = tg\omega$, y substituyendo este valor resulta

$$K' = \frac{1 - 3\,tg^2\,\omega}{(1 + tg^2\,\omega)^{\frac{3}{2}}} = \cos^3\omega - 3\cos\omega\,(1 - \cos^2\omega) =$$

$$= 4\cos^3\omega - 3\cos\omega = \cos 3\,\omega.$$

La ecuación (3) toma, por consiguiente, la forma (fig. 7.ª).

$$Z^4 - t^4 + 2R\cos 3\,\omega\, t^3 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \ldots\ldots (3)$$

Al variar ω de cero á 30°, el coeficiente de t^3 pasa por todos los valores *absolutos* posibles; para el primer valor, dicho coeficiente es igual á $2R$, y para el último, cero. Como la *abscisa en el origen* de las asíntotas es

$$\frac{R}{2} \cdot \frac{1 - 3K^2}{(1 + K^2)^{\frac{3}{2}}}$$

se convertirá, en vista de la anterior transformación, en

$$\frac{R}{2} \cos 3\,\omega;$$

y, por consiguiente, las asíntotas cortarán al plano del triángulo en el punto P (fig. 7.ª) cuando el ángulo $\omega = 0$, y en el punto o para $\omega = 30°$ trazando la media rama de *rosá-*

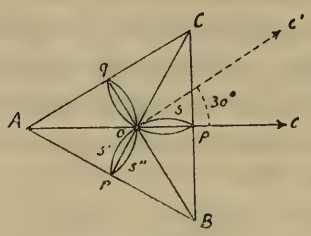


Figura 7.ª

cea p s o, tangente en o á la recta ot'. Al variar ω de 30° á 60° el coeficiente de t^3 variará de *cero* á $-2R$, pasando su *valor absoluto* por todos los que antes tomó; pero es evidente que si antes dos valores $Z = h$ » $t = K$ verificaban la ecuación (3), ahora lo verificarán $Z = -h$ » $t = -K$; es decir, que la misma sección se presentará en forma simétrica de antes, esto es, las ramas estarán invertidas. La *abscisa en el origen* de la asíntota variará de cero á $-\frac{R}{2}$ marcando la media rama $os'r$. De 60° á 90° se reproducirán las secciones como entre 30° y 60°; la traza de la asíntota marcará la media hoja $rs''o$. De 90° á 120° los hechos se verificarán como entre 30° y 60°, y así sucesivamente. Podemos, pues, considerar 12 *zonas*, de ellas 6 iguales, y otras 6 en que las secciones, si bien iguales entre sí, aparecen en forma simétrica de las anteriores respecto á los ejes móviles. En todo el giro las trazas de las asíntotas marcarán las *tres hojas de rosácea*, según se ve en la figura 7.ª. También se ve que para

los ángulos 0° — 60° — 120°, es decir, cuando las trazas del plano secante sobre el xy son las alturas del triángulo, la cuártica se descompone en dos factores, siendo el real una *hipérbola equilátera*. En cambio, cuando ω toma los valores 30° — 90° — 150°, es decir, cuando la traza es paralela á los lados del triángulo, desaparece el coeficiente de t^3, y la cuártica tiene por centro el del triángulo, reduciéndose su ecuación á

$$Z^4 - t^4 + 2R^2 Z^2 - R^2 t^2 + R^4 = 0 \ldots\ldots \qquad (4)$$

ó bien

$$(Z^2 + R^2)^2 - t^2 (t^2 + R^2) = 0 \ldots\ldots \qquad (4)$$

ó en coordenadas polares

$$\cos 2\,\omega = \frac{\rho^2 + 2}{2\rho^4 + 3\rho^2}.$$

La curva que representa esta ecuación (4) se puede construir por la geometría elemental, pues despejando Z se tiene

$$Z = \pm\sqrt{-R^2 \pm \sqrt{t^4 + R^2 t^2}}$$

dos valores de Z *son siempre imaginarios*, y para que los otros dos sean reales, es necesario y suficiente que

$$t^4 + R^2 t^2 \lesseqgtr R^4$$

ó bien

$$t \lesseqgtr \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

considerando, *en esta hipótesis*, sólo el valor absoluto de Z se le puede dar la forma

$$Z = \sqrt{t\sqrt{t^2 + R^2} - R^2}$$

expresión que se puede construir por la geometría elemental una vez fijada *gráficamente* la *abscisa* t. No se olvide que, según hemos dicho, las *asíntotas* de esta *cuártica* son las bisectrices de los ángulos que forman los ejes oZ y ot.

Hemos visto que las secciones que producen los planos que tienen por trazas las alturas, ó cuando éstas son paralelas á los lados, *tienen centro* que son respectivamente los vértices ó el centro de la *rosácea* que hemos considerado, y se ocurre investigar si otros planos, pasando por oZ, podrán también producir curvas con centro. Si lo tienen, evidentemente estará sobre el eje ot, y, por consiguiente, todo se reduce á trasladar el eje de las Z para ver si pueden desaparecer los coeficientes de los términos, en los que t entra con exponente impar. La ecuación tomará la forma

$$Z^4 - (t+h)^4 + 2K'(t+h)^3 + 2Z^2 - (t+h)^2 + R^4 = 0$$

los coeficientes de t^3 y t son

$$-4h + 2K' \qquad \text{y} \qquad -4h^3 + 6K'h^2 - 2h$$

que igualados á *cero* dan

$$h = \frac{K'}{2} \qquad \text{y} \qquad K'^2 - 3K'^2 + 2 = 0$$

de donde

$$K'^2 = 1 \qquad \text{ó} \qquad K' = \pm 1$$

luego

$$\cos 3\omega = \pm 1$$

y por consiguiente,

$$\omega = 0^\circ, 30^\circ, 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ \text{ y } 150^\circ$$

que son precisamente las secciones que anteriormente hemos considerado, y por lo tanto *las únicas,* pasando por oZ que tienen centro.

Aquí damos fin; pero quizás insistamos sobre este problema que hemos estudiado, dándole aún un carácter más general.

La Coruña, Octubre de 1909.

XVI. — Observaciones acerca del método de Weszeleszky para la determinación del bromo y del iodo.

Por José Casares Gil

Recomienda Fresenius para determinar el bromo y el iodo en las aguas minerales, concentrar gran cantidad de líquido (50 á 60 litros de ordinario), añadiéndole carbonato sódico. Durante la operación, sepáranse las combinaciones salinas magnésicas, ferruginosas, etc., insolubles, y filtrando y lavando el residuo, se obtienen líquidos que contienen los bromuros y ioduros, acompañados de las sales solubles y, especialmente, de carbonatos y cloruros alcalinos. Con el fin de eliminar estos compuestos y concentrar de camino los bromuros y ioduros, aconseja el propio Fresenius evaporar los líquidos alcalinos hasta obtener una masa salina, la cual se ha de hervir con alcohol, cuyo líquido disuelve de preferencia los bromuros y los ioduros. Estos tratamientos es necesario repetirlos varias veces; los líquidos alcohólicos se destilan, el residuo se somete á nuevo tratamiento con alcohol, destilando luego y repitiendo aún, por tercera vez, las operaciones. Así llega á conseguirse un líquido en el que se determina el iodo separándolo de sus combinaciones empleando ácido sulfúrico cargado de vapores nitrosos, disolviendo en sulfuro de carbono y valorando al fin con hiposulfito sódico. Se determina el bromo en los líquidos filtrados apelando á un procedimiento indirecto, fundado en precipitar juntos el cloruro y el bromuro de plata y calentarlos en una corriente de cloro, deduciendo del cambio de peso la cantidad de bromuro transformado en cloruro.

Basta el sucinto relato de las operaciones para comprender con cuánta facilidad un descuido en tan larga serie de filtraciones, destilaciones, etc., puede falsear los resultados. Ninguna reacción indica el término de los tratamientos alcohólicos, y de ello resulta que sea muy frecuente, en particular si el químico no es práctico, el empleo de enormes volúmenes de alcohol, que hacen todavía más engorroso el procedimiento. Treadwell, en su análisis de las aguas de Baden (Cantón de Argovia en Suiza), se contrajo á operar con los líquidos alcalinos procedentes de la concentración de treinta litros de agua, y en lugar de evaporar hasta lograr una masa salina, lo hace tan sólo hasta que las sales disueltas comienzan á depositarse, añadiendo entonces gran cantidad de alcohol. De esta manera se tiene la seguridad de que los bromuros y los ioduros quedan disueltos; el precipitado que se forma es de cloruros y carbonatos. Filtrando y repitiendo varias veces la serie de operaciones, se llega á conseguir tener los bromuros y ioduros en disolución concentrada y se determinan entonces empleando los métodos indicados y apelando, además, para el bromo, al procedimiento de Bunsen, fundado en la acción del agua de cloro. Las dificultades é inconvenientes del sistema son iguales á los advertidos respecto del de Fresenius.

Con motivo de la hipótesis de algunos médicos, relativa á que el bocio y el cretinismo débense á la falta de cantidades mínimas de iodo en las aguas potables, Lecco examinó las de Belgrado, determinando la proporción de tal cuerpo en ellas contenido. En su estudio, publicado en el *Zeitsch für analy Chemic 1896*, dice que, para investigar el iodo, no son necesarios los prolijos tratamientos indicados ni el evaporar tan enorme volumen de agua. De ordinario bastan cinco litros, concentrando hasta tener un pequeño volumen, y en el líquido filtrado busca y determina Lecco cuantitativamente el iodo, apelando á la reacción del ácido nitroso y el sulfuro de carbono, valorando con hiposulfito.

En el año de 1900 publicó Weszeleszky, en el *Zeitsch für analy Chem*, un método que excitó mi atención y que he ensayado con objeto de comprobarlo. Es, en verdad, un procedimiento sencillo é interesante. Se funda en la acción del cloro sobre los bromuros y los ioduros, y tiene como precedentes ciertas observaciones de Winkler, quien, antes de la fecha apuntada, diera á conocer un procedimiento volumétrico para averiguar la proporción del iodo. Haciendo actuar el agua de cloro sobre un ioduro, éste se transforma en iodato. Si el líquido está ácido y se hierve, el cloro se desprende y sólo queda la nueva sal formada. Agregando entonces ioduro potásico disuelto y ácido clorhídrico, se pone en libertad iodo, el cual se valora con el hiposulfito sodio decinormal. 1^{cc} de hiposulfito equivale, según Weszeleszky, á 0, gr. 0021 de iodo. Las reacciones químicas fundamentales del procedimiento se expresan de esta manera:

$$IK + 6KOH + 6Cl = IO_3K + 6ClK + 3H_2O$$

$$IO_3K + 5IK + 6ClH = 6ClK + 3H_2O + 6I.$$

Aplicó Weszeleszky iguales principios á la determinación del bromo con la diferencia de que, mientras tratándose del iodo el agua de cloro ha de actuar como líquido ácido, para el bromo es menester operar en líquido alcalino y evaporar hasta sequedad, con el objeto de destruir el hipoclorito formado. He aquí las reacciones:

$$BrK + 6KOH + 6Cl = BrO_3K + 6ClK + 3H_2O$$

$$Br + 6KOH + 5Cl = BrO_3K + 5ClK + 3H_2O$$

$$BrO_3K + 6IK + 6ClH = BrK + 6ClK + 3H_2O + 6I.$$

Según se advierte en las fórmulas, un peso molecular de bromuro ó de ioduro pone en libertad seis átomos de iodo, resultando así la reacción de gran sensibilidad, al punto que

permite determinar pequeñísimas cantidades de bromuro y de ioduro. Los datos experimentales que acompañan á la Memoria de Weszeleszky, sirviéndole á modo de complemento, no pueden ser más satisfactorios.

Con intento de comprobar tan expedito procedimiento, preparé una disolución de ioduro de potasio, empleando una cantidad conocida de este cuerpo y un litro de agua. Previamente había desecado el ioduro á 180°. Un centímetro cúbico de la disolución acuosa contiene 0, gr.. 003459 de iodo. Practicáronse los primeros ensayos añadiendo agua de cloro á la disolución de ioduro, concentrando mucho para expulsar el exceso de cloro, diluyendo con agua, agregando ioduro potásico y ácido clorhídrico y valorando luego el iodo libre empleando, en la forma acostumbrada, la disolución decinormal de hiposulfito sódico. Operando así, los resultados que he alcanzado fueron bastante defectuosos, según lo demuestran los números del siguiente cuadro:

Disolución de I K	Agua de cloro.	$S_2 O_3 N_2$ decinormal.	Iodo hallado.	Iodo calculado.	Diferencia.
1cc	15cc	0,5cc	0,00105	0,00345	— 0,00240
1cc	15cc	0,8cc	0,00168	0,00345	— 0,00177
5cc	27cc	2,1cc	0,00440	0,01725	— 0,01285
10cc	30cc	15,0cc	0,03150	0,03459	— 0,00309

Hay, por lo tanto, pérdida de iodo durante la evaporación. Acudí entonces, para conseguir la expulsión del cloro, á hacer pasar á través del líquido caliente una corriente rápida de aire producida mediante aspiración con la trompa, y los resultados entonces obtenidos ya son por completo satisfactorios, y así lo demuestran los números contenidos en la presente tabla:

Solución de I K	Agua de Cl.	Iodo hallado.	Iodo calculado.	Diferencia.
1cc	10cc	0,003465	0,003450	+ 0,000015
5cc	15cc	0,017220	0,017230	— 0,00003
10cc	30cc	0,03423	0,03450	— 0,00027
20cc	60cc	0,06856	0,06900	— 0,00044

Practiqué también el siguiente experimento: 100cc de agua acidulada con ácido clorhídrico muy puro se mezclaron con agua de cloro; se calentó hasta la ebullición; se hizo pasar una corriente de aire; se repitió esta operación tres veces, y añadiendo al líquido frío ioduro potásico y engrudo de almidón sólo se obtuvo el viso violado que corresponde á mínimas cantidades de iodo. Es, pues, muy difícil expulsar la totalidad del cloro; pero el que resta no influye en la determinación cuantitativa.

Cuando se trata de determinar el bromo, aplicado al método de Weszeleszky, el cloro actúa sobre el bromuro en un líquido alcalino. En tales condiciones no hay pérdida de bromo, que se transforma íntegramente en bromato; pero como el hipoclorito formado ejerce acciones enérgicas sobre el ioduro de potasio, debe ser destruído, transformándolo, á su vez, en clorato, el cual no actúa sobre el dicho ioduro potásico, á lo menos, según el autor del procedimiento, en las condiciones en que éste se practica, en cuyo punto mis observaciones personales no concuerdan con las suyas.

Disolviendo 0, gr. 029 de ClO_3K en 125cc de agua destilada, agregando 5cc de una solución de ioduro potásico al 10 por 100 y 5cc de ácido clorhídrico, al añadir al líquido resultante engrudo de almidón, apareció la característica coloración azul, y fueron precisas para destruirla y tornar incoloro el líquido, tres gotas de solución decinormal de hiposulfito sódico. Repitiendo el experimento con la variante de disol-

ver el clorato en sólo 15^{cc} de agua destilada y procediendo lo mismo en lo demás, fueron precisas 5 gotas de hiposulfito para decolorar el líquido; pero al cabo de algún tiempo adquiría de nuevo el tono azul. Así se demuestra que en las condiciones en que se practica el experimento, el ácido clorhídrico y el clorato potásico reaccionan y las mínimas cantidades de cloro que se desprenden son causa de la descomposición, siquiera parcial, del ioduro de potasio.

Con el objeto de comprobar si la evaporación á sequedad destruía por completo el hipoclorito formado, practiqué los siguientes experimentos: 1 gr. de carbonato potásico fué disuelto en 50^{cc} de agua destilada, se añadieron 20^{cc} de agua de cloro, se evaporó primero á fuego directo, terminando á la temperatura del baño de María y desecando el residuo durante bastante tiempo. Disolviéndolo luego en agua agregando al líquido resultante ioduro potásico y ácido clorhídrico y engrudo de almidón, se necesitaron 2 gotas de disolución diunormal de hiposulfito sódico para decolorarlo, privándolo del tono azul característico que había adquirido. Repetido dos veces el ensayo, los resultados fueron idénticos; pero es indispensable seguir exactamente las indicaciones apuntadas. En los primeros experimentos me ocurrió gastar algunos centímetros cúbicos de la disolución de hiposulfito, por no ser completa la transformación del hipoclorito en clorato.

He aquí algunos datos numéricos que atañen á la precisión del método:

CO_3K_2	Br K	Agua de cloro.	$S_2O_3Na_2$	Bromo hallado.	Bromo calculado.	Diferencia.
1gr.	20cc	50cc	3.36	0,04478	0,04760	— 0,00282
1gr.	5cc	32cc	8.4	0,01111	0,01190	— 0,00079
1gr.	1cc	32cc	1.9	0,002513	0,002380	+ 0,000133

CO_3K_2	Br K	Agua de cloro.	$S_2O_3Na_2$	Bromo hallado.	Bromo calculado.	Diferencia.
1gr.	1cc	15cc	1.9	0,00251	0,00238	+ 0,00019
1gr.	5cc	15cc	8.1	0,01071	0,01190	— 0,00119
1gr.	10cc	15cc	13.3	0,01759	0,02280	— 0,00521

CO_3K_2	Br K	Agua de cloro.	$S_2O_3Na_2$	Bromo hallado.	Bromo calculado.	Diferencia.
1gr.	1cc	15cc	1.7	0,00224	0,00238	— 0,00014
1gr.	5cc	30cc	8.3	0,01098	0,01190	— 0,00092
1gr.	10cc	45cc	16.05	0,02123	0,02280	— 0,00160

En las aguas minerales, el bromo y el iodo existen simultáneamente, y con el fin de determinarlos, Weszeleszky ape-

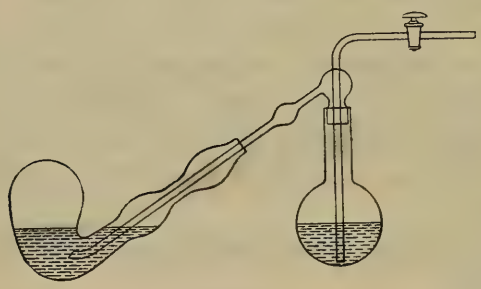


Figura 1.ª

la á concentrar algunos litros del líquido, añadiéndole un poco de carbonato potásico y evaporando hasta reducirlo al volumen de 50 á 100 centímetros cúbicos, se filtra, y el líquido filtrado se introduce en el aparato representado en la figura adjunta.

Tiene el matraz capacidad de 200 á 250 centímetros cúbi-

cos. En la retorta se pone una disolución de potasa con agua destilada; el agua se acidula con ácido clorhídrico; se agrega agua de cloro en exceso, haciendo pasar simultáneamente corriente de anhidrido carbónico, que se ha de prolongar hasta la completa transformación de la potasa cáustica en carbonato potásico.

Mediante la acción del agua de cloro, el ioduro conviértese en iodato, que queda en el matraz; el bromuro se descom-

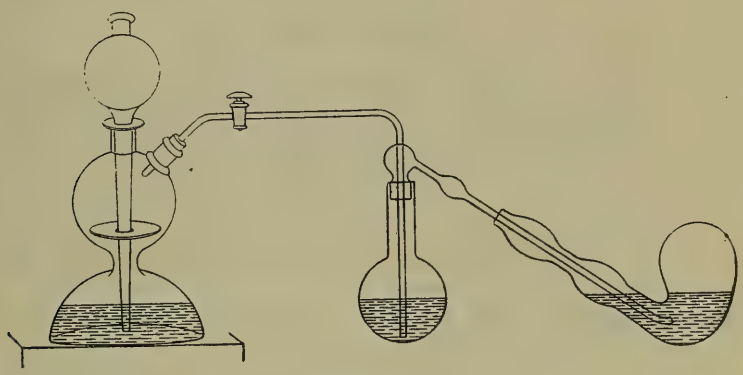


Figura 2.ª

pone y el bromo libre destila arrastrado por el vapor de agua y la corriente de anhidrido carbónico, siendo absorbido por la potasa el exceso de cloro. En el líquido alcalino, el cloro oxida al bromo, transformándolo íntegramente en bromato y en los líquidos contenidos en la retorta y en el matraz se determinan al cabo el bromo y el iodo siguiendo los procedimientos antes indicados.

No habiendo á mano un matraz apropiado, he dispuesto el aparato conforme expresa el dibujo, y su construcción es sencillísima.

En las aguas de La Toja la cantidad de bromo es tan notable, que bastan 50 á 100 centímetros cúbicos para determinar este cuerpo; en cambio, la proporción de iodo es tan in-

significante, que para descubrirlo es necesario manejar muchos litros de líquido, lo cual se explica perfectamente, teniendo en cuenta que tales aguas son ferruginosas y calientes y recordando la facilidad con que las sales férricas descomponen los ioduros.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Navás, S. J (R. P. Longinos.)—Boletín de la Real Sociedad española de Historia Natural, Diciembre, 1907.—Tricópteros nuevos.

Navás, S. J. (R. P. Longinos.)—Extracto de la Revista Montserratiana, Diciembre de 1907.—Neuróptero nuevo de Montserrat. - Zaragoza y Octubre de 1907.

Navás, S. J. (R. P. Longinos.)—Notas Zoológicas, por el...—Extracto del Boletín de la Sociedad Aragonesa de Ciencias Naturales.—Tomo VI, Núms. 8, 10 (Nov. y Dic. 1907).

Páramo Rangel (Lic. Próspero.)—Los Cometas en su relación con el Atonismo Universal, por el...—México, 1907.

Poole (Henry S.) — Geological Survey of Canada, A. P. Low, Deputy Head and Director.—The Barytes Deposits of Lake, Ainslie and North Cheticamp, núm. 1, etc, By...—Ottawa, 1907.

Université de Kharkoff. - Travaux de la Société des Sciences physico-chimiques (à...)—1903-1904.—Tomo XXXI, XXXII, XXXIII.—Suppléments Fasc. 16, 17, 18 y 19; idem XXXII.—1904-1906.

United States Naval Observatory-Navy Department...—Synopsis of the Report of the Superintendent of the...—For the fiscal year ending. June 30, 1907.—Washington, 1908.

Universitá di Sassari.—Anno V, Sez II, Fasc. I-II.—Studi Sassaresí.—Publicati per cura di alcuni professori della...—Sassari, 1907-908.

Abbott, M. D. (Charles Conrad).—Archeologia Nova Cæsarea.—N.º. II. By... 1908. -Trenton N. J., 1908.

American Museum of Natural History.—The Foyer Collection of Meteorites. By Edmund Otis Hovey Ph. D.—Guide Leaflet N.º. 26, December, 1907.

Museo Nacional de Buenos Aires.—Anales del...—Serie III, Tomo VII. (Con 18 láminas y 16 figuras en el texto).—Buenos Aires, 1907.

Observatorio Astronómico da Universidade de Coimbra (Real).—Ephemerides Astronomicas para o anno de 1908 calculadas para o meridiano do... Publicaçao official.—Coimbra, 1907.

(Se continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XIII.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia tercera..... 197

XIV.—Determinación de algunas constantes físicas de la manganina, por *B. Cabrera*..... 217

XV.—Sobre un problema de física, por *Juan Jacobo Durán-Loriga*..... 242

XVI.—Observaciones acerca del método de Weszeleszky para la determinación del bromo y del iodo, por *José Casares Gil*..... 272

Publicaciones recibidas..... 280

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

C. & G. SURVEY,
LIBRARY AND ARCHIVES
MAR 28 1910
Acc. No.
CANCELLED

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 6

(Diciembre de 1909)

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1909

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

C. & G. SURVEY.
LIBRARY AND MUSEUM
MAR 2 8 1910
Acc. No.

XVII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia cuarta.

SEÑORES:

Empezamos ya el estudio de un concepto geométrico, de aplicación general en la Física matemática moderna: nos referimos al concepto de los vectores.

Y decíamos, y aun hemos repetido varias veces, que en las entidades que crea el matemático hay una doble categoría.

Una, la más extensa, la de aquellos seres ó entidades abstractas que el matemático crea, digámoslo así, por derecho propio, y también podemos decir, de una manera desinteresada, sin pensar en sus aplicaciones á los fenómenos de la Física ó de la Química, es decir, sin tener en cuenta su utilidad para otra ciencia, pensando tan sólo en enriquecer con nuevas creaciones el campo de la Ciencia pura.

Otra, muy extensa también, aunque no tanto como la primera, comprendiendo todas aquellas entidades que sean de aplicación á los fenómenos del mundo inorgánico y á las ciencias que los estudian; estas últimas son muchas veces generalizaciones de otras entidades menos abstractas.

Las relaciones entre aquellas primeras entidades dan lugar á teorías puras de las ciencias matemáticas.

Y estas teorías pueden presentar uno de estos dos caracteres, hablando y discurriendo en términos generales. O bien

son teorías completamente nuevas sin relación ó con relación muy remota y, si vale la palabra, muy subterránea con las grandes teorías anteriores de la Ciencia, verdaderas islas y, valga la comparación, separadas del gran continente de la Ciencia matemática.

O bien, por el contrario, son generalizaciones ó unidades superiores de otras teorías ya establecidas, de suerte que ensanchan la Ciencia siempre en contacto con ella y elevándola á otra unidad superior. Un continente, continuando nuestro ejemplo, que se agranda por continuidad de tierra firme, y ésta es casi la regla general y éste es el proceso en cierto modo de la Ciencia: la Ciencia crece y se ensancha elevándose de lo particular á lo general, de unidades inferiores á otras más altas que, en vez de anular aquéllas, las llaman á sí, las completan y en las nuevas leyes generales encuentran propiedades particulares antes no conocidas.

Y en todo esto continuamos dentro de la Ciencia pura y sin volver la vista á ninguna aplicación, si bien, como hemos dicho tantas veces, un día llega, ó un día llegará, en que, las mayores abstracciones del matemático, se vea con asombro que son grandes simbolismos intelectuales de las leyes del mundo físico.

Las teorías que engendran aquellas entidades matemáticas de la segunda categoría ya son por sí, desde el primer momento, interpretación matemática de los fenómenos de la Naturaleza. Precisamente con este fin las creó el matemático, para explicar racionalmente los fenómenos del mundo exterior.

Fueron, en cierto modo, creaciones utilitarias.

Se creó una teoría para explicar la luz; otra teoría para explicar el sonido; otras varias para explicar la electricidad ó el magnetismo.

Precisamente la teoría de los vectores se encuentra en este caso, como explicábamos en las últimas conferencias.

*
* *

Lo mismo en los problemas de la Ciencia matemática y en la creación de entidades abstractas, que en los problemas del mundo físico y en los seres que pueblan el espacio, no ya la alta metafísica, sino la experiencia vulgar y hasta el sentido común, nos hacen distinguir dos cosas. Primero, los seres considerados como unidad cada uno de ellos, que es lo que podemos llamar un individuo ó varios individuos, individuo abstracto ó individuo real; y segundo, las relaciones entre estos individuos, el modo de agruparlos, de reunirlos, las leyes de estos agrupamientos y, casi pudiéramos decir, la fuerza interna de estas relaciones.

Expliquemos esto en términos precisos por medio de ejemplos.

Consideremos dos fuerzas que actúan en un punto y que están representadas geométricamente por medio de rectas, según el simbolismo de la Mecánica ordinaria.

Pues ocurre este problema: sean cuales fueren los efectos de estas fuerzas, que por ahora no los conocemos ni los definimos ¿existirá una fuerza única, cuyo efecto único equivalga al de las dos componentes? ó como se dice en Mecánica: ¿estas dos fuerzas tendrán una resultante?

Admitamos como evidente que la tienen, para no engolfarnos en otras cuestiones separándonos de la principal.

Pues en este caso se formula este problema y es un problema elemental de la Mecánica: ¿cómo se halla la resultante de dos fuerzas concurrentes?

Y aquí vemos en este ejemplo sencillísimo: 1.° Las entidades, los individuos aislados, las dos fuerzas. 2.° Una relación mecánica entre ellas mediante la cual su diversidad se reduce á una unidad, la de la resultante; es decir, una relación mecánica que las enlaza, que las compone y que las eleva, en cierto modo, á la unidad de su resultante.

Y como este ejemplo, pudiéramos presentar otros infinitos.

Y nótese que este problema no lo creamos nosotros á capricho, no es un convencionalismo matemático, como no sea el convencionalismo del simbolo mismo, sino que brota de la realidad y materialmente y racionalmente se nos impone.

Yo no puedo componer á capricho las dos fuerzas ni dar una regla arbitraria para su composición.

Una recta que yo trazase, como representación de la resultante de una manera caprichosa, no sería la resultante que busco, porque, tomada en sentido contrario, no haría equilibrio á las dos fuerzas dadas, y, por lo tanto, su efecto no sería igual y contrario al de las dos fuerzas propuestas; luego, al cambiar la dirección, no sería el mismo dicho efecto que el que ambas fuerzas producen.

Así, en este caso, el problema que antes formulábamos: ¿cuál es la resultante de dos fuerzas concurrentes?; es un problema real y que tiene un sentido y que tiene una solución, ya la conozcamos, ya lo ignoremos.

Y á esta solución podemos llegar experimentalmente; ó *à priori* empleando axiomas, ó acudiendo á la intuición, y acaso apoyándonos en algún postulado del movimiento relativo cuando se estudie la composición de fuerzas que produzcan determinados movimientos en sistemas materiales.

Recordemos, á este propósito, una demostración muy digna de estudio, que se refiere al caso del equilibrio, y que se explica en la mecánica de Poisson.

Es un esfuerzo para reducir los principios de la mecánica á conceptos puramente matemáticos.

No la vamos á desarrollar, porque en rigor sería salirnos del campo propio de estas conferencias y, por otra parte, los que tengan curiosidad por conocerla pueden consultar la obra citada; pero indicaremos rápidamente la marcha de dicha demostración.

Se empieza por establecer el caso particular en que todas

las fuerzan actúan sobre una misma línea; se examina después otro caso particular: á saber, cuando tres fuerzas iguales concurren en un punto, se encuentran en el mismo plano y forman entre sí dos á dos ángulos de 120°.

La simetría demuestra que estas tres fuerzas se hallan en equilibrio, y resulta, por lo tanto, evidentemente que la resultante de dos de ellas, es la diagonal del rombo ó del paralelogramo formado sobre ambas.

Por último, se estudia otro tercer caso particular: cuando las fuerzas son iguales.

En este caso, la simetría demuestra que la resultante debe seguir la dirección de la bisectriz; mas para determinar su magnitud hay que acudir á nuevos razonamientos, á nuevos axiomas, ó, si se quiere, á nuevas intuiciones.

Evidentemente, la resultante que suponemos que exista sólo puede depender de los datos, de suerte que, llamando P al valor de una de las componentes que será igual á la otra por hipótesis, y por $2x$ al ángulo que forman, es claro que la resultante R será una función de ambos datos que son los únicos P y $2x$, ó si se quiere de P y x, por lo tanto, tendremos, siendo f una función todavía desconocida

$$R = f(P, x).$$

Pero, si la fuerza P se duplica, triplica, etc., un razonamiento elemental, porque consiste en superponer dos, tres ó más sistemas idénticos, R se duplicará, triplicará, etc....; luego el principio de homogeneidad nos conduce á poner P como factor en la fórmula anterior, la cual tomará esta forma

$$R = P\varphi(x),$$

en que φ será ahora la función desconocida.

Para determinar esta función se sigue una marcha sumamente ingeniosa y que puede servir en cierto modo de modelo y de guía en varias cuestiones.

Sean P y P' las dos fuerzas iguales que actúan en el punto A (fig. 6).

Descompongamos cada una de ellas: la P en dos componentes Q y Q' iguales entre sí y que formen con P un ángulo z.

Del mismo modo P' en otras dos iguales á las anteriores y formando el mismo ángulo z con dicha fuerza P'.

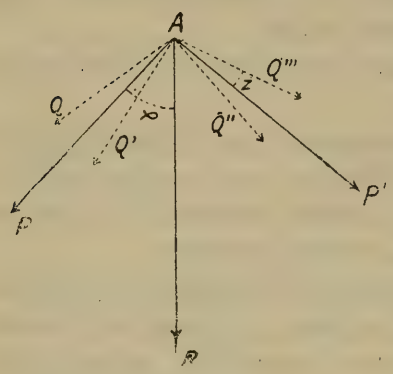


Figura 6.

Todo esto es legítimo porque partimos de la hipótesis de que dos fuerzas iguales tienen una resultante según su bisectriz; lo que hay es que no sabemos cuáles serán los valores de $Q = Q' = Q'' = Q'''$; pero P se expresará en función de Q, y lo mismo P', por la misma función φ, según la cual se expresa R en valores de P.

Es decir, que tendremos

$$R = P\varphi(x)$$
$$P = P' = Q\varphi(z)$$

Ahora bien, á la resultante R podemos llegar de dos modos partiendo de $Q = Q' = Q'' = Q'''$.

En efecto, tenemos que de

$$R = P\varphi(x)$$

y

$$P = Q\varphi(z)$$

se deduce

$$R = Q\varphi(x)\varphi(z);$$

y, por otra parte, si hallamos la resultante de Q y Q''' que será evidentemente, puesto que el semiángulo que forman es $x + z$,

$$Q\varphi(x+z)$$

y la resultante de Q' y Q'', que será

$$Q\varphi(x-z);$$

y si sumamos ambas resultantes, obtendremos, evidentemente, la resultante R; puesto que lo mismo da componer las zas Q por un camino que por otro, ya obteniendo las fuerfuerzas P, y luego su resultante, ya combinándolas dos á dos y sumando las resultantes parciales que actuarán en la misma bisectriz R; de modo que

$$R = Q\varphi(x+z) + Q\varphi(x-z),$$

é igualando este valor al que antes hallamos, se obtiene una ecuación que podemos llamar funcional, que será la siguiente:

$$Q\varphi(x)\varphi(z) = Q\varphi(x+z) + Q\varphi(x-z),$$

ó bien

$$\varphi(x)\varphi(z) = \varphi(x+z) + \varphi(x-z),$$

en que la incógnita será la forma de la función φ.

Esta ecuación es caso particular de toda una teoría, porque se trata de determinar la forma de una función de x por la propiedad que expresa la última ecuación, la cual ha de ser satisfecha para todos los valores de x y z.

Es un problema realmente muy curioso y que se repite en muchas cuestiones de análisis con mayor complicación.

¿Quién duda que pertenece á la misma familia el estudio de las funciones periódicas, y que á la misma familia de problemas pertenece la teoría de las funciones fuxianas del ilustre Poincaré?

Precisamente para señalar estas coincidencias nos permi-

timos esta digresión, y para hacer ver cómo un problema de Física se resuelve en un problema de análisis, y éste, á su vez, inspira al matemático otros muchos problemas de matemáticas puras en campos mucho más extensos.

De todas maneras, y en el caso concreto que examinamos, el problema de determinar la resultante de dos fuerzas ha quedado reducido á un problema de análisis matemático, á saber: la resolución de la ecuación funcional anterior, en que la incógnita no es una magnitud, sino la forma de una función, y en que tampoco tiene dicha ecuación, que hemos llamndo funcional, la forma de las ecuaciones diferenciales, sino una forma, por decirlo así, más general, porque x y z pueden tener valores arbitrarios y no valores infinitamente próximos.

***

Por lo demás, para el problema concreto que estudiamos, una solución particular para φ salta, por decirlo así, á la vista, y veremos que coincide exactamente con la regla del paralelogramo de fuerzas.

En efecto, si hacemos

$$\varphi(x) = 2 \cos \varphi$$

y sustituímos en la ecuación fundamental, tendremos

$$2 \,.\, \cos x \,.\, 2 \cos z = 2 \cos (x + z) + 2 \cos (x - z),$$

ó bien

$$2 \cos x \cos z = \cos (x + z) + \cos (x - z),$$

que es una fórmula conocida de la Trigonometría.

De suerte que $2 \cos \varphi$ es una solución de la ecuación de que se trata.

Y ahora se presenta esta cuestión:

¿Esta solución es única, ó el problema admite otras muchas soluciones?

Si la solución fuera única, el caso particular que estamos considerando quedaría completamente resuelto: en efecto, el problema físico no tiene más que una solución porque no hay más que una resultante; el problema analítico tampoco suponemos que tiene más que una, que es $\varphi(x) = 2 \cos x$; luego evidentemente el valor de R sería

$$R = 2 P \cos x;$$

y por lo tanto, en este caso particular la resultante sería la diagonal del paralelogramo, ó si se quiere, del rombo formado sobre ambas fuerzas, puesto que $A A'$ (fig. 7) se expresa de este modo

$$A A' = 2 A O = 2 P \cos x;$$

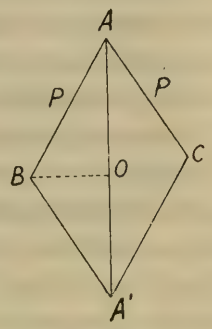


Figura 7.

y sin embargo, la demostración no es todavía completa, puesto que la ecuación que sirve para determinar la admite otras soluciones, por lo pronto

$$\varphi(x) = 2 \cos a x.$$

Y no pasamos adelante porque el análisis del resto de la demostración nos ocuparía más tiempo del que podemos disponer.

Partiendo de los tres casos particulares que antes señalamos, el caso general no ofrece dificultad de ningún género, como puede verse en la mecánica de Mr. Poisson.

***

Cuando se estudia el mismo problema de la resultante de dos fuerzas, no en un problema de estática, sino en un problema de dinámica, la demostración se funda, como puede verse en todas las obras de mecánica, en un postulado sobre la composición de movimientos.

Si una fuerza constante actúa sobre un punto, su efecto

no se altera por un movimiento de traslación de todo el sistema producido por una fuerza constante también: y no hacemos más que indicar la idea por la razón que acabamos de exponer.

Por último, si se trata de la composición de ejes de pares de fuerzas, las demostraciones elementales de Poinsot demuestran, que el eje del par resultante de otros dos se obtiene por la misma regla del paralelogramo.

En suma, cuando el concepto general de vector se particulariza y es un concepto no matemático puro, sino en relación con fenómenos físicos; cuando el vector es una fuerza en un problema de equilibrio, ó es una fuerza en un problema de movimiento, ó es el eje de un par, y así podríamos seguir presentando ejemplos prácticos, este problema de buscar la resultante de dos vectores es, como hemos dicho varias veces, perfectamente legítimo y cabe intentar resolverlo, ya por el método experimental, ya por conceptos de la ciencia pura, por la lógica, por la intuición, que es lo que acabamos de indicar en los ejemplos anteriores.

***

Por el contrario, es agitarse en el vacío buscar la composición de vectores abstractos, porque de su definición no se deduce en manera alguna las reglas de su composición.

Ahora bien, y volvemos á lo que ya hemos dicho antes: si estos vectores son la generalización de vectores particulares, fuerzas, ejes de pares, velocidades, etc... como previamente se ha demostrado que estos vectores prácticos se conponen por la ley del paralelogramo, es natural que generalicemos, mejor dicho, que conservemos esta regla para la composición de los vectores abstractos.

Así como en álgebra, por ejemplo, establecemos

$$a(b+c)=ab+ac,$$

si las letras a, b, c, son símbolos generales de los números: como generalizamos los conceptos, generalizamos sus operaciones.

Todavía más, y es repetir lo mismo que acabamos de exponer; aunque los vectores sean conceptos puros de la Ciencia matemática, si los creamos con intención de aplicarlos al mundo de la realidad, es natural, para que sean útiles, que al definir la combinación de dos vectores hagamos de suerte que no se presenten contradicciones al llegar á las aplicaciones prácticas, y que digamos en este caso, como definición, que la suma de dos vectores se obtiene por la regla del paralelogramo.

*
* *

Y continuemos exponiendo lo poco que sobre la teoría de los vectores hemos de explicar.

Un vector correspondiente á un punto es, como decíamos, una recta de magnitud determinada, de dirección determinada también, y con un sentido también determinado.

En estas condiciones, el vector quedará definido en el espacio como ya vimos en la figura 1.ª

Si el vector es la recta A, B, analíticamente se definirá de varios modos.

1.° Por su magnitud $AB = W$ (fig. 8), y por los tres ángulos que esta recta forma con los ejes coordenados. Además, por el sentido que indica la flecha.

2.° Basta, para definirlo, conocer las tres proyecciones de AB sobre los tres ejes coordenados ó sobre tres paralelas á éstos que pasen por el punto A.

En la figura serán AD, DC y CB.

¿Podremos llamar á estas tres proyecciones componentes del vector? Mientras no hayamos hecho otra cosa que definir el vector mismo, no sería correcta esta denominación.

Las tres rectas indicadas AD, DC, CB, son las tres pro-

yecciones, no son las tres componentes; son tres rectas que determinan el vector, no son tres vectores.

Pero si á la composición de vectores le aplicamos la regla del paralelogramo, y en el espacio la del paralelepípedo, entonces sí, las tres rectas indicadas, podemos decir, que son

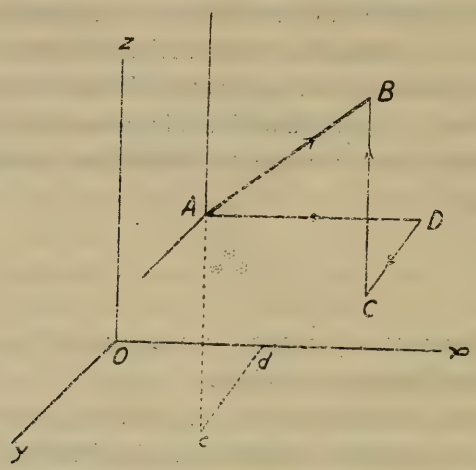


Figura 8.

las componentes del vector W, porque entonces la composición de estos tres vectores AD, CD, CB, dan precisamente el vector AB.

En este caso es legítimo emplear estas notaciones, que ya serán correctas:

El vector AB se representará por W.

Su componente AD, paralela al eje de las x, por W_x.

Su componente DC, paralela á y, por W_y.

Y su componente CA, paralela á z, por W_z.

Definidos los vectores, agregaremos, para completar la definición de sus relaciones, que los vectores se componen según las mismas reglas de las fuerzas, ó por la regla del paralelogramo, ó por la regla, que se deduce de ésta, para un número cualquiera de vectores, del polígono que representa

su suma geométrica. Mejor dicho, la recta que cierra el polígono, será la suma geométrica de los vectores; y si el polígono es cerrado, como el lado á que acabamos de referirnos sería nulo, esta será la condición de que una suma *geométrica* de vectores sea igual á cero.

De aquí resulta una notación particular en que es necesario fijarse, y que puede confundir á los que por primera vez estudian estas materias, si los autores no especifican la circunstancia que acabamos de indicar.

*
* *

Fijemos bien las ideas, y para hacerlas más concretas, supongamos que los vectores representan fuerzas; pero aplíquemos la notación vectoriana.

Sean F_1, F_2, F_3..... F_n una serie de fuerzas aplicadas á un punto A.

Para que dichas fuerzas estén en equilibrio sobre el punto A, es necesario y es suficiente que su resultante sea igual á cero; ó, de otro modo, que el polígono de las fuerzas F sea un polígono cerrado; ó, por fin, que la *suma vectorial* ó geométrica de las fuerzas F sea nula, lo cual podremos expresar de este modo:

$$\Sigma F = 0.$$

Pero entiéndase que esta Σ no significa una suma ordinaria; de modo que la ecuación anterior no equivale á

$$F_1 + F_2 + \ldots\ldots F_n = 0.$$

Lo que significa es, que si con las fuerzas F se forma un polígono, que es el que constituye su suma geométrica ó vectorial, este polígono será cerrado, de modo que el último lado, el que uniría los puntos extremos, se reduce á cero.

De no entenderlo así, resultarían absurdos y contradicciones, que nacerían de confundir una suma aritmética ordinaria con una suma geométrica.

Más aún: las condiciones de equilibrio de un sistema de fuerzas no se reducen á una, sino que son tres, á saber: que la suma ordinaria de las tres componentes, paralelas á los tres ejes, de todas las fuerzas del sistema, sean separadamente iguales á cero.

Si representamos las componentes por un subíndice, el subíndice x para las componentes paralelas al eje de las x; el subíndice y para las componentes paralelas al eje de las y; y el subíndice z para las componentes paralelas al eje de las z, las condiciones de equilibrio para un sistema de fuerzas aplicadas á un punto, según las notaciones de la Mecánica clásica, serán estas tres:

$$\Sigma F_x = 0, \ \Sigma F_y = 0, \ \Sigma F_z = 0,$$

al paso que en el sistema de notaciones vectoriales sólo hace falta una,

$$\Sigma F = 0.$$

Esta ecuación única equivale á las tras anteriores; pero fíjense bien mis alumnos en que son notaciones distintas.

Ni es ésta una novedad, porque una cosa análoga sucede con las imaginarias.

La ecuación única

$$a + b\sqrt{-1} = 0,$$

equivale á dos ecuaciones:

$$a = 0, \quad b = 0.$$

Por eso, en resumen, cuando se habla de una suma, conviene expresar, para evitar confusiones, si se trata de una suma vectorial ó de una suma ordinaria.

*
* *

Y nada agregaremos á lo dicho respecto á la teoría general de vectores, refiriéndonos, como varias veces hemos indicado, á la teoría general de las fuerzas.

Por de contado, la diferencia de dos vectores se obtiene de la misma manera que la diferencia de dos fuerzas, formando el polígono de vectores con el minuendo, y con el sustraendo en sentido contrario, trazado por el extremo del primero. La recta que cierre el triángulo será el vector que represente la diferencia.

Lo mismo que en la teoría de las fuerzas se define el momento de una fuerza con relación á un punto, el momento de una fuerza con relación á una recta, ó el par de dos fuerzas, pueden definirse los momentos y los pares de vectores.

De igual manera que se transforma un sistema de fuerzas aplicadas á un cuerpo rígido en otro sistema de fuerzas equivalente, pueden transformarse sistemas de vectores.

Como se reduce un sistema de fuerzas á una fuerza y un par con relación á un punto, puede aplicarse idéntica transformación á un sistema de vectores estableciendo teoremas análogos para los vectores y para las fuerzas.

Pero todo esto, no lo olvidemos, supone que se ha completado la definición de los vectores en cuanto á su composición, con definiciones análogas á las que, no como definiciones, sino como teoremas se hayan establecido para las fuerzas, velocidades, ejes de pares, etc., etc.

***

Hemos definido la suma y la diferencia de los vectores: ¿no podríamos imaginar para los vectores, operaciones análogas á la multiplicación y á la división de las cantidades numéricas ó algebráicas?

Nada lo impide: el matemático, con su poder creador, puede establecer, y para establecer puede definir, composiciones geométricas á que dé este nombre, como sucede con las imaginarias y con los cuaternios.

Pero la prueba de que éste es un terreno libre, ó sí se quiere, convencional, es que pueden establecerse muchas teorías y muchas notaciones distintas, que unas serán, por decirlo de este modo, más felices que otras, más cómodas y más fecundas.

Las imaginarias ya se estudian en álgebra, y los cuaternios los estudiaremos probablemente en otra ocasión.

Por ahora, y para terminar esta materia, recordaremos las definiciones y las notaciones de Grassmann, sin estudiar por el momento esta teoría ingeniosa, ni tampoco sus aplicaciones.

Pero en algunas obras recientes, se introduce el concepto de multiplicacíón de vectores según dicho autor, y, sobre todo, se emplean sus notaciones que tienen ciertas ventajas para abreviar los cálculos.

Digamos, ante todo, que el concepto de vector, según lo define Grassmann, más se parece al eje de un par, que á las fuerzas de la Mecánica, porque el vector puede transportarse paralelamente á sí mismo en el espacio, sin dejar de ser el mismo vector.

Sólo está definido por su magnitud, su dirección y su sentido; pero en la definición no entra el punto de aplicación, como antes suponíamos.

Por el momento, esta es circunstancia de poca importancia para nosotros.

Y pasemos á definir la multiplicación de vectores según Grassmann, que después de todo no es otra cosa que explicar notaciones abreviadas.

*
* *

El producto exterior de dos vectores A, B corresponde al paralelogramo formado sobre ambos vectores. Para determinar su signo, se considera que el vector B gira como marca la figura 9, es decir, en sentido contrario al de las agujas de un reloj, cuando el signo es positivo; y dicho producto

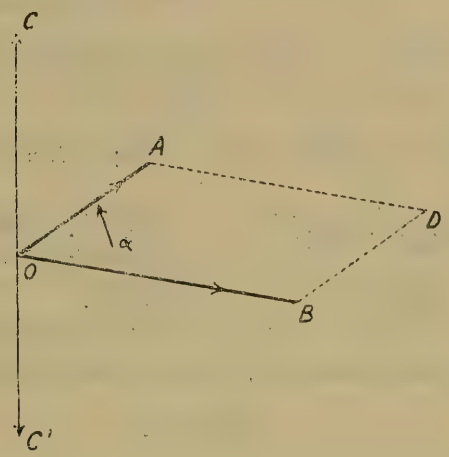


Figura 9.

exterior representa, ó puede representar, el vector OC perpendicular al plano AOB. Su magnitud, según la definición, es el área del expresado paralelogramo.

El símbolo que lo expresa es

$$[AB].$$

De modo que se admite este símbolo

$$[AB] = C.$$

El valor numérico de C será:

$$\text{valor numérico de } C = \text{área } OBDA = A \,.\, B \,.\, \text{sen } \alpha$$

ó más correctamente

$$\text{módulo } C = \text{mod. } A \times \text{mod. } B \times \text{sen } \alpha.$$

Porque A es el concepto geométrico que hemos llamado

vector y *módulo A* la magnitud del segmento. Lo misma respecto á *B*.

Algunos autores le dan el nombre á este producto de bivector.

Según el convenio que hemos hecho respecto á los signos, es claro que tendremos

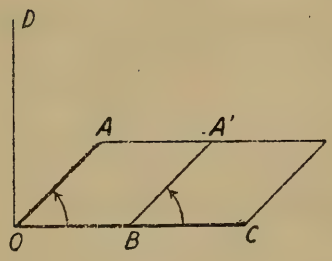


Figura 10.

$$[AB] = -[BA]$$

ó

$$C = -C'$$

De esta notación simbólica se deducen varias consecuencias.

1.ª La condición de paralelismo de dos vectores *A*, *B* será evidentemente

$$[AB] = 0.$$

Porque esto significará que el área del paralelogramo es nula y, en efecto, si en la figura 9 coinciden *OA* y *OB*, el área del paralelogramo se reduce á cero.

2.ª Es evidente la notación

$$[A(B + C)] = [AB] + [AC].$$

Porque un paralelogramo que tiene por lados *OA* y *OB* + *BC* (fig. 10) mide la misma área que la suma de los dos paralelogramos *AOB* y *A'BC*, según marca el segundo miembro; y en cuanto á la dirección del vector *OD*, es la misma para los dos sumandos y para la suma.

3.ª Siendo *n* un número cualquiera, se tiene evidentemente

$$[nA \,.\, B] = n[AB].$$

Porque un paralelogramo que tiene por lados *n* . *OA* y *OB*

equivale á n paralelogramos que tengan por lados OA y OB.

Las relaciones anteriores permiten hacer varios cálculos elementales.

4.ª Es evidente, también, la relación

$$[AB] = [A(B + nA)].$$

Porque, en efecto, el segundo miembro, según antes hemos visto, puede descomponerse de este modo:

$$[A(B + nA)] = [AB] + [A \,.\, nA] = [AB] + n[AA]$$

y como el último bivector es nulo, según antes se indicó, por ser ambos vectores iguales, en cuyo caso el paralelogramo, como hemos visto, se reduce á cero, sólo queda el primer término, que es precisamente el primer miembro de la relación indicada.

***

Veamos ahora cuáles son las componentes del vector OC (fig. 9) que representa el producto.

Sean A_x, A_y, A_z las componentes del vector A, y B_x, B_y, B_z las del vector B.

Para abreviar la escritura escribimos $A_x\alpha$ en vez de mod. $A_x\alpha$.

Ya sabemos que el vector que representa el producto es OC perpendicular al plano de los vectores A, B cuando se hace que pase por un punto O.

Su magnitud será el área del paralelogramo formado sobre dichos vectores AB; luego tendremos.

$$C = AB \operatorname{sen} \alpha = AB \operatorname{sen} (AB).$$

Esto, abreviadamente : en rigor,

$$\text{mod } C = \text{mod } A \,.\, \text{mod } B \,.\, \operatorname{sen} \alpha;$$

pero la confusión no es posible.

Ahora bien, se sabe por fórmulas elementales de analítica que

$$\cos(A\,B) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\text{mod } A \,.\, \text{mod } B}$$

y como

$$\text{mod } A.\ \text{mod } B = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2},$$

tendremos,

$$\cos(A\,B) = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \cdot \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}},$$

y por lo tanto,

$$\text{sen}(A\,B) = \sqrt{1 - \frac{(A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2}{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2)}}.$$

O bien,

$$\text{sen}(AB) = \frac{\sqrt{(A_x^2 + A_y^2 + A_z^2)(B_x^2 + B_y^2 + B_z^2) - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z)^2}}{\text{mod } A.\ \text{mod } B}$$

y sustituyendo en C, desarrollando y multiplicando,

$$\text{mod.}\ C = \sqrt{A_x^2 B_y^2 + A_x^2 B_z^2 + A_y^2 B_x^2 + A_y^2 B_z^2 + A_z^2 B_x^2 + A_z^2 B_y^2 - 2 A_x B_x A_y B_y - 2 A_x B_x A_z B_z - 2 A_y B_y A_z B_z}$$

y por fin

$$\text{mod } C = \sqrt{(A_x B_y - A_y B_x)^2 + (A_x B_z - A_z B_x)^2 + (A_y B_z - A_z B_y)^2}$$

Este valor de C lo podemos considerar como la resultante de estos tres vectores, salvo el signo,

$$A_x B_y - A_y B_x$$
$$A_x B_z - A_z B_x$$
$$A_y B_z - A_z B_y$$

aplicados estos vectores respectivamente según los ejes de las x, y, z.

Esto en cuanto á la magnitud. Respecto á la dirección, puede demostrarse, desde luego, que el vector C definido por los tres binomios anteriores es perpendicular á A y B. Por ejemplo, respecto á A.

Los cosenos de los ángulos que forma C con los ejes son

$$\frac{A_y B_z - A_z B_y}{\text{mod } C}, \quad \frac{A_z B_x - A_x B_z}{\text{mod } C}, \quad \frac{A_x B_y - A_y B_x}{\text{mod } C}.$$

Los cosenos de A serán asimismo

$$\frac{A_x}{\text{mod } A}, \quad \frac{A_y}{\text{mod } A}, \quad \frac{A_z}{\text{mod } A}$$

luego

$$\cos(CA) = \frac{(A_y B_z - A_z B_y) A_x + (A_z B_x - A_x B_z) A_y + (A_x B_y - A_y B_x) A_z}{\text{mod } C.\ \text{mod } A}$$

pero el numerador

$$A_y A_x B_z - A_x A_z B_y + A_z A_y B_x - A_x A_y B_z + A_x A_z B_y - A_y A_z B_x$$

se anula; luego

$$\cos(CA) = 0.$$

De suerte que C es perpendicular á A. Lo mismo se probaría para B.

En suma, puede decirse que la notación $[AB]$ en que no ha de olvidarse que el paréntesis es paréntesis recto, que es lo característico de dicha notación, dicho símbolo, repetimos, representa un vector cuyas tres componentes son

$$\begin{matrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{matrix} \qquad (1)$$

En resumen, el símbolo expresado para lo que llama Grassmann multiplicación externa, á saber,

$$[A\,B]$$

ó sea paréntesis recto de $A\ B$, representa un vector cuyas tres componentes son los binomios (1).

En esta definición, que es arbitraria, no hay contradicción ninguna; precisamente para que no exista esta contradicción en cuanto á los signos, hemos escrito los expresados binomios bajo la forma (1) como se comprobaría fácilmente.

De no ser así, podría haber contradicción entre los signos de estas componentes y la convención principal que expresa la figura 9.

Además de la multiplicación externa de binomios, que es la que acabamos de explicar, emplea Grassmann otra notación, que se refiere á lo que él llama producto interno ó multiplicación interna de dos vectores.

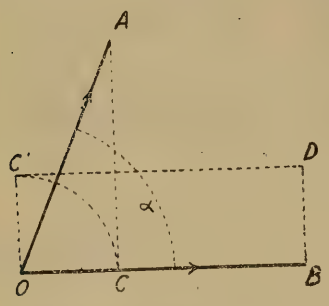


Figura 11.

Esta notación es la siguiente:

$$[A \mid B]$$

que corresponde, y representa numéricamente, al área formada por uno de los vectores y la proyección del otro sobre el primero.

Sean A y B (fig. 11) dos vectores que pasan por un punto O. Las magnitudes $O\ A$ y $O\ B$ son las que hemos representado por A y B.

Proyectando $O\ A$ sobre $O\ B$, obtendremos $O\ C$, y haciendo girar $O\ C$, 90° hasta la posición $O\ C'$, el área del rectángulo $O\ B\ D\ C'$ será la magnitud representada por la notación del producto interno; de modo que

$$[A \mid B] = \text{área}\, OBDC' = OB \times OC' =$$
$$= OB \times OA \times \cos \alpha$$

El mismo rcsultado se obtendría multiplicando A por la

proyección de B sobre el primer vector; siempre tendríamos

$$[B \mid A] = OA \times OB \times \cos \alpha$$

De modo que

$$[A \mid B] = [B \mid A].$$

El orden de los factores no hace aquí cambiar el signo, y el autor supone que esta segunda notación no expresa un vector, sino una cantidad escalar. Excusamos decir que esto también es de pura convención, pero sin contradicción alguna.

Si los dos vectores A y B fueran perpendiculares, la proyección del uno sobre el otro sería nula, y el rectángulo de la figura 11 sería cero, porque á cero se reduciría la proyección $O\,C$; de suerte que en este sistema de notaciones la condición para que dos vectores sean perpendiculares sería

$$[A \mid B] = 0.$$

Vemos, pues, que en las notaciones explicadas, la condición para que dos vectores sean paralelos, es que el producto externo sea nulo; y para que sean perpendiculares, que sea nulo el producto interno.

Lo cual no tiene nada de particular ni supone conceptos muy profundos; significa tan sólo la primera condición sen $\alpha = 0$, y la segunda cos $\alpha = 0$, con lo cual se reducen á cero

$$[AB] = OA \times OB \times \text{sen}\ \alpha \qquad \text{(vector)}$$

y

$$[A \mid B] = OA \times OB \times \cos \alpha \qquad \text{(escalar).}$$

De estas dos ecuaciones, la segunda es correcta; la primera no lo sería, á no ser que el símbolo signifique por sí *vector,* porque el primer miembro es numéricamente igual

al segundo, pero significa un vector; en rigor debiera escribirse así

$$\text{módulo } [AB] = OA \times OB \times \text{sen } \alpha.$$

Y si la magnitud de los vectores se representa por la palabra módulo, las ecuaciones anteriores se expresarían más correctamente de esta manera

$$\text{módulo } [A\ B] = \text{módulo } A.\ \text{módulo } B.\ \text{sen } \alpha$$
$$[A|B] = \text{módulo } A.\ \text{módulo } B.\ \cos \alpha.$$

Es decir, que hay que distinguir cuidadosamente el vector como concepto geométrico definido en el espacio, como hemos dicho, y su magnitud como segmento, á la cual se le da el nombre de módulo del vector.

Así, en la figura 9, A es la línea OA en posición determinada y con determinada dirección y magnitud.

Y módulo A, es el segmento OA, sin dirección ni sentido: una pura magnitud escalar.

Algunos autores representan el producto interior por un sencillo paréntesis en esta forma (AB).

Expresemos ahora el producto interior en función de las componentes de sus vectores, lo mismo que hemos hecho para el producto exterior.

Aquí aún es más sencillo.

En efecto,

$$[A|B] = \text{mód. } A.\ \text{mód. } B \cos \alpha.$$

Pero, como antes hemos dicho, los cosenos de los ángulos que forma el vector A con los ejes coordenados, son

$$\frac{A_x}{\text{mod } A},\ \frac{A_y}{\text{mod } A},\ \frac{A_z}{\text{mod } A}$$

y asimismo los cosenos de los ángulos que forma el vector B tienen por valores respectivos

$$\frac{B_x}{\text{mod}\, B}, \quad \frac{B_y}{\text{mod}\, B}, \quad \frac{B_z}{\text{mod}\, B}$$

Luego el coseno del ángulo que forman A y B será

$$\cos \alpha = \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\text{mod}\, A \ \text{mod}\, B}$$

y, por lo tanto, el producto interior se expresará de este modo:

$$[A \mid B] = \text{mod}\, A \ \text{mod}\, B \frac{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}{\text{mod}\, A \ \text{mod}\, B}$$

ó, por último,

$$[A \mid B] = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z;$$

que, como dijimos antes, se considera como una cantidad escalar.

Insistamos sobre esta idea para evitar toda confusión.

La teoría general de los vectores, como generalización de varios conceptos mecánicos, es la que hemos expuesto al principio de esta conferencia y en la anterior.

Y forma un cuerpo de doctrina independiente de todo lo que sigue.

En la última parte de esta conferencia, y pasando á una *teoría particular* de vectores, que es la de Grassmann, hemos explicado varias *notaciones* ó simbolismos, que se van extendiendo en las obras modernas, á fin de facilitar su lectura á mis alumnos.

Pero no hay que confundir esta teoría particular, dentro de ciertos convencionalismos, en que se define la multiplicación interior y exterior, con la teoría general de vectores, en que sólo se considera la suma geométrica de los mismos.

En la conferencia próxima pasaremos á otra cuestión distinta, cuestión de análisis, pero de aplicación constante á las teorías de la moderna Física matemática.

XVIII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

Terminamos en la conferencia precedente un rapidísimo estudio, mejor dicho, un apunte muy sucinto sobre la teoría de los vectores, que tanta aplicación reciben en diversos problemas de la Física matemática, sobre todo de la Física matemática moderna.

Siguiendo el programa que anunciamos para este curso, hemos de tratar ahora de dos teoremas fundamentales de dicha Ciencia, que son el teorema de Green ó, mejor dicho, la fórmula de Green y la de Stokes.

Ambas se enlazan con la teoría de la electricidad y con la del magnetismo, y digamos, en términos generales, que precisaremos más adelante, que la primera se encuentra frecuentemente en la teoría de la electricidad estática, y la segunda en la de la electricidad dinámica.

Empecemos por la del primero de dichos autores.

Teorema de Green.

Lo hemos dicho más de una vez en las conferencias anteriores. Los problemas de la Física matemática dan ocasión á multitud de cuestiones de análisis. Son problemas de la Ciencia pura, que el físico propone al matemático, con ocasión de algún problema de física, y que el matemático tiene que re-

solver por los métodos y procedimientos de su ciencia especial.

Otras veces, el matemático resuelve cuestiones de análisis que él imagina, sin pensar en las aplicaciones que de ellas puedan hacerse y, sin embargo, con haber sido engendradas en el campo de la abstracción, resulta que son fecundísimas para la Ciencia práctica y positiva.

Dice el eminente matemático M. Picard en una Memoria que hemos citado varias veces:

«Fourier reduce con exceso el papel del análisis matemá»tico, porque si la Física ha sido el primer origen de grandes »teorías analíticas, el matemático presta al físico mayores »servicios que el de ofrecerle la posibilidad de previsiones »numéricas. Todos hemos encontrado sabios dedicados de »preferencia á las Ciencias experimentales, para quienes ésta »es la sola utilidad de las matemáticas, con lo cual se des»conoce y se desdeña el admirable poder de transformación »del razonamiento y del cálculo matemático.

»¿Cómo es posible no sentir profunda admiración cuando »se lee la célebre Memoria de Green, que pasó largo tiempo »inadvertida, sobre la aplicación del análisis á las teorías de »la electricidad y del magnetismo, y de la cual Gauss, Char»les y Thomson, debían, diez años más tarde, deducir resul»tados importantísimos? El cálculo se adelantaba aquí á la »experimentación, descubriendo teoremas fundamentales so»bre la inducción electro-estática, teoremas á los cuales ex»periencias memorables debían conducir ulteriormente á Fa»raday.»

Esta cita del ilustre matemático basta para que se comprenda la importancia del teorema en que vamos á ocuparnos.

***

Y, sin embargo, á pesar de su importancia, no es un teorema, seguramente, de recóndita sublimidad.

Bien al contrario, es de una sencillez extraordinaria, con ser uno de los más fecundos y de más aplicación en la física matemática. Digamos en breves palabras, que tiene por objeto convertir ó transformar una integral triple en integral doble, ó si se quiere *una integral de volumen en integral de superficie;* precisamente de la superficie que limita dicho volumen.

Claro es que así presentado es de los teoremas más elementales.

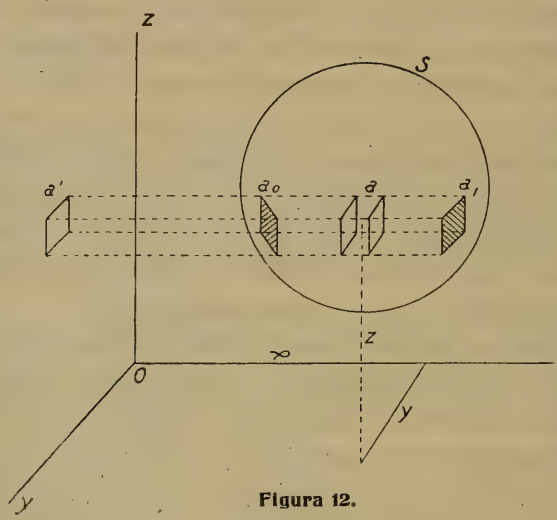


Figura 12.

Mas por elemental que sea, insistamos al menos, como recuerdo, para ir orientando á mis alumnos en la materia que nos proponemos exponer.

Si se tiene la integral triple

$$I = \int\int\int_v A\,(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

todos mis alumnos conocen el sentido de estos símbolos matemáticos.

Es una integral triple extendida á un volumen V, limitado por una superficie S (fig. 12).

Significa dicho símbolo, que para cada elemento del volumen V, á saber: $dv = dx\,dy\,dz$ correspondiente al punto a cuyas coordenadas son x, y, z, hay que multiplicar dicho volumen infinitamente pequeño dv por el valor $A(x, y, z)$ de la función A, correspondiente á las coordenadas x, y, z.

Hay que efectuar esto para todos los elementos del volumen V y hay que suponer con la imaginación que los elementos dv son cada vez más pequeños, con lo cual su número será cada vez mayor, y si esta suma de sumandos cada vez más pequeños y en número cada vez mayor, tiende á un límite finito I, se dirá que este límite es el valor de la integral triple, es decir, de la integral extendida á las tres dimensiones del volumen dentro de la superficie S.

Claro es que no siempre sucederá esto.

Sucederá para ciertas funciones A y no sucederá para otras.

Y bien se comprende que sólo es aplicable el teorema á las primeras y no á las segundas.

Si la suma ó la integral triple de que se trata tiende hacia infinito ó es indeterminada, es decir, si no hay integral, el teorema carece de sentido.

Suponemos, pues, que la integral existe y suponemos para simplificar las explicaciones, que el volumen es conexo y más aún simplemente conexo, como se indica con suficiente claridad en la figura 12.

***

En este caso, el problema de reducir la integral triple á integral doble, es de suma sencillez, al menos, en cuanto al método general.

En la integral propuesta

$$I = \int\int\int_v A(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

efectuaremos una primera integración respecto á x considerando á y y z como constantes, y tendremos

$$I = \int\int dy\,dz \int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\,dx.$$

Esta integración respecto á x significa que, considerando un filete paralelo al eje de las x de sección rectangular, proyectado en a' (fig. 12) y cuya área será evidentemente $dxdy$, hay que sumar todos los elementos de la integral

$$A\,dv = A(x, y, z)dx\,dy\,dz$$

comprendidos en dicho filete en el interior del volumen desde el cuadrilátero de entrada σ_0 hasta el cuadrilátero de salida σ_1.

Si representamos por $A_1(x, y, z)$ dicha integral indefinida, deberemos poner los dos límites x_0 y x_1, es decir, las distancias $a'\sigma_0$ y $a'\sigma_1$ del cuadrilátero de entrada y del cuadrilátero de salida al plano de las yz, contadas paralelamente al eje de las x, distancias que hemos representado por x_0 y x_1, de modo que tendremos,

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\,dx = A_1(x_1, y, z) - A_1(x_0, y, z).$$

Y como x_0 y x_1 dependen de la posición del cuadrilátero a', ó sea de las coordenadas de su centro, resulta que en último análisis sustituyendo por x_0 y x_1 sus expresiones en A_1, el segundo miembro de la ecuación anterior será todo él función de y, z que representaremos por B, y tendremos

$$\int_{x_0}^{x_1} A(x, y, z)\,dx = B(y, z),$$

con lo cual la integral triple se convertirá en una integral

doble ó de superficie, ó sea

$$I = \int\int B(y, z)\, dy\, dz.$$

Es decir, que si el teorema ó la fórmula de Green sólo tuviera por objeto reducir una integral triple á integral doble, el método elemental que acabamos de recordar sería el más

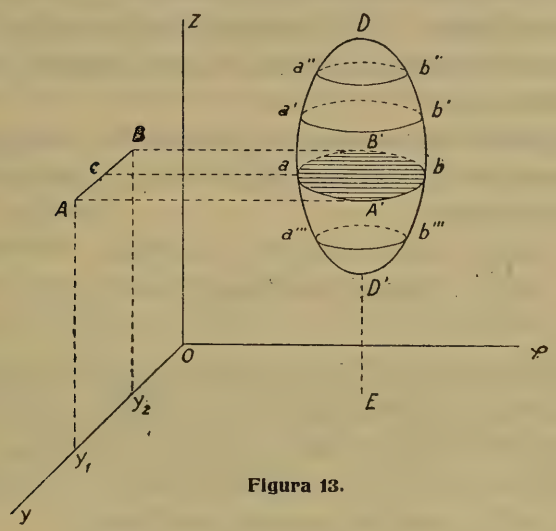


Figura 13.

directo y el más sencillo; pero como veremos en breve, otro es el espíritu del teorema en que nos vamos ocupando.

Por lo demás, y por este método, que se explica en todos los tratados de cálculo, la integral triple se obtiene por medio de otras dos integraciones de una variable.

En efecto, puede ponerse bajo esta forma.

$$I = \int dz \int_{y_0}^{y_1} B(y, z)\, dy$$

y podremos efectuar una segunda integración con relación á y, como se ve en la figura 13.

En esta figura suponemos que la z es constante é integra-

mos con relación á y, es decir, sumamos todos los filetes paralelos al eje de las x que están representados en la figura por líneas gruesas entre dos límites y_0 é y_1 que corresponden á las dos tangentes paralelas á dicho eje de las x, á saber: AA' y BB', á la sección de la superficie S por un plano paralelo al plano de las x, y trazado á la distancia z.

Al sumar todos estos filetes, ó sea al integrar su expresión, claro es, que sumamos todos los valores $A(x, y, z)dx\,dy\,dz$ correspondientes á los paralelepípedos elementales comprendidos en una capa paralela al plano de las x, y de espesor diferencial z.

Si representamos la integral indefinida de esta segunda integración por C_1, tendremos sucesivamente, como en la integración primera,

$$\int_{y_0}^{y_1} B(y, z)\,dy = C_1(y_1, z) - C_1(y_0, z)$$

Y observando que y_1 é y_0 dependen de la curva $aA'bB'$, la cual á su vez depende de la altura del plano de la sección, es decir, del valor de z, sustituyendo en la expresión precedente los valores de y_0 y de y_1 en función de z, y representando por C la función que resulta, tendremos

$$\int_{y_0}^{y_1} B(y, z)\,dy = C(z);$$

con lo cual se convertirá la integral primitiva en esta otra, que ya no depende más que de la variable z,

$$I = \int_{z_0}^{z_1} C(z)\,dz.$$

Así, para obtener el valor de la I, no habrá más que efectuar la última integral indicada con relación á z entre $z_0 = DE$, que corresponde al punto más bajo de la superficie S, ó sea al punto de contacto de la superficie con el plano

tangente inferior, y z_1, que corresponde al punto superior D', punto de contacto también con el plano tangente más elevado.

Estas dos cantidades z_0 y z_1 son cantidades conocidas y determinadas, y la integral definida que resulte será, evidentemente, el valor de la integral I en función de cantidades conocidas, que serán las constantes de S y las de la función A.

Claro es que esta última integración equivale á la suma del elemento diferencial primitivo para todas las capas de espesor dz, á saber, ab, $a'b'$, $a''b''$..... desde D á D'.

Todo esto es elemental, y ha de dispensárseme que lo recuerde, pero acaso me lo agradezcan mis alumnos, pues bueno es cuando se van á recorrer nuevos territorios echar una mirada á los ya recorridos, para ver cómo se enlazan unos con otros.

Realmente, en estos métodos elementales, se pasa de una integral triple á una integral doble, que es lo mismo que pasar de una integral de volumen á una integral de superficie.

Y se pasa, después de una integral doble, á una integral sencilla, que también es problema análogo á este otro problema: pasar de una integral de dos variables á una integral de una, ó sea de una integral de superficie á una integral de línea.

Pero cuando se resuelven estos problemas con tanta facilidad, al menos en términos generales, y salvo las dificultades enormes que presenten las integraciones parciales, pueden preguntarse los principiantes: ¿á qué buscar mayores complicaciones; á qué el teorema de Green que, según se dice, sirve para pasar de una integral de volumen á una integral de superficie, ó el problema de Stokes, que se utiliza para transformar una integral de superficie en integral de línea?

Y la pregunta es natural; pero es que se trata de cosas distintas, como vamos á ver bien pronto.

Podemos decir, en términos generales, que acaso resulten un poco vagos, pero que ya iremos precisando, que en el método general de integración que acabamos de exponer,

cada elemento de la integral triple $A(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$ es un elemento escalar.

La función de x, y, z que hemos llamado A varía de un punto á otro, mejor dicho, depende de las tres coordenadas que definen cada punto, y para cada punto está perfectamente determinada, sin que entre para nada la dirección.

Las tres integraciones sucesivas afectan siempre, como hemos visto, á cantidades escalares.

En la fórmula de Green que vamos á explicar no sucede esto; á cada punto corresponde, no una cantidad escalar, sino una cantidad vectorial; es una triple integración de vectores aplicados á todos los puntos interiores del volumen.

Y esta expresión se transforma en otra equivalente, que también contiene vectores, pero aplicados precisamente á los diferentes puntos de la superficie S que limita el volumen en cuestión.

Precisando aún más los términos del teorema ó de la fórmula, podemos decir, que el teorema de Green transforma una integral triple, ó sea una integral de volumen, que depende de un complejo de vectores, en una integral de superficie sobre cuyos puntos actúan vectores correspondientes del sistema, porque al sistema general del complejo pertenecen dichos vectores de la superficie.

Y sólo con lo dicho, por intuición se comprende que la fórmula así preparada ha de tener aplicación á los problemas de la electricidad, que cuajan, por decirlo de esta manera, el espacio de vectores eléctricos y que se aplican á todos los puntos de cualquier superficie que limite una porción del espacio.

En suma, la fórmula primera es la que, naturalmente, se presenta en los problemas abstractos del análisis.

La fórmula de Green, por su configuración, si se nos permite esta manera de expresarnos, se acomoda y adapta á los problemas de la Física matemática moderna.

*
* *

La fórmula de Green es una igualdad, porque es una fórmula de transformación.

Su primer miembro se presenta de este modo:

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dx\, dy\, dz$$

en que F, G, H son funciones de x, y, z.

De suerte que, lo que en la fórmula general era $A(x, y, z)$, en la fórmula de Green es

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}.$$

Parece que la fórmula de Green es un caso particular, una forma especial. Pero antes de pasar más adelante ocurre si cualquier expresión $A(x, y, z)$ podrá transformarse en esta otra forma: $\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$, ó si ésta será un caso particular que no pueda confundirse con el caso general sin que éste pierda su generalidad.

Para discutir este punto observemos que sea cual fuere $A(x, y, z)$ siempre podrá descomponerse en tres funciones, dos de ellas arbitrarias, la tercera dependiente de las primeras.

En efecto, siempre podemos escribir como identidad

$$A = F_1 + G_1 + (A - F_1 - G_1)$$

en que F_1 y G_1 son funciones arbitrarias de x, y, z.

Esto es evidente: las F se destruyen, se destruyen las G y quedan $A = A$.

Si representamos el último grupo por H_1 vemos comprobado lo que decíamos

$$A = F_1 + G_1 + H_1$$

ó expresando las variables

$$A(x, y, z) = F_1(x, y, z) + G_1(x, y, z) + H_1(x, y, z).$$

La descomposición, pues, en tres funciones es evidente y puede efectuarse de muchas maneras.

Sea, pues, cual fuere A, siempre podremos escribir

$$\iiint_v A(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \iiint_v \Big[F_1(x,y,z) + G_1(x,y,z) + H_1(x, y, z) \Big] dx\, dy\, dz.$$

Es una integral triple de volumen, que se expresa poniendo el subíndice v, la cual se puede transformar en otra integral también triple de volumen; pero en que á cada elemento $dx\, dy\, dz$ van afectas tres funciones F_1, G_1, H_1.

Descompongamos el segundo miembro en tres integrales triples, y tendremos

$$\iiint_v A(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_v F_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iiint_v G_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz + \iiint_v H_1(x,y,z)\, dx\, dy\, dz.$$

Transformemos ahora cada una de las tres integrales del segundo miembro.

Consideremos la primera

$$\iiint F_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz,$$

y en esta la parte

$$F_1(x, y, z)\, dx$$

del elemento diferencial.

Admitiendo que F_1 es finita uniforme y contínua, ó en

suma que puede integrarse con relación á x; considerando naturalmente á y y á z como constantes, y representando por F la integral, tendremos evidentemente

$$F(x, y, z) = \int F_1(x, y, z)\, dx$$

luego

$$F_1(x, y, z) = \frac{dF(x, y, z)}{dx}$$

ó abreviadamente

$$F_1 = \frac{dF}{dx}:$$

luego la integral parcial que estamos considerando se podrá escribir bajo esta forma

$$\int\int\int_v F_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_v \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz.$$

Una transformación análoga podemos efectuar para el segundo término de la ecuación fundamental.

Y así

$$\int\int\int_v G_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

integrando con relación á y la parte $G_1(x, y, z)\, dy$ y llamando $G(x, y, z)$ á dicha integral, de modo que

$$G(x, y, z) = \int G_1(x, y, z)\, dy$$

y por lo tanto

$$G_1 = \frac{dG}{dy}$$

se convertirá en

$$\int\int\int_v \frac{dG(x, y, z)}{dy}\, dx\, dy\, dz$$

ó abreviadamente

$$\int\int\int_v \frac{dG}{dy}\, dx\, dy\, dz.$$

Por último, al tercer término de la ecuación fundamental podemos aplicarle una transformación idéntica, integrando con relación á z, y tendremos sucesivamente:

$$\int\int\int_v H_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

$$H = \int H_1(x, y, z)\, dz$$

$$H_1 = \frac{dH}{dz}$$

y por fin

$$\int\int\int_v H_1(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\int\int_v \frac{dH}{dz}\, dx\, dy\, dz.$$

Sustituyendo estas tres integrales transformadas en la integral primitiva, tendremos

$$\int\int\int_v A(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int\int\int \left[\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right] dx\, dy\, dz.$$

El segundo miembro es precisamente la forma de que se parte para establecer el teorema de Greenn, y esta es la integral triple ó de volumen que se quiere transformar en integral de superficie.

***

La integral que nos proponemos transformar para establecer el teorema de Green, tlene, pues, esta forma:

$$I = \iiint_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} \right) dx\, dy\, dz$$

en que F, G, H son funciones de x, y, z.

Suponemos, por de contado, que existe dicha integral.

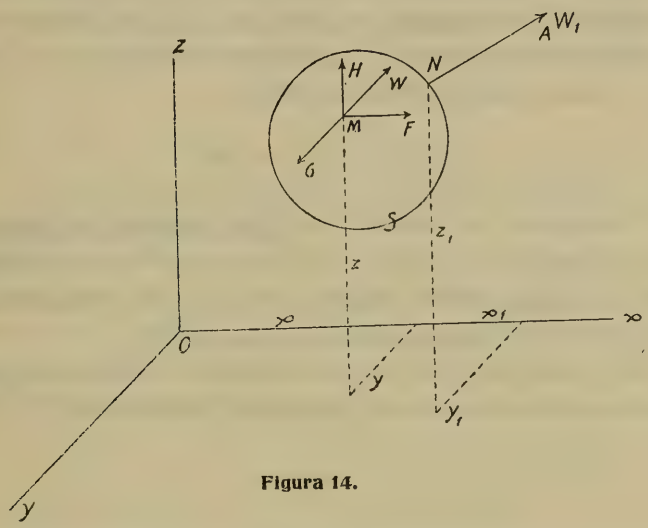


Figura 14.

Para cada punto x, y, z, el paréntesis tendrá un valor determinado, y es evidente que á cada punto corresponderán valores determinados también para

$$F(x, y, z),\ G(x, y, z),\ H(x, y, z).$$

Si consideramos á F como la componente de un vector, paralela dicha componente al eje de las x; á G, como la componente del mismo vector paralela al eje de las y, y á H, como la tercera componente paralela al eje de las z, es evidente que á cada punto M del volumen que se considera (figura 14) corresponderá un vector W, cuyas componentes serán F, G, H. De suerte que, como anticipábamos, la inte-

gral triple de volumen será una integral de vectores W (x, y, z), aunque estos vectores entrarán por sus componentes, ó mejor dicho, por las derivadas de sus componentes con relación á x, y, z.

Como x, y, z son variables en F, G, H, el vector W será distinto, en general, para cada punto del volumen, y al llegar á un punto N de la superficie W tomará un valor particular W_1, que estará dentro de la ley general del vector W, y que se obtendrá sustituyendo en vez de x, y, z los valores correspondientes al punto N: si los representamos por x_1, y_1, z_1, el vector general W se convertirá en

$$W(x_1, y_1, z_1) = W_1.$$

Precisamente, el teorema de Green consiste en transformar la integral, que contiene los vectores W correspondientes al volumen, en una integral doble, que sólo contendrá los vectores W_1 correspondientes á la superficie.

Hay que fijarse bien en todo esto que es elemental, pero que ha de tenerse presente para evitar confusiones.

***

Así, pues, la igualdad que expresa el teorema de Greenn, y que vamos á hallar, no es una ecuación en que entren datos é incógnitas y en que puedan despejarse estas últimas ó se procure despejarlas.

No es tampoco una identidad como $A = A$, en que el segundo miembro es idéntico al primero.

Es una igualdad, permítasenos esta distinción, en que el segundo miembro es una transformación del primero igual á él en valor numérico, pero de diversa forma.

Tiene, por ejemplo, un carácter análogo al de la siguiente igualdad

$$a(b + c) = ab + ac$$

ó al de esta otra

$$\int_a^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

Son dos símbolos distintos para los dos miembros ó dos formas algebráicas diversas, aunque expresando el mismo valor.

En suma, es un teorema de transformación.

Y ahora veamos cómo esta transformación se efectúa.

***

La triple integral propuesta, integral de vectores correspondientes á un volumen,

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) dx\,dy\,dz$$

se descompondrá en estas tres

$$\iiint_v \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz;\ \iiint_v \frac{dG}{dy}\,dx\,dy\,dz,$$
$$\iiint_v \frac{dH}{dz}\,dx\,dy\,dz,$$

que vamos á transformar sucesivamente en integrales dobles, ó sea de superficie, precisamente de la superficie S, que limita el volumen V de la integral triple.

Transformación de $\iiint_v \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz =$. Considerando á y, z como constantes, y sólo como variable á x, tendremos:

$$\iiint_v \frac{dF}{dx}\,dx\,dy\,dz = \iint dy\,dz \int_{x_0}^{x_1} \frac{dF}{dx}\,dx.$$

Pero la última integral se obtiene inmediatamente y no es otra que F; luego resulta

$$\int\int\int_v \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int\int dy\, dz \left(F(x, y, z) \right)_{x_0}^{x_1}$$

ó bien

$$\int\int\int_v \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int\int dy\, dz \Big[F(x_1, y, z) - \\ - F(x_0, y, z) \Big].$$

Veamos ahora quiénes son x_0 y x_1, aunque en rigor ya lo hemos dicho al principio de esta teoría.

Si en el plano de las y z tomamos un punto a, cuyas coordenadas en dicho plano sean y, z, y trazamos el cuadrilátero $dy\, dz$ que tenga por centro dicho punto a; si imaginamos un filete $a\, a_0\, a_1$ que tenga por base este rectángulo $dy\, dz$ y cuyas aristas sean paralelas al eje de las x, este filete atravesará la superficie S, que para simplificar suponemos simplemente conexa, penetrando en ella por el cuadrilátero a_0 y saliendo por el cuadrilátero a_1.

Si el centro del cuadrilátero a_0, que dicho está que supondremos que es el punto en que corta la superficie á la entrada el eje del filete, se proyecta en b_0 y este punto en x_0 sobre el eje de las x, esta x_0 será la coordenada de entrada del filete en la superficie S, y análogamente x_1 será la coordenada que corresponde al cuadrilátero de salida a_1.

La primera integral con relación á x que hemos obtenido, no es más que la suma de los infinitos valores de $\frac{dF}{dx}\, dx$ entre x_0 y x_1.

Y veamos si puede darse otra forma á la última expresión

$$\int\int dy\, dz \Big[F(x_1, y, z) - F(x_0, y, z) \Big].$$

Esto será repetir lo que ya en el curso precedente hemos explicado, pero este es un nuevo curso y la repetición no será ociosa; además, es una transformación de uso constante y conviene familiarizarse con ella, por sencilla que sea. Es en realidad un cambio de notaciones y es evitarse en la integración la necesidad de tener en cuenta los términos que corresponden al límite superior y al límite inferior, no consi-

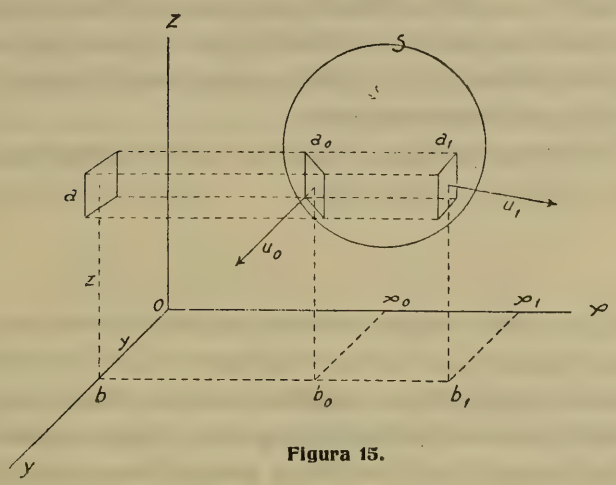


Figura 15.

derando más que un sólo termino, no aplicable precisamente á la entrada y la salida de los filetes, sino á toda la superficie S bajo la misma notación.

Para ello observemos que $dy\,dz$ puede considerarse, ó como la proyección del cuadrilátero a_0, ó como la proyección del cuadrflátero a_1.

Si designamos por $d\sigma_1$ el área del cuadrilátero a_1 y por $d\sigma_0$ el área del cuadrilátero a_0, tendremos evidentemente

$$dy\,dz = d\sigma_1 \cos(aa_1) \quad \text{y} \quad dy\,dz = d\sigma_0, \cos(aa_0).$$

Claro es que (aa_1) significa el ángulo que forman los planos de los dos cuadriláteros a; a_1; y (aa_0) asimismo el ángulo que forman los planos de los cuadriláteros a y a_0.

Para terminar la transformación, tracemos por el centro del cuadrilátero a_0 una normal n_0 exterior á la superficie S, y por el centro del cuadrilátero a_1 otra normal n_1, también á dicha superficie y exterior á ella.

Representemos, para abreviar todo lo posible la escritura, por α_0 y α_1 los cosenos de los ángulos que estas normales forman con el eje de las x.

Es claro que dichos ángulos son iguales á los que forman los planos de dichos cuadriláteros con el plano de las yz, cuya normal es el eje x, dando por de contado á estos cosenos el signo correspondiente.

Tendremos, pues, que las dos ecuaciones anteriores, podrán escribirse de este modo:

$$dy\,dz = d\sigma_1 \cdot a_1; \qquad dy\,dz = -\,d\sigma_0\,a_0.$$

Hemos dado el signo menos al segundo miembro de la segunda ecuación, por la razón siguiente: dy, dz, teniendo en cuenta la figura, es una cantidad positiva, pero α_0, según la misma figura, será un coseno negativo, y para que sea el segundo miembro positivo como el primero, hemos tenido que poner delante el signo —.

Un análisis sencillísimo demuestra, que este convenio, respecto á los signos, es general.

Sustituyendo estos valores en la integral, tendremos, desde luego,

$$\int\int dy\,dz\left[F(x_1, y, z) - F(x_0, y, z\right] =$$

$$= \int\int\left[dy\,dz\,F(x_1, y, z) - dy\,dz\,F(x_0, y, z)\right] =$$

$$= \int\int\left[F(x_1, y, z)\,a_1\,d\sigma, + F(x_0, y, z)\,a_0\,d\sigma_0\right]:$$

hemos sustituído el primer valor de $dy\,dz$, en la primera

parte, y el segundo valor de $dy\ dz$ en la segunda parte, porque el primero se refiere al punto de salida, y el segundo al punto de entrada.

Pero así escrita la integral, se ve que no es más que la suma de todos los productos de F por el área infinitamente pequeña $d\sigma$ y por el coseno del ángulo que forma la normal á esta área con el eje de las x, dando á cada coseno el signo que le corresponde y extendiendo la suma á todos los elementos de la superficie S, así á los de entrada de los filetes como á los de salida; pero éstos comprenden toda la superficie, luego no hay que distinguir unos de otros, sino decir que la integral se extiende á toda la superficie S, de modo que tendremos

$$\int\int\int_v \frac{dF}{dx}\, dx\, dy\, dz = \int\int_s F.\alpha d\sigma\,;$$

es decir, que la integral del primer miembro se obtendrá dividiendo la superficie en elementos infinitamente pequeños $d\sigma$, multiplicando su área por el valor de F, correspondiente al centro de dicho elemento y multiplicando todavía por el coseno del ángulo que forma con el eje de las x la normal á la superficie S en el centro del elemento $d\sigma$ de que se trata.

Transformación de $\int\int\int_v \frac{dG}{dy}\, dx\, dy\, z = .$

Esta transformación es idéntica á la anterior, con una diferencia; que, la parte que aquí es una diferencial exacta, es relativa á y puesto que es $\frac{dG}{dy}\, dy$.

Integrando, pues, con relación á y, es decir, para filetes paralelos á este eje, proyectados en el rentángulo $dx.\ dz$,

desde el valor y_0 de entrada al valor y_1 de salida; expresando dicho rectángulo $dx.\ dz$ por las dos áreas $d\sigma_0$, $d\sigma_1$ y por los cosenos que forman con el plano de las xz; trazando, como antes, dos normales n_0, n_1 á la superficie S y exteriores á la misma, y simplificando la notación como antes hicimos, puesto que la forma será la misma y con el mismo signo aparente para dichos cuadriláteros de entrada y de salida, con tal que á los cosenos de los ángulos con el eje de las y se les dé el signo que les corresponde; y, por último, llamando β_0 y β_1 á los cosenos de los ángulos (n_0, y), (n_1, y), tendremos una forma análoga á la anterior, que será esta

$$\int\int\int_v \frac{dG}{dy}\, dx\, dy\, dz = \int\int_s G\, \beta d\sigma.$$

Siendo $d\sigma$ un elemento infinitamente pequeño de la superficie, β el coseno del ángulo que forma con el eje de las y la normal á S en el centro de dicho elemento, y G el valor que toma dicha función cuando se sustituyen en vez de x, y, z las coordenadas del centro del elemento que consideramos, y conste que, siempre que hablamos de centro de estos elementos, nos referimos, como es sabido, á un punto cualquiera de los mismos.

La integral se extiende, como indica el subíndice S, á todos los elementos $d\sigma$ de la misma.

Transformación de $\int\int\int_v \frac{dH}{dz}\, dx\, dy\, dz = .$

Podemos someter esta tercer parte de la integral de Green á una transformación idéntica á la que hemos empleado para las dos primeras partes, con la diferencia, que aquí la parte integrable será $\frac{dH}{dz}\, dz$; los filetes, á lo largo de los cuales

se efectúa la integración, serán paralelos al eje de las z; el rectángulo, base de estos filetes, será análogamente $dx.\ dy$, y si representamos por γ_0, γ_1 los cosenos de los ángulos, que forman con el eje de las z las normales á los cuadriláteros de entrada y salida y, en general, por γ el coseno de una normal cualquiera exterior á la superficie con dicho eje de las z, y con el signo que le corresponda, sobre lo cual no habrá duda, como no pudo haberla antes, por estar marcadas las direcciones de ambas rectas, á saber: la dirección positiva del eje de las z y la dirección exterior de la normal, tendremos, por fin, en la notación simplificada que hemos adoptado

$$\iiint_v \frac{dH}{dz}\, dx\, dy\, dz = \iint_s H\gamma\, d\sigma.$$

***

Sustituyendo ahora las expresiones transformadas de las tres integrales que constituyen la integral triple de Green, resultará,

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint_s F\, d\sigma\alpha + \iint_s G\, d\varsigma\beta + \iint H\, d\sigma\gamma$$

y admitiendo la misma división de la superficie S en elementos infinitamente pequeños para las tres integrales, las tres $d\sigma$ serán las mismas y podremos escribir finalmente

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) dx\, dy\, dz =$$
$$= \iint_s \Big[F\alpha + G\beta + H\gamma\Big]\, d\sigma.$$

Esta es la que se llama fórmula de Green. A dicha relación también se le da el nombre de teorema de Green.

En la conferencia próxima continuaremos estudiando dicho teorema, así como diferentes transformaciones que recibe, para acomodarlo más fácilmente á los problemas de la Física matemática.

XIX.—Contribución al análisis del nitro de Chile

POR JUAN FAGES VIRGILI

De algunos años acá ha adquirido importancia la investigación y determinación cuantitativa de clorato y perclorato en el nitro de Chile, por la aplicación de éste como abono, y haberse demostrado la acción nociva de aquellas sales, en especial el perclorato, á las plantas; y también por la dificultad de obtener nitrato sódico puro partiendo de nitro de Chile que contenga aquellas sales, que difícilmente se eliminan por completo.

El objeto principal de esta nota es la investigación y determinación sencilla de estos compuestos clorados, especialmente los cloratos, en el nitro de Chile, aplicando las soluciones *A* y *B* de clorhidrato de anilina en ácido clorhídrico (1) que en notas anteriores he propuesto para la investigación y determinación de cloratos (2).

---

(1) La solución *A* se prepara de cualquiera de estas maneras:

A	Clorhidrato de anilina puro	50 gr.	*A*	Anilina pura	36 gr.
	Ac. clorhídrico puro, 1.12	1.000 c. c.		Ac. clorhídrico, 1.19.	656 c. c.
				Agua	344 c. c.

La solución *B* se puede también preparar de dos maneras:

B	Clorhidrato de anilina puro	50 gr.	*B*	Anilina pura	36 gr.
	Ac. clorhídrico puro, 1.145	1.000 c. c.		Ac. clorhídrico, 1.19.	800 c. c.
				Agua	200 c. c.

La solución *B* sólo difiere por su mayor concentración clorhídrica. Partiendo de la anilina se obtienen soluciones más incoloras que empleando el clorhidrato. En frascos bien tapados se conservan indefinidamente estas soluciones.

(2) *Rev. Real Acad. Cienc. exact. fisic. y natur.* Madrid, 1908. Septiembre.

Investigación de cloratos en nitros de Chile. —La experiencia me ha demostrado que el clorato y el perclorato están muy desigualmente repartidos en un nitro; por consiguiente, es conveniente preparar la muestra partiendo de masa algo grande de éste, mezclándola bien, tomando una parte no escasa de ella, pulverizándola *finamente* y separando dos gramos del polvo fino para el ensayo.

A estos dos gramos de nitro, puestos en un tubo, se adiciona una mezcla, previamente hecha, de 2 c. c. de la solución *B* y 0,5 á 1 c. c. de agua; se agita un poco, y se deja sobre fondo blanco. Si hay clorato aparecerá coloración azul ó verde, más intensa y más pronta en aparecer cuanto más abunde el clorato, pero no tarda nunca más de media hora y palidece con el tiempo. Una coloración que se inicia próximamente una hora después de adicionar el reactivo (ó antes si no se diluyó previamente la solución *B*) y que persiste indefinidamente y aun aumenta, no supone la existencia de clorato, pues es debida á la lenta acción del ácido clorhídrico sobre el ácido nítrico resultante de la formación de cloruro sódico con el nitrato y el ácido clorhídrico. Un nitro con 0,1 por 100 de clorato da intensa y muy pronta coloración azul; con 0,01 por 100, antes de cinco minutos; con 0,005 por 100, ó menos, antes de diez minutos y dura poco.

Se reconocen así 0,002 por 100 de clorato: la sensibilidad del reactfvo es mayor con clorato puro; pero la gran masa de sales impide la simultánea reacción de todo el clorato presente, y resulta disminuída la sensibilidad. Por la misma razón importa la fina pulverización del nitro, que no es necesaria si éste contiene 0,01 de clorato ó más por 100.

Los nitratos y cloruros, existentes en el nitro, no dan ni impiden la reacción citada de los cloratos, así como siempre dan estando juntos las de éstos, basadas en el empleo de reactivos sulfúricos. Los sulfatos y percloratos, casi siempre existentes en los nitros, tampoco estorban, ni la pequeña proporción de nitritos que á veces existen. En cambio, los

yodatos, acaso presentes, se conducen como los cloratos. En consecuencia, si la solución clorhídrica de anilina no da coloración alguna, puede afirmarse la ausencia de cloratos y de yodatos en el nitro.

Investigación de yodatos.—Para ésta empleo este reactivo

Anilina pura	5 gr.
Acido acético cristalizable	40 c. c.
Agua, hasta	100 c. c.

Se ponen en un tubo 2 gramos de nitro pulverizado, se adicionan 5 c. c. de este reactivo, se hierve medio minuto, se deja enfriar un poco y se adiciona una ó dos gotas de ácido sulfúrico ó clorhídrico. Si hay yodato (0,003 por 100 ó más) en el nitro, aparece una coloración rojo violada, que aumenta de intensidad con el tiempo, y aun copos verdes azulados si no es muy escasa la proporción de yodatos.

Los nitratos y los cloratos (*) no dan esta reacción ni la impiden á los yodatos. En consecuencia, si no aparece y la solución clorhídrica de anilina dió color azul, ésta es debida exclusivamente á los cloratos. Si las dos reacciones han sido positivas y su poca diferencia de intensidad no permite deducir conclusiones seguras, se necesita confirmar los cloratos. Para esto se disuelven 2 ó 3 gramos del nitro en agua, se precipita el cloroión del líquido, sin acidular, con solución de nitrato argéntico en la proporción casi justa, se agita, filtra, evapora á sequedad el filtrado en baño maría, se pulveriza el residuo, que se pasa á un tubo, y se le adicionan 2 c. c. próximamente de solución nítrica de estricnina recien-

(*) Si los cloratos abundan algún tanto, no es raro que, al añadir las gotas de ácido mineral después de hervir, aparezca una coloración azul en la superficie, sobre todo si no se ha dejado enfriar; pero que desaparece mezclando el líquido, porque la acidez de éste es insuficiente para producir con los cloratos la reacción de éstos con la anilina.

te (0,1 gr. de estricnina en 25 c. c. de ácido nítrico de 1,36 á 1,40) (*); si hay cloratos aparecerá coloración roja. Los yodatos no dan esta reacción, que la impiden los cloruros, y por esto se eliminan previamente.

Investigación de nitritos. —Puede hacerse de muchas maneras; pero la más sencilla es la misma que he propuesto para la investigación de los yodatos. El mismo reactivo, usado en idéntica forma, dará una coloración roja anaranjada si hay nitritos (Deniges). En consecuencia, si no aparece ninguna coloración, se demuestra simultáneamenle la ausencia de yodatos y de nitritos, permitiendo el matiz del color, en caso contrario, deducir si es debido á nitritos ó á yodatos ó tal vez á mezclas de los dos.

La presencia del clorato en los nitros de Chile es muy frecuente, aunque en proporción muy variable. Los nitritos y yodatos, en cambio, los he encontrado muy pocas veces. Son más frecuentes los nitritos en nitros purificados, y desde luego y abundantes en los nitros sintéticos.

CUANTITATIVA

Se disuelven en agua caliente 40 gramos de nitro y se diluye en frío la disolución hasta 100 c.c. Se filtra por filtro seco y con vasijas también secas, y se toman del filtrado *(F)* las fracciones necesarias para cada determinación.

Si se quiere medir lo *insoluble*, se lava en el mismo filtro de la anterior filtración y se continúa en la forma ordinaria.

Los *sulfatos* se determinan en una porción de *(F)*, previa evaporación con ácido clorhídrico para transformar en cloruros los nitratos. Si el examen cualitativo no revela excepcional proporción de sulfato, carece de importancia esta determinación en la mayoría de casos.

(*) *Recherche des chlorates au moyen de la strychnine*, Fages, 1900. *Ann. de Chimie Analyt.*, Paris.

El *cloroión* se determina en 12,5 c. c. de *(F)* (equivalentes á 5 gramos de nitro) y preferentemente poniendo este volumen en un matraz aforado de 200 c. c. con 80 á 100 c. c. de agua y solución *N*/10 de nitrato argéntico en exceso, agitando, diluyendo á 200 c. c., mezclando y filtrando enseguida con filtro y vasijas secos. En 50 c. c. de este filtrado, y después en 100 c. c. se determina el exceso de plata, que permite calcular el cloroión. La determinación de dicha plata se hace con solución valorada *N*/10 y mejor *N*/20 de sulfocionato amónico en la forma sabida. La determinación del cloroión tiene mucha importancia, porque es forma usual de falsificar el nitro de Chile la de adicionarle sal común. Además, es dato indispensable para la medición del perclorato, y requiere por esta razón una medición muy precisa.

El *cloratoión* se determina con ventaja colorimétricamente. Los reactivos necesarios son:

a) Solución que en 1.000 c. c. contenga 0,2 gr. de clorato potásico puro (excepcionalmente 0,4 gr. y 0,1 gr.).

b) Reactivo *B*.

c) Solución de nitrato sódico puro (sin cloratos ni yodatos) saturada en frío.

Determinación aproximada. — En un tubo graduado de 50 c. c. se ponen 10 c. c. de *(F)* (ó menos, y agua hasta 10 c. c., según la proporción de clorato). En otro tubo igual los c. c. de *(a)* que contengan próximamente igual cantidad de clorato que los de *(F)* del primer tubo y solución de *(c)* hasta 10 c. c. justos. Se adiciona ahora rápidamente á cada tubo 15 c. c. de *(b)*, se mezcla y deja veinticinco ó treinta minutos sin preocuparse del precipitado cristalino de cloruro sódico que pronto aparece, tanto más abundante cuanto mayor sea la cantidad de nitrato de cada tubo, y que conviene que sea próximamente la misma en cada uno. Pasado aquel tiempo, se diluye el líquido más obscuro en la forma acostumbrada, pero con una mezcla previamente hecha de 3 vol. de *(b)* y 2 vol. de agua (ó mejor de solución *(c)*, hasta

igualdad de intensidades, haciéndose luego los cálculos como en todas las colorimetrías de diluciones sucesivas. Los resultados son suficientes en muchos casos; pero si luego se determina el perclorato, importa precisarlos más como sigue:

Determinación precisa. — Se aplica la misma colorimetría pero comparando el ensayo, preparado de igual modo que en la determinación anterior con una escala de tubos tipos hechos según los mismos principios. Como ya se conoce muy aproximadamente la proporción de clorato del líquido *(F)*, suelen bastar tres y á veces sólo dos tubos tipos. Como ejemplos de éstos cito las siguientes escalas que varias veces he utilizado:

0,0006	0,0005	0,00045	0,00040 gr. de ClO_3K.
0,00025	0,00020 gr.		» » »
0,00120	0,001125	0,001050 gr.	» » »

Si la abundancia de clorato lo permite, es preferible emplear solo 5 c. c. de *(F)* ó menos, porque es menor ó nula la precipitación de cloruro sódico; puede hacerse así con nitros que contengan 0,02 por 100, ó más, de clorato.

Como la intensidad de la coloración no sólo depende de la concentración en clorato, sino en ácido clorhídrico, que aumentando disminuye á aquélla, en el caso de nitros muy cloratados se puede también operar reduciendo los c. c. de solución acuosa, de cada tubo, hasta 5 como mínimo, y aumentando el volumen correspondiente del reactivo *B*, hasta 20 c. c. como máximo.

Resultados: el análisis de varias muestras, de diferentes años, que la Delegación española del *Permanet Nitrate Committee* ha tenido la bondad de proporcionarme, han dado los siguientes valores para los cloratos, expresados en clorato potásico.

Muestra	ClO_3 *K.* por 100.
1898.....	0,0020
1903.....	0,0020
1907.....	0,0079
1.ª 1908.....	0,0120
2.ª 1908.....	0,0082
3.ª 1908.....	0,1170

La determinación del *percloratoión* la practico tomando 12,5 c. c. de *(F)* (= 5 gr. de nitro) que vierto, con la misma pipeta, en un crisol de porcelana que contiene 8 gramos de cal, exenta de cloruros ó conocida su proporción (*). Caliento el crisol á fuego directo, pero *muy débil* al principio. A los treinta minutos, próximamente, forma la mezcla una masa seca que puede progresivamente llevarse al rojo sombra y tenerla así quince minutos, tapado el crisol, que son suficientes para la total reducción del clorato y perclorato del nitro á cloruro. Después de frío se separa fácilmente la masa, se fragmenta, se la introduce en un matraz aforado de 200 c. c., se la añade un poco de agua, y poco á poco ácido nítrico de 1,20 p. e. hasta completa disolución ácida; generalmente se necesitan de 40 á 50 c. c., tanto más cuanto más alta haya sido la temperatura á que se sometió la mezcla, y mayor, por lo tanto, la reducción del nitrato á nitrito.

Completa la disolución y seguros de su acidez no exagerada, se determina el cloroión, ahora existente, de la misma manera que al determinar antes el procedente exclusivamente de los cloruros.

Conocido así el número de c. c. de solución de nitrato de plata N/10, equivalente al cloro total de los 5 gramos de nitro, se le resta: 1.º, los c. c. correspondientes al cloroión de los cloruros preexistentes; 2.º, los c. c. correspondientes, según cálculo, al cloroión procedente del cloratoión, conocido

(*) No importa que esté algo carbonatada ó hidratada.

experimentalmente; 3.°, los c. c. correspondientes al cloroión de los 8 gramos de cal y al volumen de ácido nítrico, sino estaban exentos de cloro. La última resta, expresará los c. c. de solución N/10 de nitrato argéntico correspondientes al cloro del percloratoión, si le hay; y, según ellos, se calcula éste que se expresa generalmente en forma de perclorato sódico, aunque no es seguro que en tal estado esté.

Como resultado de dos, y tal vez tres diferencias, el número expresivo del perclorato no puede ser muy riguroso; y si no se han hecho muy cuidadosamente las determinaciones experimentales, es posible hasta la duda de si hay ó no perclorato, siendo éste, en general, escaso. Menos de una milésima de perclorato difícilmente se aprecia en el nitro; y en todo caso, no puede concederse gran veracidad á la cifra de las diezmilésimas. Indico á continuación dos análisis, donde se ve que, á pesar del cuidado con que se han practicado, no son muy concordantes los dos números correspondientes al perclorato de la misma muestra.

	1.ª, 1908	3.ª. 1908
Insoluble.....	0,2915 %	»
Humedad.....	0,5780 »	»
Cloruro sódico.....	0,5522 »	3.450 %
Clorato potásico.....	0,0120 »	0,117 »
Perclorato sódico.....	0,311 y 0,355	0,380 y 0,326

He elegido además estos ejemplos, porque enseñan que no guardan ni remota relación la proporción de clorato y la de perclorato. La segunda muestra tiene próximamente diez veces más clorato que la primera, y casi igual proporción de perclorato. De aquí se deduce la necesidad de medir separadamente el clorato y el perclorato y no juntos, como si todo fuera perclorato, que es lo que generalmente se hace.

Como no es el objeto de esta Nota la importante medición del nitratoión en los nitros, sólo indico que, después de ha-

cer dobles determinaciones del cloroión, cloratoión y percloratoión en las formas expuestas, queda todavía suficiente solución (F) para determinar el nitratoión; y, por lo tanto, con una sola pesada, que no exige balanzas de gran sensibilidad, se pueden hacer todas las determinaciones más importantes del análisis del nitro de Chile y en un tiempo bastante corto.

*
* *

Escrito lo anterior, y ya en la imprenta, me he enterado de la nota de W. Rothmund, publicado en *Zeit. f. anorg Chemie.* 1909, pág. 48, según la que, los percloratos son reducidos fácilmente á cloruros con una solución ácida de sulfato titanoso: $(SO_4)_3\ Ti_2$.

Esta propiedad, ciertamente muy interesante, pues es notoria la gran estabilidad y difícil reducción de los percloratos por vía húmeda, beneficia poco ó tal vez nada la determinación cuantitativa de estos compuestos. El procedimiento que propone W. Rothmund es más complicado que el clásico actual de vía seca, del que es sólo una variante la forma que yo propongo. Al fin, en uno y otro, hay que determinar cloroion; y en presencia de cloruros y cloratos, que es el caso del nitro de Chile y casi el general, siempre la precisión será escasa para el perclorato, sobre todo si no abunda, pues depende de dos diferencias que acumulan los errores en dicho perclorato.

XX. — Sobre la isomería de los ácidos estánicos.

POR WERNER MECKLENBURG

PRIMERA NOTA

Después de demostrado, hace ya casi un siglo, por Davy, Gay-Lussac y Berzelius, que los dos ácidos estánicos, el *normal* ó ácido *a* y el *meta* ó *b*, no difieren por el grado de oxidación del estaño, y luego que establecieron más tarde Frémy, Weber, Rich, Lorenz (*) y otros investigadores que ambos ácidos pueden existir dotados de las mismas cantidades de agua, es decir, que tampoco se diferencian por el grado de hidratación; para explicar la no identidad realmente observada, había que inventar una teoría de tan singular caso de isomería. Fué van Bemmelen (**) quien, ya en 1888, emitió la opinión de que los ácidos *a* y *b* eran sólo modificaciones coloidales de diferentes densidades del hidróxido ú óxido estánico; mas entonces apenas era posible el precisar los pormenores de tal idea. En la actualidad, después de construído el ultramicroscopio, la química de los coloides ha realizado tantos progresos importantes que la doctrina de van Bemmelen es explicable de un modo especial, conforme espero demostrarlo en la presente Memoria; pues los fenómenos particulares que presenta la isomería de los ácidos estánicos, caben dentro de un punto de vista exactamente definido en la química de los coloides.

He aquí la tesis que intento probar: *Los ácidos estánicos*

(*) Rich. Lorenz, Z S. f. anorg. Ch. **9**, 371; 1895.

(**) Van Bemmelen, Jahresber. von Liebig und Kopp, 1888, S. 284.—Z. S. f. anorg. Ch. **45**, 83; 1905.

a *y* b *son modificaciones coloidales del dióxido estánico hidratado, poco ó nada soluble en el agua, y se distinguen por el tamaño de sus partículas; el ácido* a *fórmanlo partículas relativamente pequeñas, y el* b *partículas relativamente grandes.*

1.—El tamaño de las partículas de los ácidos *a* y *b* en el estado de coagulación.

El hecho notable de que los ácidos estánicos *a* y *b* conservan sus propiedades específicas, aun después de coagulados, y en condiciones especiales se disuelven regenerando las disoluciones originales *a* y *b*, no presenta tantas dificultades teóricas como se podría creer de primera intención. Es verdad que la precipitación de una disolución coloidal se realiza siempre mediante agregación de las partículas coloidales para constituir grupos mayores; pero los de tal modo producidos no consisten en masas homogéneas y uniformes, sino que las partículas de cuya unión proceden pueden conservar sus individualidades particulares. La realidad de tal hecho la demostraron Kirchner y Zsigmondi (*), quienes desecaron disoluciones coloidales de oro agregándoles pequeñas cantidades de gelatina, y obtuvieron por tal artificio una suerte de escamillas que, vistas al microscopio con objetivo de mayor abertura, se han reconocido formadas por diminutos granitos singulares de extremada pequeñez y dotados de intensos colores; y según ha demostrado el estudio ultramicroscópico, cada uno de estos granitos contenía cientos ó aun miles de partecillas submicroscópicas. Disolviendo de nuevo los residuos desecados, en la mayoría de los casos se regeneraron las disoluciones originales, caracterizadas por el grado de distribución y por el color.

(*) Kirchner y Zsigmondi, Drude's Annalen, 15, 573; 1904. — Zsigmondi «Zur Erkenntnis der Kolloide», Jena, 1905, pág. 113.

El hecho de constituir el ácido estánico *a* coagulado partecillas más pequeñas que el *b*, asimismo coagulado, se puede inferir de la mayor facultad de adsorción á la temperatura ordinaria; según van Bemmelen (*), son adsorbidas por una molécula de ácido estanico:

	a	*b*	
En atmósfera húmeda.....	2,7	2,3	moléculas de agua.
Después de desecada. sobre ácido sulfúrico	2	1,07	» » »
Después de desecada. á 100 centígrados....	1,7	1,5	» » »
Después de tostada débilmente.....	0,8	0,65	» » »

Y lo mismo se puede decir, también según van Bemmelen (**), para la adsorción del ácido sulfúrico, y según Löwenthal (***) y Rich. Lorenz (****) para la del ferrocianuro potásico; acerca de los estudios de estos dos químicos diré algo más adelante.

2.—La preparación de los ácidos estánicos *a* y *b*.

Puesto que para la preparación del ácido estánico se parte siempre de disoluciones estánicas cristaloídeas, á la continua se obtiene la forma de las partículas menores, es decir, el ácido estánico *a*. Se produce, v. g. el ácido estánico *a* mediante la descomposición, por medio de álcalis, de disoluciones de halogenuros estánicos recién preparadas ó por la descomposición, empleando los ácidos, de disoluciones estánicas alcalinas, que, conforme es sabido, contienen el estaño en forma de estanatos cristalizables de la fórmula $Me_2\ Sn\ (OH)_6$ (*****). Además de esto, electrolizando una

---

(*) Van Bemmelen, Ber. D. Chem. Gesellsch, 13, 1466; 1880; compárese Gmelin-Kraut-Friedheim, Handbuch der anorganischen Chemie, Bd. IV, Abteil. 1, págs. 279 y 281.

(**) Van Bemmelen, Journ. prakt. Ch. 23, 340, 1881.

(***) Löwenthal, Journ. prakt. Ch. 77, 321, 1859.

(****) Rich Lorenz, Z. S. f. anorg. Ch., 9, 367, 1895.

(*****) Belucci und Parravano, Z. S. f. anorg. Ch. 45, 142, 1905.

sal alcalina entre un cátodo de platino y un ánodo de estaño (*) por la hidrólisis de las sales de estaño primeramente formadas, se llega al ácido estánico *a*. El único método de preparación del ácido *b* es por el ácido *a*. La manera ordinaria de obtener el ácido *b* es reaccionando el ácido nítrico, á una dilución media, con el estaño metálico. De ninguna manera resulta, en este caso, el ácido *b*, producto *primario* de la reacción. Ya Weber (**) pudo establecer que en las acciones entre el ácido nítrico de 1,35 de peso específico y el estaño metálico bien batido, y enfriando bastante, se produce una disolución absolutamente clara (del ácido coloidal *a*, no, como cree Weber, de nitrato estánico), la que, calentada después de la reacción, deposita el ácido estánico *b* muy insoluble en el ácido nítrico; este interesante resultado está confirmado por los dos químicos ingleses Hay (***) y Scott (****).

Calentando se fomenta la producción del ácido *b*; por eso haciendo hervir las disoluciones del ácido *a* se obtiene el ácido *b*. Pero si se trabaja con un líquido bastante diluído, se aisla, conforme lo averiguó H. Rose (*****) estudiando el cloruro estánico, el ácido *a*, y no el *b*, y es una observación de sumo interés, porque, en general, preparando las disoluciones coloidales, v. g. las del antimonio sulfurado, las partículas son tanto menores, cuanto más diluídas están aquéllas (*******).

(*) Lorenz, Z. S. f. anorg. Ch., 12, 436, 1896.—Elbs y Thümmel, disolviendo anódicamente el estaño en disoluciones neutras y ácidas, en general han obtenido derivados del estaño divalente (Z S. f. Elektroch., 10, 364, 1904).

(**) Weber, Pogg. Ann., 122, 365, 1864.

(***) Hay, Chemical News, 22, 298, 1870.

(****) Scott, Chemical News, 22, 322, 1870.

(*****) H. Rose, Journ. prakt. Ch., 45, 76; 1848.

(******) W Biltz, Nachr. d. Königl. Gesellsch. d. Wiss. z. Göttingen, Mathem. physik. Klasse, 1906, Heft. 2.

Lo mismo que el ácido estánico *a* se produce fácilmente partiendo de disoluciones estánicas cristaloídeas, éstas con mucha facilidad son regeneradas, y en ello muéstrase en completa oposición con el ácido *b*. En las disoluciones alcalinas del ácido *a* se pueden aislar los estanatos respectivos cristalizados $Me_2 Sn (OH)_6$. Y disolviendo el ácido estánico *a* en una disolución fuertemente clorhídrica, se puede destilar sin la menor dificultad el cloruro estánico $Sn Cl_4$.

3.—La transformación lenta del ácido estánico *a* en el *b*.

El hecho, de antiguo conocido, que las disoluciones acuosas del ácido estánico *a* se transforman, con el tiempo, en disoluciones de *b*, ha sido estudiado empleando medios exactos, es decir, basados en medidas exactas, por diferentes investigadores. Y es el ya citado Löwenthal á quien se debe un método apropiado para realizarlas (*). Löwenthal (**) ha establecido que el ferrocianuro potásico en su disolución acuosa puede ser precipitado completamente por el ácido estánico; pero que se necesita tanto mayor cantidad de disolución acuosa de cloruro estánico, y que el precipitado formado contiene tanto más de estaño cuanto más antigua es la disolución estánica. El cuadro siguiente, intercalado en el trabajo de Löwenthal, resume la edad de la disolución acuosa del cloruro estánico, la fuerza de precipitación y la composición del precipitado.

(*) La variabilidad, con el tiempo, de una disolución acuosa de cloruro estánico, se reconoce también por la variación de la conductibilidad eléctrica. Pero el deducir de la conductibilidad una medida exacta y simple de la transformación del ácido *a* en el *b*, parece poco seguro, pues tal propiedad es sólo la resultante de los efectos de factores muy variados, es decir, de los iones simples y complejos con sus velocidades respectivas y modificadas por las partículas presentes, de diferentes tamaños, de los ácidos estánicos. Véase v. Kowalevsky, Z. S. f. anorg. Ch. 23, 1, 1900.

(**) Löwenthal, Journ. f. prakt. Chem. 77, 321, 1859.

Edad de la disolución acuosa del cloruro estánico.	Para la precipitación completa de 0,5 gramos de $K_4 Fe Cy_6 3 H_2 O$ se necesitan.	Composición del precipitado $\frac{\text{moléculas de } Sn(OH)_4}{\text{moléculas de } K_4 Fe Cy_6}$
0 días	6 centímetros cúbicos.	Cerca de 1,5
7 —	10 — —	— 2,3
14 —	14 — —	— 3,3
81 —	27 — —	— 6,5
126 —	32 — —	— 7,5
162 —	36 — —	— 8,5

Esta disminución, con el tiempo, del valor de precipitación de la disolución del cloruro estánico, la explica Rich. Lorenz (*), suponiendo que se realiza una reacción entre el ión ferrociánico y el ión estánico, y que la disminución del efecto se basa en la desaparición sucesiva del ión estánico. Tal teoría parece poco probable, por dos razones. En primer lugar, la desaparición sucesiva de los iones estánicos es muy sorprendente, pues en disoluciones acuosas las reacciones iónicas suelen realizarse con mucha rapidez. Y en segundo lugar, la teoría de Lorenz lleva á admitir que el producto segregado en la reacción ha de consistir especialmente en estaño ferrociánico Sn Fe $(CN)_6$; y por el contrario, la cantidad de estaño contenido en la masa de reacción aumenta con toda regularidad. Así creo preferible otra explicación. Siendo mayor el poder de adsorción del ácido estánico *a* que el del *b*, la transformación sucesiva debe hacerse notar por un decrecimiento de aquel poder, lo cual se reconoce en la segunda columna del cuadro arriba citado. De otra parte, las disoluciones del ácido estánico *b* se precipitan más fácilmente que las del *a*, conforme se verá en el párrafo cuarto del presente estudio. Por eso, el ferrocianuro potásico, pre-

(*) Rich. Lorenz, Z. S. f. anorg. Ch. 9, 377, 1895.

cipita no sólo el ácido *a*, sino también el *b*, y la adsorción principalmente es función del ácido *a* precipitado. Con otras palabras: La cantidad total del precipitado debe aumentar y al mismo tiempo disminuir de poder de adsorción, cuanto más se produce la transformación del ácido *a* en el *b*, hecho demostrado en la tercera columna del cuadro. La lentitud de la transformación, según esta teoría, no debe parecer extraña, en cuanto no se trata aquí de reacciones iónicas.

4. - Las reacciones de los ácidos estánicos *a* y *b*.

Consistiendo en partículas más pequeñas el ácido *a*, y teniendo por ello mayor superficie que el ácido estánico *b*, se debe inferir que es atacado con más facilidad que su isómero por los reactivos químicos. Los ejemplos siguientes hacen ver que esta consecuencia de nuestra teoría se armoniza muy bien con los hechos observados en la realidad. Una disolución acuosa del ácido estánico *a*, tratada por el hidrógeno sulfurado (*), es precipitada completamente en forma de estaño sulfurado; y en las disoluciones de *b* lo que se obtiene, mediante la acción del mismo reactivo, es, en general, ácido estánico. Con el ácido tartárico, el ácido estánico *a* es transformado en su compuesto complejo recientemente obtenido cristalizado por Rosenheim y Aron (**); de tal compuesto, el ácido estánico *a* no puede ser precipitado ni por los álcalis ni por el amoníaco; asimismo, en presencia del ácido tartárico, es imposible transformar una disolución del ácido *a* en otra de *b* (***). Con el ácido estánico *b*, el ácido tartárico no reacciona, ni imposibilita la precipitación empleando dichos reactivos. Se ha de recordar cómo,

---

(*) Barfoed, Journ. f. prakt. Chem., **101**, 370, 1867.—Jörgensen, Z.S. f. anorg. Chem., 28, 140, 1901.

(**) Rosenheim und Aron, Z.S f. anorg. Chem. 39, 170, 1904.

(***) Löwenthal, Journ. f. prakt. Chem., 77, 321, 1859.

según Vignon (*), los colorantes orgánicos, al igual de la fenosafranina, producen lacas con el ácido *a*, pero no con el *b*; si la producción de la laca, en el caso presente, es explicable mediante adsorción ó atendiendo á reacciones químicas, es cuestión de menor interés.

Tiénelo superior el estudiar el cómo se conducen ambos ácidos estánicos en presencia de los ácidos minerales y de los álcalis (**). Atendiendo al tamaño de sus partículas, el ácido estánico *b* está más próximo del estado de coagulación y así es precipitado más fácilmente que el *a*, y al contrario el ácido *a* se transforma mejor que el *b* en disoluciones cristaloídeas. Los dos ácidos estánicos recientemente precipitados son peptizados por los álcalis, pero los álcalis de débil poder peptizante, v. g. el amoniaco ó los carbonatos alcalinos, solo son aptos para la peptización del ácido estánico *a* de partículas más diminutas, no para las mayores del ácido estánico *b*. Un exceso de ácidos minerales ó de álcalis es bastante para precipitar la disolución coloidal del ácido *b*, más no la del *a*, el cual, al menos en parte, es transformado en tales condiciones en compuestos cristaloídeos de estaño. La peptización del ácido estánico *b*, preparado mediante la acción del ácido nítrico sobre el estaño metálico á temperaturas elevadas, sólo pueden realizarla los ácidos ó álcalis concentrados; pero si la acción de estos reactivos se dilata algún tiempo, las partículas hácense cada vez más pequeñas; el ácido *b* se transforma poco á poco en *a* y éste en compuestos cristalinos.

Ni el ácido *a* ni el *b* forman verdaderas sales. Se demuestra que las disoluciones salinas del ácido *b* son disoluciones coloidales típicas, en cuanto las precipitan los electrólitos y por no ser cristalizables. Las «sales» sólidas aisladas de tales

---

(*) L. Vignon, Comptes Rendus, 122, 580, 1841.

(**) Véase Gmelin-Kraut-Friedheim, Handbuch der anorganischen Chemie Bd. IV, Abteil. 1, S. 279 u. 281-284.

disoluciones son substancias amorfas, caracterizadas en los análisis como hidrato estánico hidratado, que á consecuencia de simple adsorción puede fijar ácidos ó álcalis. Los compuestos cristalizables generados del ácido estánico *a*, las llamadas sales *a* del ácido estánico, v. g. los hidratos del cloruro estánico $Sn\ Cl_4$ ó el estanato potásico $K_2\ Sn\ (OH)_6$, no se pueden considerar verdaderas sales del ácido estánico *a*, porque el peso molecular de éste es de un orden de magnitud muy distinto del correspondiente á tales sales *a*. El ácido estánico *a* v. g. no se puede difundir por las paredes de una manga de diálisis de Kühne, y en cambio lo hacen las sales *a* de estaño, no hidrolizadas.

RESUMEN

Los particulares fenómenos de isomería del ácido estánico se pueden explicar suponiendo que el cuerpo en cuestión colocado en un medio acuoso ácido, alcalino (y acaso según muchas probabilidades también neutro) forma disoluciones acuosas coloídeas, cuyas partículas tienen diferentes tamaños, pudiendo al ser precipitadas conservar su individualidad. Las mayores facultades de adsorción y de reacción y las relaciones íntimas con las disoluciones cristaloídeas del estaño, hacen resaltar la estructura relativamente fina del ácido estánico *a;* y son consecuencia del tamaño mayor de las partículas del ácido estánico *b*, su menor poder de adsorción y de reacción, la fácil precipitación y el defecto de relaciones directas con las disoluciones cristaloídeas del estaño.

Esta teoría del ácido estánico se puede aplicar á otras substancias de las que también presentan la isomería del ácido estánico v. g. á los ácidos silícico, tórico y circónico.

Clausthal i H. (Alemania) 1909.

XXI.—Viaje de estudio á la Guinea española.

Observaciones acerca del *Trypanosoma gambiense* y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales.

Por Gustavo Pittaluga.

Desde la mitad del mes de Junio hasta últimos de Octubre del pasado año de 1909 he tenido ocasión de recorrer y visitar diferentes lugares de la isla de Fernando Póo y de los territorios de la Guinea Continental española, como Jefe de una Comisión del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII, enviada por el Ministerio de Estado á aquellas posesiones coloniales con el objeto principalísimo de determinar la existencia, extensión é intensidad de la llamada «enfermedad del sueño» ó tripanosomiásis humana, en los términos de la Colonia, y de contribuir al estudio de las condiciones sanitarias de ésta.

Durante la expedición hubo que llevar á cabo numerosas observaciones parasitológicas. Y de los resultados de algunas de ellas, que se refieren particularmente al *Trypanosoma gambiense* y á otros protozoos parásitos del hombre y de animales, me propongo dar cuenta en esta breve Memoria á la Real Academia de Ciencias.

Séame permitido recordar aquí, con palabras de sinceras alabanzas, la eficaz cooperación de mis dos compañeros de viaje, el Dr. D. Luis Rodríguez Illera y el Sr. D. Jorge Ramón, y al propio tiempo el incondicional apoyo y las muchas cortesías recibidas del Gobernador general de la Colonia, Excmo. Sr. D. José Centaño, y de las autoridades todas de la isla de Fernando Póo y de los dos distritos de Elobey y de Bata, en el Continente.

Antes de exponer los resultados de nuestras observaciones, creo oportuno comunicar á los lectores de la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS un breve relato de la expedición. En las dos láminas que acompañan al presente trabajo, se halla trazado en los Mapas de Fernando Póo y de la Guinea Continental española el itinerario recorrido por la Comisión que tuve el honor de dirigir.

I

Itinerario de la expedición y resumen general de los trabajos efectuados.

La Real orden de nombramiento de la Comisión lleva la fecha del 21 de Mayo de 1909. Organizada apresuradamente la expedición en parte con el material del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII, en parte con material adquirido en los días que corrieron entre el 21 y el 28 de Mayo, con cargo al crédito consignado por la Sección colonial del Ministerio de Estado, salimos de Madrid el día 28 y de Cádiz el 30, á bordo del vapor *San Francisco*, de la Compañía Trasatlántica.

Tocó el *San Francisco* los puertos de Las Palmas, Río de Oro, Sierra Leone y Monrovia (República de Liberia) y el día 15 de Junio llegó á Santa Isabel de Fernando Póo.

Instalado nuestro modesto laboratorio en la casa del Sr. Capmany, expresamente alquilada para este objeto, pudimos emprender nuestras tareas el día 20.

La Comisión permaneció en Santa Isabel de Fernando Póo — en esta primera etapa — desde el 15 hasta el 28 de Junio. Los médicos del servicio sanitario colonial, D. Tomás Ramos Pabalán, jefe del servicio, D. Arturo Gil Fabre y D. César Alonso, nos auxiliaron en aquellos días y merecen por nuestra parte un vivo recuerdo de gratitud.

Constante é inteligentísima cooperación nos prestó el Jefe

de la Sección Comercial de la Compañía Trasatlántica, nuestro buen amigo D. Pedro Bengoa.

A partir del día 21 empezaron á acudir á nuestro laboratorio numerosos indígenas acusando diferentes dolencias. Todos ellos, cualquiera que fuese la enfermedad clínicamente diagnosticada, fueron sometidos á examen metódico de la sangre, y en los casos sospechosos el examen fué repetido muchas veces en días sucesivos ó en horas distintas del día.

Fueron adquiridas por entonces las primeras noticias exactas acerca de la procedencia de algunos casos de enfermedad del sueño observados en Santa Isabel y en el territorio de la Colonia en general. Resultaron de gran provecho para la Comisión, además de los datos recogidos por los médicos del servicio colonial en años anteriores, las indicaciones que nos proporcionaron el Rvdo. P. Armengol Coll, Vicario apostólico, y el P. Juanola, de las Misiones desde larga fecha establecidas en la isla y en el continente.

Desde el 21 al 28 de Junio fueron examinados 18 individuos. Entre ellos merecen ser recordados la niña *María,* de diez años, procedente de la Misión de Concepción (Fernando Póo), y á la sazón en el Hospital Reina Cristina, de Santa Isabel; y el portugués *Felisardo Godiño,* de veinticinco años, procedente de Santo Tomé y Príncipe, cuya historia clínica está resumida más adelante. (Véase II, casos números 1 y 2.)

El día 29 de Junio por la mañana salimos de Santa Isabel á bordo del vapor *Annobon* para una excursión de quince días al interior de la isla, y con el objeto principalísimo de visitar los dos puntos más importantes, respectivamente, de la costa occidental y oriental de Fernando Póo (lámina I, adjunta al presente informe), San Carlos y Concepción; este último considerado, con gran fundamento, como el foco de la tripanosomiasis humana en la isla.

No fué posible detenernos en San Carlos esta primera vez sino algunas horas, durante las cuales el Sr. Tort, médico de aquel Hospital, y el Dr. Virto, que ejerce libremente la profe-

Escala 1: 250.000.

Itinerario seguido por la Comisión del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII enviada por el Ministerio de Estado

Foco endémico de enfermedad del sueño, y territorio en que se han recogido gran número de moscas del género "Glossina"

Focos dudosos de enfermedad del sueño.

Casos de tripanosomiasis humana personalmente observados por la Comisión.

sión y posee además una finca de cacao en aquel territorio, nos comunicaron datos de interés acerca de algunos casos de probable tripanosomiasis observados en los últimos tiempos, especialmente en las cercanías de Boloco, en la finca de la Viuda de Vivour, cuyo personal indígena, muy reducido ahora, había sído numerosísimo antes y había proporcionado gran contingente de enfermos.

A las diez de la mañana del día 30 de Junio llegamos á bordo del *Annobon*, y después de haber dado la vuelta á la isla, al sitio llamado Concepción. La casa-cuartel de la guardia colonial, baja, á pocos metros sobre el nivel del mar, y un centenar de metros más arriba, la casa-factoría de la Compañía Trasatlántica, habitada por un empleado europeo que está al frente de la finca, constituyen la totalidad de las viviendas allí reunidas, con los pequeños grupos de chozas de los *bubi*. En lo alto del monte, á dos horas de camino desde la playa, se halla emplazada la hermosa casa de los Misioneros de Concepción.

En la finca de la Compañía Trasatlántica, y gracias á la inteligente cooperación y exquisita amabilidad del Sr. D. Ramón Mazo, Gerente de dicha Compañía en Fernando Póo, pudimos examinar con detenimiento 23 trabajadores indígenas, en su mayoría procedentes de Monrovia (República de Liberia) ó de otros puntos de la costa de la Guinea continental, y sólo algunos pertenecientes á la raza bubi, propia de Fernando Póo. De todos ellos se llevó á cabo el examen hematológico. Con el auxilio del sargento de la Guardia civil colonial, Sr. Moreno Carretero, y de sus dependientes, fueron capturadas en gran número, en aquellas localidades, las moscas del género «Glossina», que los naturales indican con el nombre típico de SINKI SOTTE ó, literalmente, «mosca grande», y cuya picadura temen como venenosa.

El día 1.° de Julio, en la Casa Misión, que, como he dicho, dista cerca de dos horas de camino de la playa, y se halla muy elevada sobre el nivel del mar, fueron observados seis

enfermos, uno de ellos (*Lepa*, de diez y ocho años) atacado desde hace tiempo de la enfermedad del sueño. El Superior de la Misión nos prodigó atenciones que vivamente le agradecemos.

El camino que conduce desde la Misión de Concepción al llamado Valle de Moka, en el centro de la isla, sube entre bosques espesos, ricos en lianas y constituídos por enormes representantes de todas las especies tropicales. El transporte de la carga por aquellos senderos — especialmente el de una carga delicada como la que constituía nuestro material de laboratorio, aunque reducido á la menor expresión — resulta pesado y difícil. Dos caballos y dos asnos, de los poquísimos que existen en la isla, y que la Compañía Trasatlántica procura introducir en su potrero de Moka, hicieron á los cuatro expedicionarios — puesto que el Sr. Mazo nos acompañaba en la excursión — más llevadera la cuesta y más breve el camino.

Desde el día 2 al día 7 de Julio permaneció la Comisión en Moka, en la casa de dicho potrero de la Transatlántica, á 1.000 metros sobre el nivel del mar, y casi en el centro de la isla. Desgraciadamente, tuvimos en aquellos días lluvias continuas y torrenciales, que nos impidieron realizar gran parte de nuestro programa, A pesar de ello, pudimos darnos cuenta de las excepcionales condiciones que reune el llamado «Valle de Moka» para la vida del europeo y para la cría de ganado vacuno y caballar, á la cual dedica el señor Bengoa todos sus desvelos y su actividad. En Moka se llevaron á cabo interesantes observaciones hematológicas y parasitológicas sobre diferentes especies de aves y de animales domésticos; se recogieron y determinaron algunas especies de Culicidos de la localidad, y se vieron algunos indígenas, entre ellos el jefe bubi ó Botuko *Malabo*, enfermo de un flemón voluminoso por caries dentaria.

El día 7 de Julio, á las once de la mañana, nos separamos del Sr. Mazo, y por una senda apenas practicable nos diri-

gimos hacia Musola, en la vertiente oriental de la cadena central de la isla. Llegamos á las cinco y media de la tarde. En la Misión de Musola, durante la mañana del día 8, fueron observados y sometidos á examen de la sangre 11 enfermos. Aquella misma noche, con seis horas de marcha, llegamos á San Carlos.

Los días 9 y 10 de Julio fueron allí dedicados á reunir cuantos datos estaban á nuestro alcance acerca de la existencia de tripanosomiasis humana en aquella localidad. Tuve entonces las noticias que más adelante se refieren acerca de los casos de enfermedad del sueño observados por el encargado de la finca de D. B. Roig, Sr. D. Emilio Sirvén.

En el Hospital de San Carlos tuvimos ocasión de examinar en aquellos dos días 12 enfermos. Uno de éstos, *Camachindo*, según toda probabilidad tripanosomiásico antiguo, caquéctico, falleció pocos días después, el 15, y el médico de San Carlos Sr. Tort, con el practicante Sr. Quella, ejecutaron la autopsia del cadáver y nos remitieron á Santa Isabel las piezas anatomopatológicas de mayor interés, convenientemente acondicionadas.

El día 10 por la noche, á bordo del vapor *Corisco*, salió para Santa Isabel el Dr. Illera, pasando por Concepción con objeto de recoger en esta localidad algunos ejemplares de *Glossina*. A las cinco de la mañana del día siguiente, el que escribe, acompañado por el auxiliar de la Comisión Sr. Ramón y Cajal, y por el Agente de la Casa Moritz Sr. Bubeck, se dirigió en una ballenera á la pequeña isla de Loros, y después, en la lancha de vapor *Ena*, de la casa Wilson, á Santa Isabel.

Nuevamente permaneció la Comisión en la capital de la Colonia desde el día 12 hasta el 18 de Julio. En estos días fueron examinados otros 18 enfermos, entre ellos el soldado indígena (senegalés) *Domingo Deché*, perteneciente á la guardia colonial, tripanosomiásico (v. II, caso núm. VI), que fué sometido más tarde á tratamiento con Atoxil, y que, en

Greenwich.
14º 9º Est. de Paris
ALEMANA DEL
ERUN
ITEMBO
Cataratas
Límite Norte de la Colonia
española.
Matamalcu
2º

virtud de permiso concedido por el Sr. Gobernador, nos acompañó durante toda la expedición, y se halla actualmente en Madrid, en el Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII.

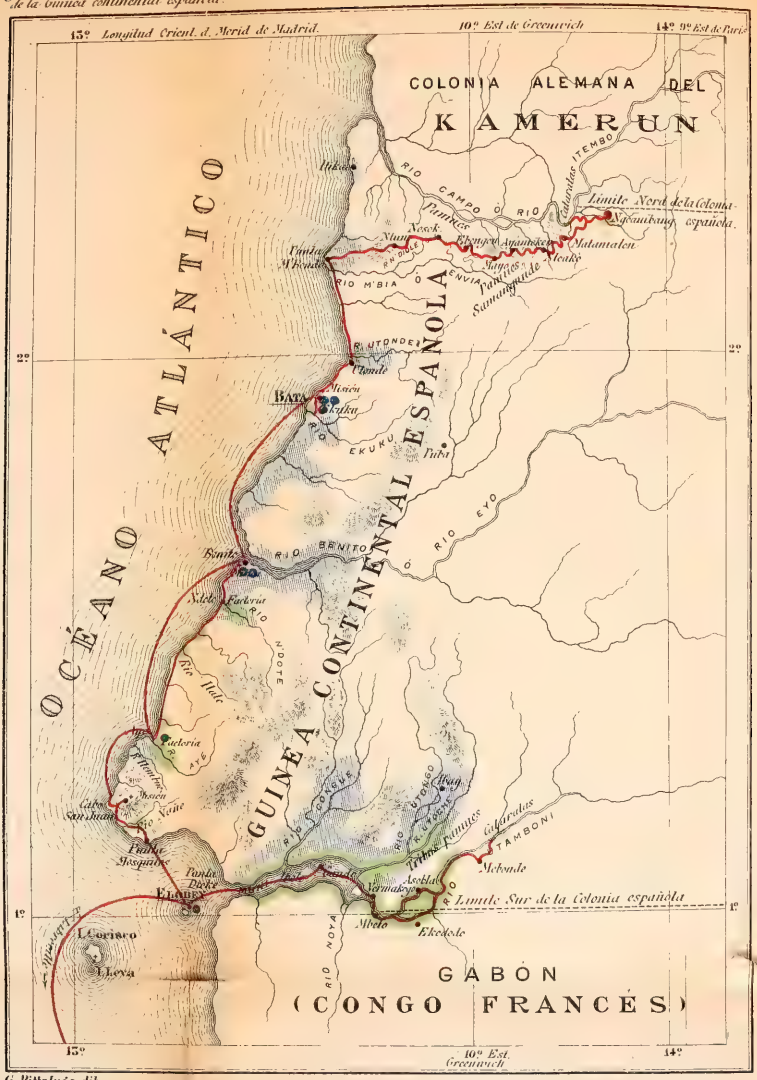
Preparado el material necesario, salió la Comisión de Santa Isabel el día 18 de Julio á bordo del vapor *Annobon* para el continente, dirigiéndose ante todo á la isla de Elobey, capital del distrito correspondiente.

Recibidos en Elobey con inmerecidos honores y con extremada amabilidad por el Subgobernador D. Manuel Arenzana, quedamos en la pequeña isla hasta el día 25 hospedados en la Casa de la Compañía Trasatlántica, y acompañados por el Sr. Bengoa, que ya no se separó de nosotros hasta el día 22 de Agosto, en Bata.

En Elobey fueron examinados en esos días siete enfermos, entre ellos dos importantes casos de elefantiasis, y uno, el soldado indígena N'Bá, procedente del Río Muni, atacado de enfermedad del sueño desde hace tiempo; afianzado el diagnóstico con el hallazgo de numerosos tripanosomas en repetidos exámenes de la sangre, se llevaron á cabo inoculaciones en conejos, conejos de Indias y un mono, que dió á los ocho días una reacción febril intensa (39°,9) y presentó luego tripanosomas en la sangre.

El día 25 de Julio, en la ballenera de la Trasatlántica, emprendimos el viaje por el Muni, dirigiéndonos ante todo á la factoría de Wermakogo, en el Río Utamboni. De allí, por M'Beto (puesto francés que obliga á pequeñas operaciones de aduana), subiendo el Río por Abenilang, llegamos el día 28 por la tarde al pueblo pamue de Mebonde. (Véase el mapa de la lámina II, adjunto á este informe.)

En Mebonde permanecimos seis días, saliendo el 4 de Agosto, á las doce y media, en viaje de regreso para Mbung, sitio en que está emplazada una de las factorías de la Casa Woermann. Durante nuestra estancia en Mebonde fueron hechas observaciones de gran interés; se llevó á cabo el



O. Pittaluga dib.

Escala de 1: 1.000.000.

Itinerario seguido por la Comisión del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII enviada por el Ministerio de Estado.

Localidades en que se han encontrado moscas del género "Glossina"

Zonas invadidas por la enfermedad del sueño.

Casos de tripanosomiasis humana personalmente observados por la Comisión.

LIT. J. BLASS

examen de la sangre de 17 indígenas; mayor número de enfermos fué observado y curado por llagas, úlceras, heridas ó lesiones, de tratamiento quirúrgico en general; se dió principio á una investigación metódica de los parásitos intestinales con el examen de las deposiciones.

Allí tuvimos una invasión de *Phlebotomus (Phl. pappatasii),* pequeñísimos dipteros hematófagos que se conocen generalmente, entre los colonos españoles, con el nombre de *gegen.* Durante todo el recorrido del Río Utamboni fueron capturadas en gran número, en la misma embarcación y en las orillas, las moscas del género *Glossina.*

De los remadores indígenas que prestaban servicio en la ballenera algunos cayeron enfermos de fiebres palúdicas, graves, durante el viaje. El mismo Sr. Bengoa, que no observaba con la absoluta severidad, por nosotros adoptada, las reglas profilácticas, fué atacado de fiebres tercianas.

Huevos y larvas de Anquilostomas, con gran número de otros parásitos intestinales, fueron encontrados en las deposiciones de algunos enfermos indígenas.

En la factoría de Mbung, en el punto en que se bifurca el Río Utamboni formando dos grandes brazos, pasamos la noche del 4 al 5 de Agosto, recibidos con exquisita cortesía por los agentes de la casa Woermann Sres. Schumäcker y Droëge, los dos víctimas antiguas de la infección palúdica. El Sr. Schumäcker había tenido pocos meses antes (en Febrero) una grave hemoglobinúrica *(Schwarzwasser-fieber)*; el señor Droëge salía entonces de un ataque de paludismo que se le había presentado de repente, en la noche del 1 al 2, mientras estábamos en Mebonde. Los dos fueron sometidos á examen de la sangre. Igualmente fueron examinados, en la factoría, cinco trabajadores indígenas.

El día 5, en dos cayucos ó piraguas, por el brazo más pequeño del Río Utamboni, nos dirigimos al puesto de Asoblá, en que residen de ordinario un teniente, un sargento y dos cabos europeos de la Guardia Colonial, con veinte ó treinta

soldados indígenas. Es, actualmente, el último puesto guarnecido en la región del Muni. En la casa-cuartel, que se halla inmediatamente sobre el río, en la misma orilla, fueron examinados cinco indígenas, entre ellos un disentérico que presentaba en gran número amibas, correspondientes á *Entamaeba histolítica* (SCHAUDINN), en las deposiciones.

Tuve, también, ocasión de llevar á cabo el examen hematológico de algunos ejemplares de aves *(Cypselus*, etc.) y de algunos perros. En éstos se hallaron (dos casos) embriones hemáticos de *Filaria immitis;* en aquéllos (100 por 100) *Haemoproteus* y formas de tripanosomas, probablemente ligadas con el ciclo evolutivo de este parásito; y en un caso una microfilaria.

El día 6 estábamos de vuelta en Wermakogo, después de haber visitado el puesto de Kangañe, en cuya casa-cuartel residen, generalmente, dos cabos de la Guardia Colonial (europeos) y un practicante (D. P. Mantecón) que enfermó gravemente poco tiempo después.

En la factoría que la Compañía Trasatlántica posee en Wermakogo, fué observado, con detenimiento, un caso típico de disentería, enfermedad endémica en el territorio del estuario del Muni y de sus afluentes. Se hallaron en gran número las características amibas en el examen de las deyecciones. Fueron hechas, oportunamente, las siembras para aislar, á ser posible, las especies bactéricas de la flora intestinal en busca del B. de Shiga. Fueron sometidos, además, al examen hematológico, dos indígenas y un empleado europeo de la factoría, el Sr. Costa.

Examinando la sangre de algunos pájaros, encontré nuevamente la misma microfilaria hallada en Asobla y pude estudiarla con mayor detenimiento. Fueron capturadas en Wermakogo numerosas Glossinas, y reunidos interesantes datos acerca de la enfermedad del sueño (que los indígenas de la localidad llaman *Uyó)* y de algunos casos procedentes del pueblo de Ibay, en el alto Rio Utongo (véase el mapa).

Los pamues, de la cuenca del Muni, indican las moscas del género Glossina con el nombre de *bi-lú,* y las distinguen de los tábanos y de las *Stomoxys,* que llaman *mi-ló.*

El día 7 de Agosto salimos de Wermakogo, y, pasada la noche en la casa-cuartel de la Guardia colonial en la Isla N'Gande, llegamos de regreso á Elobey el día 8 por la noche. Los días del 8 al 13, en Elobey fueron ocupados en ordenar el material y los datos traídos de la excursión al Muni, en acondicionar el material bacteriológico haciendo los pases oportunos, y en llevar á cabo la autopsia del cadáver del tripanosomiásico N'Bà, fallecido el día 11 en el Hospital. Un nuevo caso de elefantiasis (enfermo N'beñe, del Río Utoche) fué examinado el día 12.

El 13, á bordo del vapor *Corisco,* que con gran amabilidad puso á nuestra disposición el señor gobernador general, fué la Comisión á Libreville, en el Congo francés, con objeto de visitar aquel Hospital. Me es grato recordar á este propósito las atenciones recibidas del señor gobernador de Libreville Mr. Rognon, del secretario general Mr. Le Merle de Beaufond y de los médicos del servicio colonial de Libreville.

De vuelta á Elobey el día 14 por la noche, salimos el 15 en la ballenera de la Compañía Transatlántica, acompañados por el Sr. Bengoa, con dirección á Punta Mosquitos y con el propósito de visitar los puntos más importantes de la costa hasta la capital del distrito de Bata.

Llámase comúnmente Punta Mosquitos el promontorio en que quiso emplazarse hace dos años, trasladándola de la isla de Elobey, la capital del distrito (ó subgobierno) que corresponde á la parte meridional de la Guinea continental española. El nombre es harto demostrativo. A pesar de ello, las noticias que nos proporcionó el sargento Rollón, jefe del puesto militar de Punta Mosquitos en aquella fecha, acerca de la salud de sus subordinados (europeos é indígenas), no fueron del todo malas. En Punta Mosquitos se recogieron

(como en todos los puntos por nosotros visitados) ejemplares de Culícidos *(Anophelinae* y *Culicinae)* y de otros Dípteros; pero no se examinaron enfermos.

A través de un bosque, rico en lianas del caucho, y con una marcha que duró desde las doce de la mañana hasta las diez de la noche, alcanzamos á esta hora del mismo día 15 la Misión del Cabo de San Juan. El camino por el bosque entre Punta Mosquitos y Cabo de San Juan, se aleja mucho de la playa y atraviesa el río Iñañe ó Ñañe, que hay que recorrer luego en cayuco hacia el mar. En este trayecto sobre el río fueron halladas en gran número las moscas del género *Glossina.*

La Misión del Cabo de San Juan—refugio natural del viajero—está emplazada en lo alto de un cerro—cerca de 200 metros sobre el nivel del mar. Un pequeño *Decauville* llega desde la playa hasta la Casa-Misión. Recibidos con gran cariño por los Padres Misioneros, permanecimos en este lugar todo el día 16 y parte del 17. Fueron sometidos allí á examen clínico y hematológico 41 individuos indígenas y dos europeos; de muchos entre ellos se llevó á cabo también el examen microscópico de las deyecciones.

El 18 de Agosto estábamos en la desembocadura del Río Aye, que yo remonté durante algunas horas en cayuco, encontrando numerosas Glossinas, que los indígenas, habitantes de los míseros pueblos de la orilla del río, indican con el nombre de «*nbole*», y acerca de las cuales, y de sus costumbres y de su frecuencia, pudimos recoger interesantes noticias de viva voz de algunos de ellos, inconscientes observadores, cuyas enseñanzas no hay que desperdiciar. Igualmente, el hijo del jefe Mangamayo, del pueblo de Acuznam Angamayo, nos proporcionó datos de importancia acerca de la enfermedad del sueño en la comarca y nos indicó el caso de un enfermo del pueblo de Aierheni, en Río Benito, de nombre Onjaga, atacado desde hace tiempo por la enfermedad.

En la factoría de Río Aye (18 Agosto) fueron observados

cinco enfermos, entre ellos uno—Biong, de treinta años, del pueblo de Igeni, bujeba—tripanosomiásico y con los síntomas clínicos típicos de la enfermedad del sueño.

Parte por mar, parte siguiendo por tierra la costa, y pasando por numerosos pueblos balangues y combes, llegamos por la noche á Río Benito. Era mi intención remontar el Río hasta las cataratas; y este propósito obedecía también al deseo de visitar algunos pueblos emplazados, al parecer, según todos los datos reunidos, en una zona muy intensamente invadida por la enfermedad del sueño. Sin embargo, no nos fué posible llevar á cabo esta parte del programa porque las tribus pamues del interior, á pocos kilómetros ya de la costa, se hallaban precisamente en aquel momento en ruda guerra, y las autoridades locales creyeron oportuno y prudente aconsejarnos con insistencia para que renunciáramos al proyecto.

En la Misión de Río Benito fueron examinados el 19 y el 20 de Agosto 32 indígenas y cuatro europeos; entre los primeros se presentaron dos muchachos gravemente enfermos, tripanosomiásicos, uno de los cuales, Manuel Marocue, nos acompañó luego para ser sometido á observación metódica y tratamiento en el Hospital de Bata.

Desde el día 21 hasta el 30 de Agosto permaneció la Comisión en Bata. Me es muy grato testimoniar aquí nuestro vivo agradecimiento hacia el dignísimo Subgobernador de Bata,D. Narciso Aleñá, que nos auxilió con todos los medios, y hacia nuestro distinguido compañero D. Cesáreo Barco, Médico de aquel Hospital, cuya cooperación recordamos con verdadera complacencia.

Gran parte del tiempo fué empleado, durante esta primera etapa en Bata, en ordenar y reorganizar el material y los datos recogidos en el viaje por la costa; luego en preparar la expedición al Norte, que exigía nuevos medios, gran número de cargadores y repuesto de víveres y de material. Fué hecho en aquellos días un examen metódico de la sangre,

con repetidos recuentos de glóbulos, de los enfermos (tripanosomiásicos) Domingo Deché y Manuel Marocue; datos de interés acerca de la enfermedad del sueño nos proporcionaron el médico Dr. Barco y muy particularmente el Padre Domingo Ferré, Superior de la Misión de Bata, quien, en veintitrés años de residencia en el país, cree haber visto, en el territorio comprendido entre el Río Benito, al Sur, y el Río Campo, al Norte, cerca de veinticinco casos de tripanosomiasis humana; en la misma Misión se llevó á cabo, el día 28, el examen microscópico de las deposiciones de buen número de niños indígenas, comprendidos entre los siete y los diez y seis años de edad; por fin, el que suscribe y el auxiliar Sr. Ramón hicieron una excursión al pueblo de Ekuku, sobre el Rio del mismo nombre, y allí observaron dos nuevos casos de tripanosomiásicos, uno de los cuales, Ibendjele, de veintitrés años, fué tenido en observación, algunos días, en el Hospital de Bata.

En conjunto fueron examinados, durante estos días, treinta y tres enfermos indígenas.

El día 30 se puso en marcha, con dirección al Norte, la expedición preparada en aquellos días, y compuesta de ochenta cargadores indígenas con el material de laboratorio, víveres, objetos de cambio, etc., dos capataces y tres criados indígenas y los tres blancos que componíamos la Comisión.

La expedición pernoctó en Utonde el día 30 al 31 de Agosto, y recorriendo el litoral, llegó á Punta M'Bonda á las tres y media de la tarde del 31. En este punto fueron examinados, del 1 al 4 de Septiembre, veintiún indigenas. Ejemplares de *Glossina* (probablemente *Gl. palpalis)* fueron encontrados cerca de la playa, en sitio próximo á la desembocadura del Rio Envía ó N'Bía.

El 4 de Septiembre, á las once de la mañana, acompañados por el hijo del jefe indígena de Punta M'Bonda, James Malonga, que nos sirvió de guía, emprendimos la marcha para el interior, dirigiéndonos por el bosque al Rio Campo.

Esta excursión, la más importante de la campaña por las dificultades materiales del viaje, duró quince días. Pasando por los pueblos de *Mekala, Ndsueman, Ebuleman, Ñ'koo, Malen, Belon, Nbema, Edundje* y *Fulatchit* (que no se hallan indicados en el mapa 1 : 1.000.000 adjunto á este Informe) llegamos por la noche al pueblo de *Tum*. Fueron aquí examinados siete enfermos.

El día 5, bordeando y vadeando muchas veces el Río Diole, con tiempo cubierto, y siempre á través del bosque, llegamos á *Losok* ó *Nösok* y más tarde á *Ebengon* (á cerca de 250 metros sobre el nivel del mar), donde pernoctamos con la molestia de una invasión de *Phlebotomus*.

Del 6 al 8 descansó la expedición en *Mayó*, y allí recíbimos la visita del jefe de la tribu de Pamues Samangundes, Mangebekada, que habita el pueblo de *Ndelefut*, y que nos expuso largas quejas á propósito de las frecuentes incursiones que los agentes comerciales de algunas casas alemanas del territorio colindante del Kamerun hacen en la comarca ocupada por la tribu, en la orilla izquierda del Río Campo ó Río Itembo, en pleno territorio español.

Estas quejas y la exposición de recientes hazañas cometidas por algunos cazadores de elefantes, procedentes de la orilla derecha del Río Campo, en las proximidades de los pueblos por nosotros recorridos hasta Ngoambang, fueron confirmadas después por los jefes de los pueblos de Ayamekén, Mbise y otros.

Fueron examinados en Mayó siete enfermos. Se capturaron numerosas *Stegomyia*, y en el próximo Río Otomayan algunas Glossinas. Sin embargo, indígenas y jefes de Mayó negaron la existencia de la enfermedad del sueño en este territorio y no supieron darnos indicación alguna acerca de ella.

Por los pueblos de *Mbise* y de *Ayamekén* llegamos el día 8 por la noche al de *Ntohakok*. Aquí fueron vistos ocho enfermos. Vinieron á saludarnos los jefes de las tribus Sam-

bira, Nkó y Anvené. Una lluvia torrencial, indicio cierto del comienzo de la época de lluvias, nos sorprendió el día 9.

Los días 10 y 11 en *Matamalón* (ó *Matalamalón)* tuvimos ocasión de observar con detenimiento un caso de lepra maculosa y recoger datos interesantes acerca de la difusión de esta enfermedad en la comarca circunstante, confirmados en los días siguientes en Nguambang, pueblo inmediato á la frontera del Kamerun alemán.

Pasamos en Ngoambang los días 12 y 13; fueron examinados en estas fechas 17 indígenas; las investigaciones hechas para averiguar la existencia de la enfermedad del sueño en la cuenca del Río Campo resultaron completamente negativas; á pesar de ello, se encontraron cerca de Ngoambang, en la maleza á lo largo del Río Mokúa, algunas Glossinas; fueron observados dos ó tres casos de lepra.

El 14 de Septiembre, guiados por el indígena Mangomanvono, jefe del pueblo de Ngoambang I°, alcanzamos por una senda de elefantes el Río Campo ó Río Itembo á la altura de las segundas cataratas. Allí fueron capturadas también algunas Glossinas.

Durante el regreso, que emprendimos en la noche del mismo día 14, aguas torrenciales no dejaron un momento de caer, transformando en charcos y arroyos el terreno y los senderos del bosque. Desde *Matamalón* hasta punta M'Bonda, entre el 14 y el 18 de Septiembre, en los pueblos de *Matamalón* y *Mbise*, fueron examinados 12 nuevos enfermos, particularmente algunos leprosos, y dos casos de Framboesia trópica (ó «pian»). En el pueblo de Mbise nos encontramos con el cabo del puesto mlilitar de Punta M'Bonda, D. J. Morales, que, con algunos guardias indígenas, había venido á nuestro encuentro.

A nuestra llegada en Punta M'Bonda — desastrosa por la lluvia insistente — tuvimos la suerte de encontrar allí reunidos al Subgobernador de Bata, Sr. Aleñá, y al Teniente Coronel, Jefe de la Guardia Colonial, D. Julio Pantoja, de paso

el uno para Itika, y el otro para la desembocadura del Río Campo.

Dejamos Punta M'Bonda el día 20, y habiendo pernoctado en Utonde, llegamos de regreso á Bata el 21 de Septiembre, y allí forzosamente tuvimos que permanecer hasta el día 6 del siguiente mes de Octubre. En esta fecha embarcamos á bordo del vapor *Corisco* con rumbo á Santa Isabel. Durante las dos semanas de permanencia en Bata se examinaron nuevamente los enfermos tripanosomiásicos procedentes de Ekuku; repetidamente se llevó á cabo el recuento de hematies y leucocitos en los mismos, y se hicieron cuatro nuevas observaciones, entre ellas una en un blanco; se renovaron los pases de las siembras de cultivos bactéricos, y se reorganizó el material recogido durante la expedición, llevándose á cabo además el examen y estudio de un hemoparásito (*Haemogregarina* ?) de unas tortugas, de especie todavía indeterminada.

Desde Santa Isabel, á los pocos días, el Dr. Illera y el Sr. Ramón, con el Veterinario del servicio Colonial, D. Juan Bravo — cuya actividad merece sienceras alabanzas —, volvieron á la isla de Elobey con objeto de recoger algunos animales de experimentación inoculados con *Trypanosoma gambiense* durante nuestra estancia en la isla en el mes de Agosto.

En aquellos días, el que suscribe se ocupó en disponer y organizar el material del nuevo laboratorio, procedente de la Casa Lautenschlaeger, de Berlín, y adquirirlo por cuenta del Ministerio de Estado.

Algunos enfermos nuevos, en conjunto 15, y cinco blancos, fueron examinados en aquel último periodo de nuestra campaña; y el día 9 de Octubre hubo que llevar á cabo la autopsia de un nuevo caso, clínicamente diagnosticado de enfermedad del sueño, del soldado indígena Oke, de Lagos.

El día 25 de Octubre, cumplida nuestra misión, empren-

dimos el viaje de regreso á España á bordo del vapor *San Francisco*, que el 11 de Noviembre ancló en el puerto de Cádiz.

En resumen: han sido observadas clínicamente durante nuestra expedición **373** personas; de ellas, **339** indígenas y **34** blancos, en su mayoría españoles.

De estos **373** enfermos, **322** fueron sometidos al examen de la sangre, en muchos de ellos repetidos varias veces. Los **34** europeos van incluídos en este grupo.

De los **288** indígenas sometidos al examen hematológico, aproximadamente el 92 por 100 presentó Microfilarias (embriones de *Filaria perstans* y de *Filaria loa* en su mayoría) en la sangre periférica. Algunos presentaron formas de Microfilarias de diagnóstico muy incierto y que merecieron al que suscribe atento estudio.

De los europeos *dos* solamente dieron resultado positivo (con embriones de *Filaria loa* en la sangre periférica).

En gran número fueron observados los casos de infección palúdica con hallazgo de parásitos, casi siempre de formas tropicales *(Laverania)* en la sangre periférica.

II

«Trypanosoma gambiense» y enfermedad del sueño en la Colonia.

Las primeras noticias acerca del probable origen de algunos casos de «enfermedad del sueño» observados en la isla de Fernando Póo fueron recogidas, como se ha dicho, en Santa Isabel, y nos las proporcionaron por un lado nuestros compañeros del Hospital María Cristina; por otro los Padres Misioneros, conocedores *ab antiquo* de la isla; y algunos particulares.

En los estados demostrativos de la estadística sanitaria de los Hospitales de Santa Isabel y de San Carlos, que publica periódicamente el *Boletín oficial de los territorios españoles del Golfo de Guinea,* se encuentran apuntados durante estos últimos años no pocos casos de enfermedad del sueño, algunos como dudosos, otros con diagnóstico cierto. Limitándonos á las estadísticas publicadas en 1909, aparecen en el artículo 180 del *Nomenclator,* en el capítulo de las «Enfermedades mal definidas»:

En Enero: (Hospital María Cristína, en Santa Isabel) *un caso,* fallecido.

En Febrero: (Idem íd. íd.) *un caso.*

En Marzo: (Idem íd. íd.) el mismo caso, fallecido.

En Abril: (Idem íd. íd.) *un caso,* fallecido.

Otros casos fueron observados durante los años anteriores. El Dr. Rocafort recuerda el de un portugués, Garabito de apellido, de la provincia de Veira baixa, de veinticuatro años, el cual vino á Fernando Póo, procedente de la isla del Príncipe, en el mes de Junio de 1908, y permaneció en Santa Isabel dos meses, prestando servicio, cuando su salud se lo permitía, en la casa de Comercio de Monteiro y Compañía. Se marchó en Agosto del mismo año, nuevamente con dirección á la isla del Príncípe, y de allí fué á Lisboa. Falleció, á consecuencia de la infección tripanosomiásica, en el Hospital Colonial de aquella ciudad.

Los médicos del servicio Colonial no disponían, sin embargo, hasta ahora, del material y de los medios suficientes para llevar á cabo el examen microscópico de la sangre, única investigación que puede proporcionar la absoluta certidumbre del diagnóstico y la definitiva comprobación del examen clínico. De estos medios dispondrá en lo sucesivo, puesto que ha quedado instalado, en Santa Isabel, un Laboratorio con material *ad hoc* que, sin duda alguna, podrá prestar grandes servicios á la ciencia y al país.

Ya en 27 de Diciembre de 1908, el Excmo. Sr. Goberna-

dor general D. José Centaño había publicado una Orden circular (1), referente á la enfermedad del sueño, recordando *varios casos ocurridos de antiguo, aunque de tarde en tarde, en la Colonia, especialmente en la parte oriental de esta Isla* (de Fernando Póo).

En los días de nuestra llegada á Santa Isabel se hallaba en el Hospital María Cristina una niña, María, natural de Concepción y procedente de aquel punto, de cuya observación se da cuenta más adelante (caso núm. 1.°) y que sin duda alguna contrajo la enfermedad en Concepción.

Los Misioneros, que sienten directamente todo el daño y el perjuicio que les proporciona la grave endemia para el desarrollo de su casa y Colonia en dicha parte de la isla, afirmaban que numerosos casos en un todo parecidos á éste se habían presentado y desarrollado delante de sus ojos en Concepción.

Casos de tripanosomiasis humana se observaron también — algunos de ellos por el Dr. Virto en el Hospital de San Carlos — en *Boloco,* y precisamente en los trabajadores de la finca de la Viuda de Vivour, de cuya dirección está encargado actualmente el Sr. Doughan.

El Sr. D. Emilio Sirvén, de la casa B. Roig, en San Carlos, asegura haber visto desde 1902 *cinco* casos de enfermedad del sueño, y con mayor exactitud recuerda dos casos observados en el año 1908, uno de ellos en Batete. Los dos murieron con el sindrome típico de la enfermedad y con infartos glandulares cervicales muy considerales. Uno de ellos, de veintisiete años, era un «Kruman» de Monrovia (República de Liberia), al servicio de la casa Roig, de nombre *John Paca,* el cual estuvo en San Carlos cuatro años. La enfermedad tuvo, al parecer, un curso clínicamente apreciable de un año. Falleció en Abril de 1908.

---

(1) Publicada en el *Boletín Oficial* de la Colonia del 1.° de Enero de 1909.

La Guardia Colonial, constituída de ndividuos indígenas, procedentes en su mayoría de la Costa continental y de las colonias límitrofes, proporciona un contingente de consideración de enfermos de hipnosis. Mas con estos datos nos hallamos enfrente de una grave dificultad, y es la de deslindar clara y terminantemente aquéllos que deban considerarse como *casos importados*, de aquéllos otros que, sin duda alguna, hayan tenido su origen en la Colonia—y en la isla más especialmente—, que son los solos que nos interesan para establecer el verdadero alcance de la endemia en los territorios españoles del Golfo de Guinea.

Las circunstancias especialísimas en que vive la raza *bubi*, que constituye la población indígena de la isla de Fernando Póo, apartada en su inmensa mayoría de todo trato y comercio con los europeos, dificultan en modo extremo el estudio y la determinación exacta de las condiciones de la endemia de tripanosomiasis en la isla.

Por otra parte, la importación periódica, muy abundante, de braceros del continente, constituye un nuevo factor que altera y perturba el valor de los datos estadísticos. Proceden estos braceros en su mayoría de Monrovia (República de Liberia), de Lagos, de Accrá, algunos del Kamerun y del Gabón (Congo francés), localidades todas que, ya directamente por estar invadidas por la enfermedad, ya indirectamente por hallarse en relación de vecindad con regiones infectadas no ofrecen garantía ninguna, y constituyen, en cambio, un contínuo peligro.

He aquí ahora los casos por nosotros personalmente observados en Fernando Póo:

Caso I.—Niña de diez años, de nombre *María*, bubi; nació en uno de los villorrios de la Bahía de Concepción; se educó desde los cuatro años en la Misión de Concepción, hasta que, ya enferma, fué llevada al Hospital de Santa Isabel, donde actualmente se encuentra. No ha salido nunca de la isla.

Observada por primera vez el 23 de Junio de 1909.

Examen hematológico, 23-VI-909.—*Negativo:* Eosinofilia muy acentuada; 13-VII-909-10 $^1/_2$ m. Preparaciones fijadas, teñidas, met. ROSS-RUGE (observadas posteriormente). *Positivo:* Numerosos embriones de *Filaria ¿perstans?* y algunos individuos de *Trypanosoma gambiense.*

Caso II - *Dongo*, de quince años, natural de Bata (Guinea continental española), desde hace diez meses al servicio del mulato Nicolás Taborda, en la finca Boa Entrada en Basupú (Fernando Póo). Antes de entrar al servicio de Taborda permaneció siempre en Bata. Desde hace tres ó cuatro meses empezó á quejarse de dolores lumbares y debilidad general. El dueño notó entonces que se quedaba dormido con mucha frecuencia y con gran facilidad. Tuvo fiebres altas de corta duración en el primer período de la enfermedad, y una erupción papulo-pustulosa (¿de *Kraw-Kraw?*) en todo el cuerpo. Asegura su dueño que si no se le llama para comer no pide alimento alguno.

Observado por primera vez el 23 de Junio de 1909.

Examen hematológico, 28-VI-909-10 m.—*Positivo: Trypanosoma gambiense* (escasos).

Caso III.—*Felisardo Godiño*, europeo, de Soto la Casa (Beira Baja), Portugal, de veinticinco años, practicante de la finca (ó «Roça») *Sundy* en la isla del Príncipe.

Salió de Portugal en 1904, dirigiéndose á la isla de Santo Tomé; allí quedó durante dos años; sufrió disentería y fué atacado al parecer de una fiebre biliosa hemoglobinúrica que duró diez días y que fué curada con inyecciones de quinina. Al terminar esos dos años se marchó de Santo Tomé á la isla do Principe y allí permaneció cerca de un año, adquiriendo una enfermedad que fué diagnosticada de «enfermedad del sueño» por el médico militar del servicio colonial portugués DR. DAMAS MORA (1). Tenía ya entonces infartos glandulares cervicales. Vivía el enfermo en la misma finca Sundy, infestada por las moscas del género «Glossina» y llena de tripanosomiásicos (2). Fué sometido á tratamiento con atoxil durante pocos días. En Agosto 1907 vino desde Príncipe á Fernando Póo, y aquí permaneció hasta Octubre 1908; en esta fecha se marchó al continente (Río Muni)

---

(1) El DR. DAMAS MORA hizo parte, con el Dr. Correa Mendes, de la Comisión nombrada en 1907 por el Ministerio de la Marina y de las colonias de Lisboa, para el estudio de la enfermedad del sueño en la isla del Príncipe. Véase el *Informe* de dicha Comisión en *Archivos de Higiene é Path. exotic.* Lisboa, 30 Nov. 1909, II, 2

(2) Los médicos de la Comisión portuguesa refieren en su *Informe* ya citado que en esta sola finca *Sundy*, de la parte Norte de la isla, examinaron 148 individuos, y entre ellos encontraron 66 tripanosomiásicos, comprendidos en ellos tres europeos. (Véase pág. 277 del fasc. 2 °, vol. II, 30 Nov. 1909, ya citado, de *Arch. de Hig. é Path. exot.*)

para el comercio del caucho por cuenta de la casa WOERMANN, llegando hasta Asobla. Volvió á Fernando Póo en Abril 1909, y desde entonces vive aquí. Nota gran abatimiento, cansancio fácil, tendencia al sueño. Observado el 27 Junio 1909.

Examen clínico. - Demacración. Infartos gland. linf. muy acentuados en la región cervical, parotidea y mastoidea. Hígado ligeram. hipertrof. Bazo al parecer en condiciones normales. Varicocele. Temperatura normal. Pulso 86.

Examen hematológico, 27-VI-909 (3 tarde) - *Negativo*, 27-VI-909 (9 n.).—*Positivo* (preparac. secas, método ROSS-RUGE): *Trypanosoma gambiense.*

Caso IV. — *Lepa*, de diez y ocho años, de Moka (centro de la isla de Fernando Póo) — bubi — estuvo algún tiempo en la playa de Concepción; en la actualidad se encuentra en la Misión de los Padres, de Concepción. Empezó la enfermedad hace seis meses.

Observado el 1.° de Julio de 1909 en Concepción (Misión).

Examen hematológico, 1-VII-909. — *Positivo: Filaria* (embriones) *¿perstans?* - algunos Tripanosomas.

Caso V. - *Camachindo* — indígena de Bangumá (Sierra Leona), de veinte años, bracero. - Lleva cuatro años y medio en Fernando Póo, en la finca Santa María. - Ingresó el 30 de Junio en el Hospital de San Carlos. Empezó la enfermedad hace cuatro años.

Observada el 8 de Julio de 1909 en San Carlos (Hospital).

Fallecido el 15 de Julio de 1909.

Autopsia en esa misma fecha (cuyos resultados histopatológicos no han sido todavía estudiados).

El *examen hematológico* fué negativo.—No se pudo llevar á cabo el examen del líquido cefalo-raquídeo.

Caso VI. — *Domingo Deché*, de veintinueve años — del Senegal — Guardia Colonial indígena. Ha estado algún tiempo en Concepción. Desde hace seis años en Fernando Póo. Desde hace dos años en Santa Isabel. Ha tenido largos períodos de fiebres intensas. Desde hace un mes acusa gran decaimiento, cansancio, tendencia irresistible al sueño.

Examen clínico.—Infartos glandulares múltiples, cervicales, inguinales, del triángulo de Scarpa.—Hernia inguinal derecha. - Observado el 13 de Julio de 1909.

Examen hematológico, 13-VII-909 á las 10 $^1/_2$ m.—*Positivo*, gran número de Microfilarias *(F. perstans ?)* y *Trypanosoma gambiense.*

El examen hematológico fué repetido muchas veces en este enfermo, que siguió nuestra expedición en todo su recorrido y que se sometió á tratamiento con inyecciones de Atoxil (Adrian) á partir del día 30 de Julio, en Mebonde.

El día 15 de Julio, en Santa Isabel, le fueron extraídos 10 cent. cub. de sangre de la vena cefálica del brazo derecho, y con ellos fueron inoculados dos conejos de Indias y una cabra.

Las cuentas de glóbulos (hechas por el Dr. Illera) dieron:

22-VII -909	(Elobey)	=R 3.480.000;	B. 10.000	p. milím.	cub.
24-VII -909	(íd.)	=R. 2.808.000;	B. 7.200	íd.	íd.
3-VIII 909	(Melonde)	=R. 2.648.000;	B. 7.200	íd.	íd.
23-VIII-909	(Bata)	=R. 2.974.800;	B. 12.160	íd.	íd.
23-IX -909	(Bata)	=R. 2.750.000;	B. 9.520	íd.	íd.

El enfermo, muy mejorado, se halla actualmente en Madrid.

Caso VII. - *Oké*, soldado indígena de la Guardia Colonial, de Lagos, desde hace tres años en Fernando Póo; vivió mucho tiempo en San Carlos, luego en Santa Isabel. Notó el principio de su enfermedad en San Carlos, hace seis ú ocho meses. Ingresó el 18 de Septiembre de 1909 en el Hospital de Santa Isabel, con el sindrome clínico típico de la enfermedad del sueño. Falleció el 8 de Octubre, y fué practicada la autopsia por el Sr. Pabalán y por nuestro auxiliar Sr. Ramón y Cajal, recogiéndose el material anatomo-patológico, que está sometido á estudio.

(Continuará.)

XXII.—Neurópteros de los alrededores de Madrid.

Suplemento I (1)

Por el R. P. Longinos Navás, S. J.

Este Suplemento se ciñe exclusivamente al estudio de una colección de Neurópteros formada por D. Jorge Lauffer, siendo casi todos cogidos por él mismo en el Escorial ó en otros puntos de la provincia de Madrid.

He creído que era útil dar noticia de su contenido, porque si bien no pocas formas se habían citado por mí como de Madrid ó sus alrededores, casi ninguna del Escorial, localidad por demás clásica de esta provincia, y además otras son nuevas para la región central de España, algunas para España misma y otras en absoluto para la ciencia.

Con esta colección, muy numerosa y rica para ser de quien no se dedica especialmente á Neurópteros, se acrecienta notablemente nuestro conocimiento de la fauna central de la Península, tanto que, si en cada región de ella ó en cada provincia hubiese un entomólogo de la actividad y constancia del Sr. Lauffer, podríamos augurar en breve un conocimiento completo, en lo que cabe, de la fauna neuropterológica de nuestra patria.

Muy agradecido estoy al Sr. Lauffer por haberme proporcionado el placer de estudiar su colección, y no menos por

---

(1) Véase mi Catálogo descriptivo de los Insectos Neurópteros de los alrededores de Madrid. Revista de la Real Academia de Ciencias de Madrid. Mayo, 1905.

la generosidad con que me permitió incorporar á la mía todos aquellos ejemplares que me fuesen útiles.

Para dar idea de lo nuevo que se consigna en este Suplemento, señalaré con * las formas no citadas de la provincia de Madrid en mi Catálogo descriptivo de los Neurópteros de esta provincia ni en mi Catálogo posterior, Neurópreros de España y Portugal (1).

En el orden de la enumeración seguiré el de aquel Catálogo.

Odonatos.

Familia LIBELÚLIDOS:

1. *Libellula depressa* L. Madrid, Escorial.
2. *Sympetrum flaveolum* L. var. *luteola* Sel. Laceana.
3. — *Fonscolombei* Sel. Laceana.

Fam. ÉSNIDOS:

4. *Æschna mixta* Latr. Escorial.
5. *Onychogomphus forcipatus* L. Escorial.

Fam. AGRIÓNIDOS:

6. *Calopteryx virgo* L. Escorial.
7. — *splendens* Harris. Pardo.
8. — *hæmorrhoidalis* Van der Linden. Pardo.
9. *Cercion Lindeni* Sel. Escorial.
10. *Pyrrhosoma nymphula* Sulz. Escorial, Puerto.
11. *Ischnura Graellsi* Rb. Pardo, Escorial, Fuente de la Teja.

Oxinatos.

Fam. EFEMÉRIDOS:

12. *Polymitarcys virgo* Oliv.
13. *Ephemera danica* Müll. Escorial.

---

(1) Neurópteros de España y Portugal. Publicado en «Broteria», San Fiel, 1906, 1907, 1908.

*14. *Bœtis binoculatus* L. Nuevo para Castilla la Nueva.
15. *Ecdyurus fluminum* Pict. Escorial, Pardo.
16. — *venosus* F. Escorial, provincia de Madrid.
*17. — *forcipula* Koll. Provincia de Madrid. Nuevo para Castilla.
18. *Cloeon dipterum* L. Escorial.

Fam. PÉRLIDOS:

**19. PERLODES *(Dictyopteryx)* BICOLOR sp. nov. (figura 1.ª).

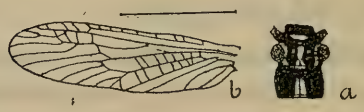


Figura 1.ª

PERLODES BICOLOR Nav.
a Cabeza y protórax. *b* Ala anterior izquierda.

Caput fuscum, fascia semilunari transversa ante ocellum anteriorem, fascia longitudinali pone ipsum, macula obliqua pone oculos flavis sive aurantiacis; callis ante ocellos posteriores nitentibus, nigris; ocellis flavis, in triangulum dispositis, posterioribus multo magis inter se quam ab anteriore et ab oculis distantibus; oculis rufis; antennis fuscis, breviter pilosis.

Prothorax fuscus, transversus, angulis marginibusque rectis; disco suaviter convexo, medio longitudinaliter sulcato; fascia flava posteriore media ultra medium extensa, antice acuta. Meso-et metathorax superne nigri, inferne fusci, macula grandi media flava.

Abdomen superne et inferne aurantiacum, lateraliter fuscum; octavo segmento abdominali in ♀ postice recto; cercis fuscis, pilosis, articulis elongatis.

Pedes fusci, femoribus linea laterali nigra, apice ad genua flavidis.

Alæ hyalinæ, membrana in areis costali et subcostali levissime fusco tincta, reliquum subflavescente in ala anteriore, subfuscescente in posteriore; reticulatione fusca.

Ala anterior costa et subcosta ad basim flavescentibus; ultra finem subcostæ 3-4 venulis in campo apicali, totidem inter radium ejusque sectorem ad apicem, plus minusve irregularibus.

Ala posterior costa in medio basilari pallida, area costali et radiali similiter constructis, seu 3-4 venulis; area media a venulis libera.

Longit. corp	11,5	mm.
— alæ anter..... ...	15	»
— — poster.....	12	»

Patria. Madrid (Selgas).

Por el color del abdomen fácilmente se diferencia de todas las especies de *Perlodes* que conozco.

La reticulación del ala es bastante variable en el número y disposición de las venillas. En el campo radial ya forman celdillas casi rectangulares, á semejanza de la *rectangula*, ya una malla irregular, asemejándose en ello á la *intricata*.

20. *Perla marginata* Panz. Escorial.

*21. *Hemimelœna flaviventris*, Hoffms. Escorial, Fuente de la Teja.

22. *Isoperla grammatica* Scop. Escorial; Fuente de la Teja, Puerto.

23. *Chloroperla torrentium* Pict. Provincia de Madrid, Escorial.

24. *Tœniopteryx Braueri* Klap. Madrid (Selgas).

25. *Nemura variegata* Oliv. Provincia de Madrid.

26. — *lacustris* Ed. Pict. Escorial.

*27. — *humeralis* Pict. Escorial, Fuente de la Teja.

*28. *Leuctra Braueri* Kempny. Escorial. Nueva para Castilla.

Fam. MIRMELEÓNIDOS:

29. *Myrmeleon formicarius* L. Escorial, Fuente de la Teja.

30. — *nemausiensis* Bork. Escorial, Fuente de la Teja.

* * 31. MYRMELEON LAUFFERI sp. nov. (fig. 2.ª)

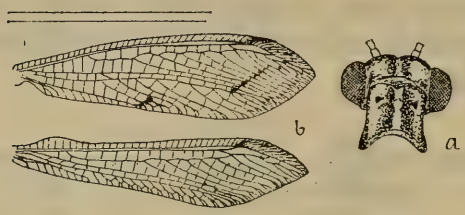


Figura 2.ª

MYRMELEON LAUFFERI Nav.
a Cabeza y protórax. *b* Alas de la derecha.

Fuscus, fulvo mistus, ala anteriore maculata; similis *nemausiensi.*

Caput fulvum, fronte inter antennas fascia transversa lata fusca; clypeo transverse ruguloso, nitente; palpis maxillaribus tenuibus, ultimo articulo fusiformi vix inflato, apice fuscato; palpis labialibus ultimo articulo inflato, fusiformi, externe exigua macula fusca notato, apice acuminato; vertice pone antennas fascia transversa fusca, medio constricta, circum oculos externe angustata et cum frontali continuata; occipite punctis fuscis pallidis series transversas formantibus fuscato; oculis globosis nigris; antennis fuscis, primo articulo inflato, testaceo, antice fusco maculato, secundo articulo transverso, testaceo, externe et interne fusco, clava parum ampliata, inferne concava.

Prothorax fulvus, longior quam latior, dorso minute nigro punctato, fascia longitudinali fusca, diffusa, medio longitudinaliter divisa, ante medium constricta, ad sinum macula fusca; marginibus lateralibus fuscatis; pilis albis raris, ad

latera longis; inferne fulvus. Mesothorax superne fulvus, varie fusco notatus, inferne fuscatus. Metathorax subtotus fuscus.

Abdomen totum fuscum, pilis brevibus albis rarisque.

Pedes fulvi, femoribus tibiisque crebris punctis fuscis notatis; calcaribus in tibia anteriore et intermedia duos primos tarsorum articulos, in posteriore primum superantibus; tarsis albescentibus, apice articulorum fusco, 5.° articulo longo, reliquis quatuor longitudine subæquali; unguibus testaceis, subparallelis, parum arcuatis, arolio angusto, longo, piloso.

Alæ oblongæ, membrana hyalina, iridea, reticulatione fusca fulvo alternatim mista; stigmate interne fusco, externe flavescente.

Ala anterior in tertio apicali lata; area costali ultra stigma paucis venulis, 2-3 transversis inter costales; macula ad anastomosim rami cubiti marginem hauh attingente, stria obliqua margini externo subparallela.

Ala posterior immaculata; area costali ultra stigma nullis venulis tranversis, præter costales ad marginem furcatas, ad basim ampliata, mox angustata, dein venis parallelis; margine externo suaviter excavato.

Longit. corp.	25	mm.
— alæ anter.	26,5	»
— — poster.	26	»

Patria. Escorial.

Es del grupo del *nemausiensis*, al cual se parece en las manchas del ala anterior; pero se ve diferir al momento de esta especie y de otras similares en la carencia de manchas leonadas en el abdomen, además de otros caracteres que ya quedan descritos.

*32. *Formicaleo tetragrammicus* Pall. Escorial, Pardo. Nuevo para Castilla la Nueva.

33. *Myrmecœlurus trigrammus* Pall. Escorial.

34. *Creagris plumbeus* Oliv. Pardo.
35. *Macromemurus appendiculatus* Latr. Escorial.
*36. *Megistopus flavicornis* Rossi. Escorial. Nuevo para Castilla.
*37. *Gymnocnemia variegata* Sclm. Escorial. Nuevo para Castilla. Es la segunda vez que se coge en España.

Fam. Crisópidos:

38. *Chrysopa vulgaris* Schn. Escorial, Fuente de la Teja, Pardo, Cercedilla, etc.
39. — — var. *æquata* Nav. Escorial, Fuente de la Teja, Pardo.
40. — — var. *microcephala* Brau. Escorial.
41. — *flavifrons* Brau. Escorial.
42. — — var. *nigropunctata* Ed. Pict. Escorial.
*43. — *marginalis* Nav. Escorial, Fuente de la Teja. Hasta ahora no se había citado sino de Albarracín.
44. — *lineolata* Mac. Lachl. Escorial.
45. — *septempunctata* Wesm. Escorial.
46. — *formosa* Brau. Rincón.
47. *Chrysopa subcubitalis* Nav. Escorial.
48. — *prasina* Burm. Escorial.
49. — — var. *adspersa* Wesm. Escorial.
50. — *venosa* Ramb. Escorial, Fuente de la Teja.

Fam. Hemeróbidos:

51. *Hemerobius micans* Oliv. Provincia de Madrid, Es-Escorial.
52. — *marginatus* Steph. Escorial, Fuente de la Teja.
53. *Boriomyia subnebulosa* Steph. Escorial.

NIREMBERGE (1) gen. nov.

Similis *Boriomyiæ* et *Hemerobio* et inter utrumque media.

In ala anteríore tres sectores radii, primus cum procubito venula conjunctus; procubitus venulis cum cubito connexus; cubitus cum suo ramo una venula. In ala posteriore sector radii furcatur antequam procubitus. In utraque ala series bina venularum gradatarum.

Conviene con el género *Boriomyia* en la presencia de la venilla entre el primer sector y el procúbito del ala anterior; pero difiere en que en la posterior el sector se ahorquilla mucho antes ó interiormente que el procúbito. En esto último conviene con el género *Hemerobius*, pero difiere en lo primero.

Figura 3.ª
NIREMBERGE LIMPIDA Nav.
Ala anterior derecha.

En la escasez de venillas gradiformes de la serie externa del ala anterior se parece al género *Sympherobius*, mas se aparta en la presencia de ambas series en el ala posterior y en el mayor número de sectores de la anterior.

54.—NIREMBERGE LIMPIDA sp. nov. (fig. 3.ª)

Minor, nigra, alis immaculatis.

Caput nigrum, nitens, vertice fornicato; oculis globosis; antennis nigris, primo articulo grandi, piceo; palpis fuscis, ultimo articulo basi fusiformi, inflato, mucrone elongato.

Prothorax transversus, piceus. Mesonotum nigrum, nitens, lobulo scapulari fornicato. Metanotum piceum, scuto pallidiore.

Abdomen superne subtotum piceum, inferne pallidius, lamina subgenitali longa, convexa, minute fusco punctata, pilosa.

---

(1) Anagrama de Nieremberg. En memoria del V. P. Juan Eusebio Nieremberg, S. J., insigne naturalista del siglo XVII.

Pedes fusco-pallidi, nigro-pilosi, tibiis anterioribus modice incrassatis, intermediis cylindricis, posterioribus fusiformibus; tarsis longis, primo articulo secundo sesquilongiore; unguibus recurvis, divaricatis.

Alæ oblongæ, apice elliptice rodundatæ, membrana hyalina, levissime infumata, immaculata; reticulatione fusco-pallida; toto margine venulis liberis punctiformibus instructæ; stigmate vix sensibili.

Ala anterior area costali angusta, venula recurrente cellulam oblongam liberante, paucis venulis, furcatis, ad regionem stigmalem simplicibus; venulis gradatis $^5/_4$, serie interna inter 2.um et 3.um sectorem interrupta; 3 venulis inter procubitum et cubitum.

Ala posterior (1) sectore radii prope basim furcato, venulis gradatis $^2/_3$.

Longit. corp.	3	mm.
— alæ anter.	4,8	»
— — poster.	4	»

Patria. Cercedilla.

55. *Sympherobius conspersus* Nav. Escorial.

Fam. Diládiros:

56. *Lidar meridionalis* Hag. Escorial, pinares.

Fam. Siálidos:

57. *Sialis fuliginosa* Pict. Provincia de Madrid.

Fam. Rafídidos:

58. *Raphidia xanthostigma* Schum. Provincia de Madrid.
50. — *bætica* Rb. Provincia de Madrid.
60. — *maculicollis* Steph. Escorial.

---

(1) Por rotura de las alas no puedo asegurar el número de venillas, pero parece ser el indicado.

Fam. TERMÍTIDOS:

61. *Calotermes flavicollis* F. Escorial, Pardo.
62. *Termes lucifugus* Rossi. Madrid, Escorial, Fuente de la Teja.

Fam. ÉMBIDOS:

63. *Embia Solieri* Rb. Escorial, Fuente de la Teja.

Fam. PANÓRNIDOS:

64. *Panorpa meridionalis* Ramb. Escorial.

Tricópteros.

Fam. LINMOFÍLIDOS:

*65. *Linmophilus hirsutus* Pict. Escorial, Laceana.
*66. — *ignavus* Hag. Escorial, Nuevo para España.
67. *Mesophylax adspersus* Rb. Madrid (Selgas), Cercedilla.
68. *Micropterna sequax* Mac Lachl. Escorial.
69. — *fissa* Mac Lachl. Cercedilla.

Fam. SERICOSTÓMIDOS:

70. *Sericostoma Selysi* Ed. Pict. Provincia de Madrid, Escorial, Fuente de la Teja.
71. *Schizopelex festiva* Rb. var. *Granjæ* Ed. Pict. Escorial, Fuente de la Teja.

Fam. LEPTOCÉRIDOS:

*72. *Mystacides azurea* L. Escorial.
*73. *Adicella reducta* Mac Lachl. Escorial, Fuente de la Teja.

Fam. HIDROPSÍQUIDOS:

74. *Hidropsyche instabilis* Curt.

75. *Hydropsyche pellucidula* Curt. Provincia de Madrid.
*76. — sp. Sin ver más y mejores ejemplares no me atrevo á decidir.

Fam. SICOMÍIDOS:

77. *Tinodes Vœneri* L. Escorial.

Fam. RIACOFÍLIDOS:

*78. *Rhyacophila contracta* Mac Lachl. Laceana. Nueva para España.

Zaragoza, Colegio del Salvador y Diciembre de 1909.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XVII.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia cuarta..... 281

XVIII.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia quinta..... 306

XIX.—Contribución al análisis del nitro de Chile, por *Juan Fages Virgili*..... 329

XX.—Sobre la isomería de los ácidos estánicos, por *Werner Mecklenburg*..... 338

XXI.—Viaje de estudio á la Guinea española. Observaciones acerca del *Trypanosoma gambiense* y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por *Gustavo Pittaluga*..... 347

XXII.—Neurópteros de los alrededores de Madrid, por el *R. P. Longinos Navás, S. J*..... 370

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 7

(Enero de 1910)

Smithsonian
FEB 1926
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXIII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia sexta.

SEÑORES:

Hemos demostrado la fórmula de Green en las Conferencias anteriores, fórmula que se expresa de este modo:

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}\right) dx\,dy\,dz = \iint_s (F\alpha + G\beta + H\gamma)\, d\sigma,$$

en la que F, G, H son funciones conocidas de x, y, z, ó sea de las coordenadas de cada punto del espacio que consideremos. Estas funciones satisfacen á las condiciones de continuidad y de uniformidad necesarias para que la integral triple ó de volumen no caiga en ningún caso de excepción, y tenga, por lo tanto, un sentido preciso y un valor determinado.

Además, F, G, H, que son tres funciones escalares, ó de otro modo, funciones de punto, es decir, magnitudes correspondientes al punto x, y, z, se consideran como las componentes de un vector, el cual quedará perfectamente determinado para cada punto del volumen en magnitud y en dirección y también en sentido.

De manera que para cada punto del volumen habrá un vector determinado por el que se determinan sus tres componentes F, G, H, y en este sentido podremos decir que la integral triple del primer miembro es una integral de vectores.

Para cada uno y para todos los puntos *a, b, c, d*..... del volumen *V* habrá un vector, como se representa en la figura 16, definido cada uno por sus tres componentes *F, G, H,* en los valores de las cuales habrá que sustituir las coordenadas del punto que se considera; por ejemplo, para el punto *a* las tres coordenadas o*a*″, *a*′*a*″, *aa*′. Si se nos permite una frase, que hemos empleado ya otras veces para dar re-

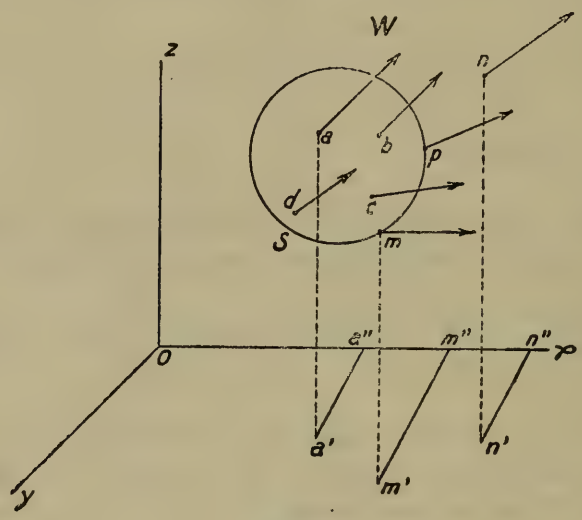


Figura 16.

lieve é imagen material á la idea, diremos que el volumen *V* á que se extiende la integral triple debe considerarse que está asaeteado de vectores *W:* para los infinitos puntos del volumen, infinitos vectores.

Pero como *F, G, H* tienen valores generales, que se extienden á todo el espacio en este gran complejo de vectores, algunos pertenecerán á la superficie *S,* que limita el volumen; por ejemplo, para los puntos *m, p*..... de dicha superficie *S,* las componentes del vector correspondiente al punto *m* se deducirán siempre de las funciones *F, G, H:* no habrá más que sustituir en dichas funciones las coordena-

das om'', $m'm''$, mm' en vez de x, y, z; más claro, las tres componentes del vector correspondiente á m serán

$$F(om'', m'm'', mm'),\ G(om'', m'm'', mm'),\ H(om'', m'm''\ mm').$$

Más aun, cada punto del espacio exterior al volumen V tendrá también su vector, cuyas componentes se expresarán sustituyendo en F, G, H, en vez de x, y, z, las coordenadas del punto que se considere.

Por ejemplo, para el punto n las componentes del vector que pasa por este punto serán:

$$F(on'', n'n'', nn'),\ G(on'', n'n'', nn'),\ H(on'', n''n', nn').$$

En estas ideas, por elementales, por triviales que sean, es forzoso que se fijen bien los principiantes para evitar dudas y confusiones.

Hemos dicho que la integral triple del primer miembro de la fórmula se refería á un conjunto de vectores, á saber: aquellos cuyos puntos de aplicación caen dentro del volumen V.

Pero entiéndase, que en esta suma de términos, referentes á un conjunto de vectores, no entran dichos vectores directamente, sino por medio de sus derivadas, cada componente por la derivada de ella misma, con relación al eje, al cual es paralela, así entran $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dG}{dy}$, $\frac{dH}{dz}$.

Otra observación respecto á F, G, H.

Como son componentes de vector, pueden considerarse como vectores, pero con direcciones determinadas de antemano y únicas; F, con un vector paralelo al eje de las x; G, con un vector paralelo al eje de las y, y H, con un vector paralelo al eje de las z.

Claro es que, sabiendo las direcciones fijas de estos vectores, y que ha de tenerse en cuenta su signo, F, G y H pue-

de considerarse, cada una de ellas, como una cantidad escalar en cuanto son funciones de x, y, z, pero sin olvidar que se aplican á direcciones paralelas á los tres ejes.

Dicho todo esto, y suponiendo que F, G, H son funciones conocidas de x, y, z, el primer miembro de la fórmula de Green significa una operación analítica, que se define en forma elemental; es una integral triple que en cada caso se integrará por los procedimientos ya estudiados, es decir, por tres integraciones sucesivas con relación á x, y, z.

Pues este método elemental es el que se sustituye en la fórmula de Green, según indica el segundo miembro, por otro procedimiento más sencillo, es decir, por dos integrales, porque en rigor la tercera ya está hecha de antemano. Precisamente con este objeto se ha dado á la integral triple primitiva la forma que indica el primer miembro.

Digamos, sin embargo, que no es precisamente el objeto de la fórmula simplificar el problema de la integración, sino establecer ciertas relaciones analíticas, importantes y hasta sugestivas, las cuales, como veremos, hacen fecundísima la adaptación de la fórmula de que se trata á muchos problemas de la Física, y, en primer término, á los problemas de la electricidad estática.

Pasemos ahora á analizar el segundo miembro de la fórmula:

$$\int\int_s \left(\alpha F + \beta G + \gamma H\right) d\sigma.$$

Es, como vemos, una integral doble que se extiende á todos los puntos de la superficie S que limita el volumen V y sólo á dichos puntos.

Para cada punto de dicha superficie, $d\sigma$ significa el elemento de superficie correspondiente al punto en cuestión.

Por ejemplo (fig. 17), si a representa un punto de la superficie S, bb' representará $d\sigma$.

Para este punto a tendremos un vector W, cuyas tres

componentes serán también F, G, H, como explicábamos hace un momento.

De modo que las F, G, H del segundo miembro de la fórmula de Green representan las mismas funciones que las F, G, H del primer miembro que entran en los coeficientes diferenciales $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dG}{dy}$, $\frac{dH}{dz}$; pero en las F, G, H, correspondientes al vector del punto a, hay que poner las coordena-

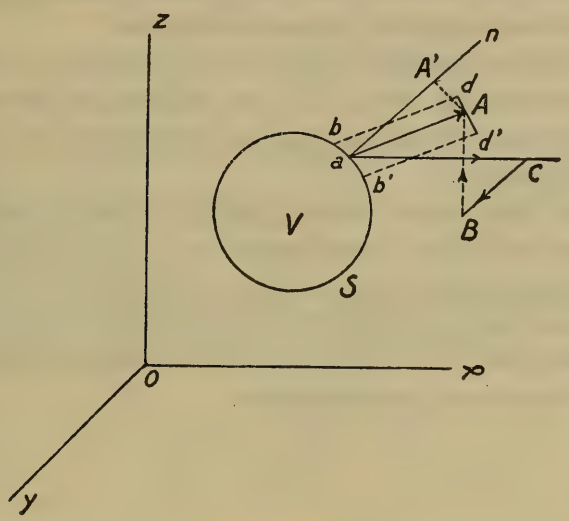


Figura 17.

das de este punto a, y en cambio en las derivadas de cada elemento de la integral triple, hay que poner las coordenadas del punto de dicho volumen que corresponda al elemento $dxdydz$ que se considere.

Por último α, β, γ representan los cosenos de los ángulos que forma con los tres ejes coordenados la normal n al elemento $b\,b'$, que corresponde al punto a de la superficie que estamos considerando.

De aquí resulta, que el paréntesis bajo la integral doble comprende una función perfectamente determinada de x, y, z;

pero como el punto a está sobre una superficie S, definida de antemano, es claro que z será una función de x, y definida á su vez por la ecuación de la superficie.

Podrá, pues, eliminarse de la expresión

$$\alpha F + \beta G + \gamma H,$$

con lo cual la cantidad que ha de integrarse no contendrá más que dos variables, la x y la y, y se obtendrá por dos integraciones según los métodos ordinarios.

Recordemos todavía lo dicho en la Conferencia anterior.

La fórmula de Green no es una ecuación con datos é incógnitas cuyo objeto sea despejar estas últimas en función de los primeros.

No es tampoco una identidad, porque la forma del segundo miembro es distinta, esencialmente, de la forma del primero.

Es una igualdad cuyo objeto es transformar el primer miembro, que es una integral triple, dándole la forma de una integral doble ó de superficie; transformación importantísima, como veremos en las aplicaciones.

***

La fórmula de Green puede expresarse por un simbolismo muy breve y muy sencillo, y que se retiene en la memoria con facilidad suma, con lo cual dicha fórmula casi nos atreveríamos á decir que resulta de sentido común.

Examinemos para ello los dos miembros de dicha igualdad.

1.° En primer lugar, á la expresión $\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$ en la que F, G, H son, como ya sabemos, las componentes del vector

$$W = \sqrt{F^2 + G^2 + H^2}$$

se le da el nombre de *divergencia del vector* W.

Este nombre parecerá extraño á primera vista; pero tiene, sin embargo, una explicación natural, y séanos permitido aquí entrar en algunos pormenores.

Como el concepto de vector, según hemos explicado hasta la saciedad, es un concepto abstracto, una generalización de conceptos concretos de la Física, todos los simbolismos que se deducen para los vectores en general gozan de una propiedad análoga; y esta palabra *divergencia,* aplicada á la expresión

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$$

indica una generalización también de conceptos concretos y análogos que encontramos en la Física, y en la Física Matemática sobre todo.

He aquí un ejemplo:

En la teoría de la elasticidad, siendo u, v, w las componentes de cada desplazamiento, demostrábamos que

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$$

no era otra cosa que la dilatación cúbica, lo cual nos daba en cierto modo lo que había variado la densidad en cada punto.

Presentemos otro ejemplo:

Imaginemos un flúido de densidad constante en movimiento, y en él imaginemos un paralelepípedo infinitamente pequeño, cuyas aristas sean dx, dy, dz.

Paralelamente al eje de las x, representando por u la velocidad paralela á este eje y por ρ la densidad, entrará una cantidad de flúido, representada por

$$\rho u \, dy \, dz$$

y por la cara opuesta saldrá

$$\rho\left(u+\frac{du}{dx}dx\right)dy\,dz:$$

la diferencia, ó sea la cantidad de flúido que ha salido ó que ha entrado según el signo, será evidentemente

$$\rho\left(u+\frac{du}{dx}dx\right)dy\,dz-\rho u\,dy\,dz=\rho\frac{du}{dx}dx\,dy\,dz.$$

Otro tanto podemos decir respecto á los ejes y, z, con lo cual la cantidad de fiúido que ha entrado ó ha salido en totalidad vendrá dada por la expresión,

$$\rho\frac{du}{dx}dx\,dy\,dz+\rho\frac{dv}{dy}dx\,dy\,dz+\rho\frac{dw}{dz}dx\,dy\,dz,$$

ó bien

$$\rho dx\,dy\,dz\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)$$

y como hemos supuesto que la densidad es constante en todos los instantes del movimiento, para que no varíe la cantidad de flúido comprendida en cada volumen, esta expresión debe ser igual á 0; así:

$$\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}=0$$

la cual nos dice, que lo que varía la densidad, y pudiéramos decir también la *divergencia* de la densidad, es en este caso nula.

Una expresión análoga encontraremos en otros muchos casos.

Aun en el ejemplo anterior, si se trata de un flúido de densidad variable, un cálculo idéntico al precedente nos demostraría que la variación de densidad se expresa por una fórmula análoga.

Y lo mismo podíamos repetir si se tratara del flúido eléctrico, como veremos al estudiar la Electro-estática.

En suma, esta expresión

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}$$

es el tipo de la variación por unidad de volumen en un elemento del mismo, de cierta cantidad concreta relativa al problema de que se trata.

En el problema de la elasticidad representará una dilatación cúbica.

En el movimiento de un flúido ponderable un aumento de masa ó de densidad.

En un problema eléctrico cierta cantidad de electricidad libre.

Y así sucesivamente; es decir, representará dicha expresión, la cantidad en que difiere cierta cantidad para un elemento, comparada dicha cantidad con otra anterior y á esta diferencia, bien la podemos llamar divergencia.

En todos estos ejemplos la divergencia es concreta, corresponde á la idea de una cantidad que antes tenía un valor y que ahora tiene otro que se separa del primero, lo cual expresa perfectamente la idea de que se trata.

Pero como nosotros tratamos de vectores, tenemos que decir *divergencia del vector W.*

Cuando estas teorías generales las apliquemos á casos concretos, como los vectores se convertirán en fuerzas, velocidades, ejes de pares, etc., la divergencia abstracta se convertirá en una cantidad concreta que será preciso definir en cada caso.

Basta por ahora con estas ideas generales, que ya iremos aclarando en lo sucesivo.

En suma, si F, G, H son las componentes de un vector W, la expresión que vamos considerando podrá escribirse de este modo:

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = \text{divergencia } W;$$

ó abreviadamente

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz} = \text{div. } W.$$

Por lo tanto, el primer miembro de la fórmula de Green, representando por $d\tau$ la diferencial del volumen, podrá escribirse de este modo:

$$\int\int\int_v \text{div. } W\, d\tau.$$

Pasemos al segundo miembro.

2.° Respecto al segundo miembro de la fórmula de Green, tenemos que decir algo, que es también importante y de continua aplicación.

Dicho segundo miembro lo hemos obtenido bajo esta forma

$$\int\int_s \left(F\alpha + G\beta + H\gamma\right) d\sigma.$$

Sea (fig. 17) V el volumen que se considera, S la superficie que lo limita, y a un punto de dicha superficie al cual corresponde el área infinitamente pequeña $bb' = d\sigma$.

En este punto a tracemos la normal exterior an, y por el mismo punto a el vector $aA = W$. Sus componentes F, G, H están representadas en la figura por aC, CB y AB, que se-

rán funciones evidentemente de x, y, z correspondientes al punto a de la superficie que hemos elegido para nuestra explicación.

Ahora bien; la proyección sobre la normal n de estas tres componentes

$$aC = F, \quad CB = G, \quad BA = H,$$

será igual á la proyección del vector W, ó sea de la línea aA que cierra el polígono.

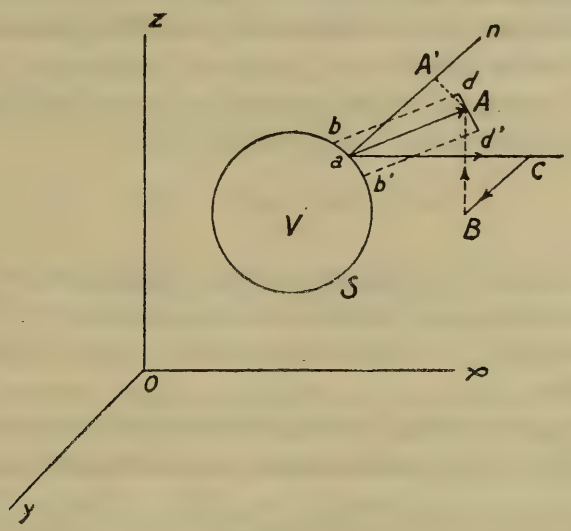


Figura 17.

De modo que tendremos:

$$aA' = \text{proyección de } W \text{ sobre } n = aC.\alpha + BC.\beta + AB.\gamma$$

y llamando W_n á la proyección de W sobre n

$$W_n = F\alpha + G\beta + H\gamma.$$

De suerte, que el segundo miembro de la fórmula de Green podrá escribirse de este modo:

$$\int\int_s \left(F\alpha + G\beta + H\gamma\right) d\sigma = \int\int_s W_n \, d\sigma.$$

Como todas estas teorías, ó han sido forjadas al contacto de la realidad y por exigencias prácticas de las aplicaciones, ó se han ido modificando los conceptos abstractos, dándoles un carácter útil, á esta última expresión se le ha dado un nombre, que podemos decir que también es práctico.

Figurémonos que el vector W, que en la figura hemos representado por aA, se materializa por un filete de flúido que saliese oblicuamente de la superficie infinitamente pequeña $d\sigma$, y que asimismo suponemos que por todos los puntos de dicha superficie db salen filetes de flúido

$$b'd' = aA = bd \ldots\ldots = W.$$

Todos ellos constituirán un cilíndro oblicuo $bb'\ dd'$, cuyo volumen expresará el flúido que ha salido por bb', ó dicho de otro modo, el flujo correspondiente á este elemento de superficie.

Pero este volumen tendrá precisamente por valor el producto del área bb', que es la base, por la altura aA', es decir,

volumen $bb'dd'$ = flujo por la sup.^{e} bb' = área $bb'.aA' = d\sigma.\ W_n$

y la integral anterior podrá expresarse de esta manera:

$$\int\int_s W_n \, d\sigma = \int\int_s \text{flujo elem. vector } W.$$

En el caso que hemos representado en la figura, el flujo es de salida; si el vector, respecto á la normal exterior, marchase en sentido contrario que esta normal, podríamos decir

que el flujo era de entrada, y la integral doble, que abarca todos estos flujos del vector W, expresará el flujo total á través de la superficie.

Sólo que, como estamos en una teoría abstracta, en vez de hablar de flujo de flúidos ó de flujo de fuerzas, hablamos de flujo de vectores.

***

Aplicando las nuevas notaciones del primero y del segundo miembro de la fórmula de Green, dicha fórmula puede escribirse según esta notación sencilla y condensada

$$\iiint_v \text{div. } W dv = \iint_s \text{flujo elemental } W$$

ó si se quiere

$$\iiint_v \text{div. } W dv = \iint_s W_n \, d\sigma.$$

En lenguaje vulgar puede leerse de este modo: La integral de volumen de la divergencia de un vector es igual al flujo del vector á través de la superficie misma.

Esto, que escrito en fórmulas matemáticas parece abstracto, complicado y que para algunos es hasta sublime, es, sin embargo, de una sencillez elemental.

Quiere decir en lenguaje prosáico que lo que aumenta ó disminuye *algo que está dentro de un volumen*, depende del flujo de ese *algo* que entre ó salga á través de la superficie que limita dicho volumen.

Como si dijéramos, y continúa el estilo prosáico, que lo que aumenta ó disminuye el número de pesetas, contenido en una caja de caudales, depende de lo que entre ó de lo

que salga, ó si se quiere, del flujo positivo ó negativo de pesetas.

En verdad que nada existe menos sublime que este teorema, en toda la ciencia matemática.

Lo cual no quiere decir que no tenga la fórmula en cuestión una gran importancia, y que no sea dicho teorema por todo extremo fecundo en las aplicaciones.

A veces lo más sencillo es lo más sublime; y por otra parte, como afirmaba un eminente matemático en el siglo anterior, cuando las teorías son transcendentalmente elevadas, deben ser transcendentalmente claras: la obscuridad sólo es aliciente de vanidades y pedanterías científicas.

Perdónesenos esta disgresión y volvamos á la fórmula fundamental.

$$\int\int\int_v \left(\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}\right)d\gamma=\int\int_s \left(F\alpha+G\beta+H\gamma\right)d\sigma.$$

Pero antes de pasar adelante, debemos desvanecer una duda que pudiera asaltar á los principiantes, y que, por muy pueril que sea, no hemos de pasar en silencio; porque no ha de olvidarse ni el carácter elemental de estas conferencias, ni el trabajo de propaganda científica que con ellas me propongo realizar.

Al que por primera vez estudia estas materias, penetrando en terreno desconocido, acaso pudiera ocurrírsele, como digo, esta duda; porque no escribo ni para maestros ni para genios.

La fórmula de Green reduce una integral de volumen á una integral de superficie, como más adelante veremos que la fórmula de Stokes reduce una integral de superficie á una integral de línea; y limitándonos por ahora á la primera fórmula, pudiera extrañar al alumno que lo que *pasa*, y perdónesenos lo vago de la frase, en el interior de un volumen, dependa de lo que *pasa* en la superficie que lo limita.

Esta dificultad, por decírlo así, intiutiva y vaga, no tiene fuerza de ninguna clase porque lo que *pasa* en el interior está enlazado con lo que *pasa* en la superficie.

Los vectores del volumen corresponden á las mismas funciones que los vectores de la superficie.

Para ambos espacios el vector W tiene tres componentes, F, G, H, expresadas por las mismas funciones de x, y, z.

Un ejemplo elemental expresará aún con más claridad nuestro pensamiento.

Supongamos la integral

$$\int_{x_3}^{x_1} f'(x)\,dx = f(x_1) - f(x_0).$$

También en este caso parece que el valor de la integral, es decir, la suma de todos los elementos diferenciales $f'(x)\,dx$ depende sólo de las abscisas extremas.

Si representamos por C la curva cuya ecuación es

$$y = f'(x),$$

dijérase, repitiendo la objeción anterior, que lo que *pasa* en toda la curva C depende de lo que *pasa* en sus extremos, ó sea de las abscisas x_0, x_1; pero ha de observarse que el segundo miembro no sólo depende de x_0 y de x_1, sino de la forma de la función $f(x)$, la cual á su vez depende de la forma de la función $f'(x)$, es decir, de la forma de la curva C entre los puntos extremos.

De suerte que variando esta curva variará f' y variará f, y el segundo miembro, en general, cambiará de valor aunque x_0 y x_1 sean los mismos.

De igual suerte que en la fórmula de Green el flujo que representa el segundo miembro, depende de los vectores W de la superficie, y éstos dependen de los vectores del volu-

men ó de sus componentes F, G, H, es decir, de lo que *pasa* en el interior del volumen.

Volvamos al estudio de la fórmula en general.

***

Esta fórmula, tal como la hemos obtenido al principio, antes de adoptar símbolos más abreviados, era

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{dH}{dz}\right)d\tau = \iint_s \left(F\alpha + G\beta + H\gamma\right)d\sigma$$

en que F, G, H representaban funciones de x, y, z correspondientes á cada punto del espacio, ó concretando más, para cada punto del volumen, esto respecto al primer miembro; y para cada punto de la superficie S en el segundo miembro.

Para cada punto, repetimos, F, G, H tienen un valor determinado y determinan un vector resultante W.

A este conjunto de vectores es á lo que hemos llamado campo del vector W, y por eso agregábamos que el problema en cuestión, tomaba la forma de un problema vectorial.

Hasta aquí $F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$, $H(x, y, z)$, son tres funciones independientes, y considerando á cada una de estas, según explicábamos en las conferencias anteriores, como función escalar, podemos decir, que el vector W es un vector triplemente escalar.

Ya explicábamos el sentido de esta palabra que es el mismo en todos los idiomas, aunque en el nuestro no exista todavía, con el sentido matemático que aquí le damos.

Así, algunos autores extranjeros, como por ejemplo, y no cito más que dos, Bjerknes y Apell, este último en su mecánica, emplean una palabra que por lo menos tiene el mismo radical etimológico, y así dicen que el vector W es triplemente *scalaire*, ó doblemente *scalaire*.

De todas maneras, lo que importa es conocer con claridad la idea y su significación analítica, que por lo demás, ya el uso, como sucede siempre, irá fijando la denominación verbal.

En cuanto al concepto puro ya lo hemos explicado en otra conferencia, y ahora lo vamos á explicar de nuevo en forma más concreta, aunque sea repitiendo mucho de lo que entonces dijimos.

*
* *

Cuando se tiene un espacio limitado ó ilimitado y en él una serie de puntos contínuos ó discontínuos, cada uno definido por sus tres coordenadas x, y, z, hay que distinguir dos conceptos matemáticos ó mecánicos, analíticos ó geométricos, que son los siguientes:

1.° Supongamos que á cada punto (x, y, z) va unida una magnitud que designaremos por I, magnitud que depende del punto, ó sea de sus coordenadas, es decir:

$$I = f(x, y, z),$$

dicha magnitud, repetimos, va unida por el pensamiento al punto en cuestión, y para cada uno es distinta en general, como que depende de sus coordenadas, las cuales varían de un punto á otro.

Esta magnitud I puede tener una significación física, y, por lo tanto, en cierto modo concreta. Por ejemplo; si le damos al punto una masa ponderable, ó una masa eléctrica, ó una potencial, ó, en suma, una propiedad física cualquiera, pero con este carácter esencialísimo, *que dicha propiedad no marca para el punto en cuestión una dirección determinada, sino algo intrínseco y propio del punto mismo.*

Pues en tal caso, á esta *propiedad sin dirección,* pero que tiene una *intensidnd*, la cual depende de las coordenadas x, y, z, se le puede dar un nombre que indique grados, valores, escala, y por eso hemos dicho que le daremos el nombre de función escalar. También se le podría llamar función del punto.

2.° Cuando para cada punto (x, y, z) hay un función, es decir, una magnitud que depende de la elección del punto ó del valor de sus coordenadas, que tiene, por tanto, una determinada intensidad; pero que, además, marca una dirección y un sentido; entonces á esta magnitud se le da el nombre de vector, palabra que expresa la idea de una orientación determinada.

Todo *escalar* unido á una dirección se convierte en *vector* y expresa una magnitud.

Así, $F(x, y, z)$, es una función *escalar*; pero si se multica, por decirlo de este modo, por la unidad aplicada paralelamente al eje de las x, se convierte en un vector paralelo á dicho eje.

Y lo mismo podemos decir de la función $G(x, y, z)$. Es una función *escalar*, pero una recta, cuyo valor numérico sea el que expresa la función G, aplicada paralelamente al eje de las y, puede considerarse como un vector paralelo á dicho eje.

Y, por último, $H(x, y, z)$, magnitud que, considerada en sí misma y sin dirección, es una unidad escalar, si se representa por un segmento y se aplica paralelamente al eje de las z, se convertirá, á su vez, en un vector en la dirección del eje expresado.

Si quisiéramos simbolizar esto de una manera concreta, no tendríamos que hacer más que tomar *tres unidades* paralelas á los ejes, y designándolas por 1_x, 1_y, 1_z, podríamos decir que

$$F(x, y, z), \qquad G(x, y, z), \qquad H(x, y, z)$$

son tres funciones escalares, y que

$$F(x, y, z) \cdot 1_x, \qquad G(x, y, z) \cdot 1_y, \qquad H(x, y, z) \cdot 1_z$$

son tres vectores paralelos á los tres ejes coordenados.

Pero esto casi nunca será necesario, porque toda confusión es imposible.

Nos contentaremos con decir que F, G, H son las componentes del vector W, designación análoga á la de las componentes de una fuerza y su resultante.

Y terminada esta digresión, examinemos varios casos particulares de la fórmula de Green.

***

Podemos considerar tres casos:

1.° Que las tres funciones F, G, H sean independientes, y entonces se dice que el vector resultante W es triplemente *escalar*.

2.° Que estas tres funciones F, G, H dependan de dos funciones, por ejemplo: $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$, en cuyo caso se dirá que el vector W es doblemente *escalar*.

3.° Que las expresadas tres funciones F, G, H dependan de una sola función $\varphi(x, y, z)$, y diremos en este caso que las tres funciones F, G, H son simplemente *escalares*.

Pero los dos últimos casos pueden presentarse de muchas maneras, porque de muchas maneras tres funciones pueden depender de otras dos ó de una sola, y nosotros escogeremos un sistema especial de relaciones, que son las que han de tener más aplicación en la Física matemática.

Y este sistema es el siguiente:

Consideraremos á F, G, H como coeficientes de una ecuación diferencial

$$Fdx + Gdy + Hdz = 0.$$

Y tres casos pueden presentarse aquí también.

Que el primer miembro de dicha ecuación sea una diferencial exacta de una función de x, y, z, es decir, que diferenciada resulte precisamente la ecuación anterior.

Puede suceder también, que dicho primer miembro no sea una diferencial exacta; pero que, multiplicándolo por cierto factor, función de x, y, z, resulte una diferencial exacta é inmediata.

Y por último, puede ocurrir que ni sea una diferencial exacta ni exista un factor capaz de hacerla integrable.

Y ocurre preguntar antes de pasar más adelante: ¿Es esto posible? ¿Existen expresiones lineales en dy, dx, dz, para las cuales no exista ningún factor capaz de hacerlas integrables?

Para demostrarlo basta presentar un ejemplo.

Sea la ecuación diferencial

$$dx + dy + xdz = 0.$$

Supongamos que existiese un factor capaz de hacer integrable esta ecuación, y designemos este factor, ó sea esta función de x, y, z por α; multiplicando el primer miembro por esta función tendremos

$$\alpha\, dx + \alpha\, dy + \alpha\, xdz = 0.$$

Si esta ecuación es una diferencial exacta, deberá satisfacer á las condiciones de integrabilidad, que como sabemos serán las siguientes:

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\alpha}{dx};\ \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\alpha x}{dx};\ \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d\alpha x}{dy}$$

ó desarrollando,

$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{d\alpha}{dx};\ \frac{d\alpha}{dz} = \alpha + x\frac{d\alpha}{dx};\ \frac{d\alpha}{dz} = x\frac{d\alpha}{dy}$$

de donde

$$\alpha + x\frac{d\alpha}{dx} = x\frac{d\alpha}{dy}$$

y según la primera ecuación

$$\alpha + x\frac{d\alpha}{dx} = x\frac{d\alpha}{dx}$$

y por fin

$$\alpha = 0;$$

luego el único factor capaz de hacer integrable la ecuación es el que la anula, que es como decir que no existe.

***

Y pasemos ahora á examinar los tres casos que antes indicábamos.

Primero. Que en la expresión

$$Fdx + Gdy + Hdz,$$

las funciones F, G, H sean completamente independientes, de modo que ni representen las tres derivadas con relación á x, y, z de una sola función, ni tampoco multiplicadas por determinada función de x, y, z se conviertan en tres derivadas y hagan integrable la ecuación.

En este caso, la fórmula obtenida es la única que consideraremos sin introducir en ella nuevas transformaciones.

Subsiste, pues, para este caso en toda su generalidad la fórmula de Green

$$\int\int\int_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) d\tau = \int\int_s \left(F\alpha + G\beta + H\gamma\right) d\sigma$$

ó bien esta fórmula, introduciendo los conceptos de divergencia y flujo

$$\int\int_v \text{div. } W d\tau = \int\int_s \text{flujo elem. } W.$$

Pasemos al segundo caso.

Segundo. La expresión

$$Fdx + Gdy + Hdz = 0$$

no es una diferencial exacta, pero existe un factor que la hace integrable.

Supongamos que este factor se representa por

$$\frac{1}{\psi(x, y, z)} \text{ ó abreviadamente por } \frac{1}{\psi}.$$

El darle esta forma fraccionaria es tan sólo para comodídad de los cálculos, porque si lo designamos por λ, podría ponerse bajo esta otra forma:

$$\lambda = \frac{1}{\frac{1}{\lambda}}$$

y representando por ψ la fracción $\frac{1}{\lambda}$ tendremos

$$\lambda = \frac{1}{\psi}.$$

Multipliquemos, pues, la ecuación por $\frac{1}{\psi}$ y resultará

$$\frac{1}{\psi} Fdx + \frac{1}{\psi} Gdy + \frac{1}{\psi} Hdz = 0.$$

Puesto que el primer miembro se ha hecho integrable y es la diferencial exacta de una cierta función φ, de modo que dicho primer miembro tiene la forma,

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx+\frac{d\varphi}{dy}\,dy+\frac{d\varphi}{dz}\,dz=0,$$

tendremos evidentemente,

$$\frac{1}{\psi}F=\frac{d\varphi}{dx};\ \frac{1}{\psi}G=\frac{d\varphi}{dy};\ \frac{1}{\psi}H=\frac{d\varphi}{dz},$$

de donde

$$F=\psi\frac{d\varphi}{dx},\ G=\psi\frac{d\varphi}{dy},\ H=\psi\frac{d\varphi}{dz}.$$

Ahora bien, sustituyendo estos tres valores en la fórmula general de Green, ésta se convertirá en

$$\iiint_v\left[\frac{d\psi\frac{d\varphi}{dx}}{dx}+\frac{d\psi\frac{d\varphi}{dy}}{dy}+\frac{d\psi\frac{d\varphi}{dz}}{dz}\right]d\tau=$$

$$=\iint_s\left(\psi\frac{d\varphi}{dx}\alpha+\psi\frac{d\varphi}{dy}\beta+\psi\frac{d\varphi}{dz}\right)d\sigma$$

ó bien desarrollando el primer miembro

$$\iiint_v\left[\psi\frac{d^2\varphi}{dx^2}+\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx}+\psi\frac{d^2\varphi}{dy^2}+\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dy}+\psi\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\right]d\tau=\iint_s\left(\frac{d\varphi}{dx}\alpha+\frac{d\varphi}{dy}\beta+\frac{d\varphi}{dz}\nu\right)\psi\,d\sigma$$

y recordando lo que significa el símbolo Δ

$$\iiint_v \left[\psi \Delta \varphi + \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\right] d\tau =$$
$$= \iint_s \left(\frac{d\varphi}{dx}\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\beta + \frac{d\varphi}{dz}\nu\right)\psi\, d\sigma.$$

Transformemos ahora el segundo miembro, y para ello consideremos un punto A (figura 18) de la superficie S y tracemos la normal An á dicha superficie.

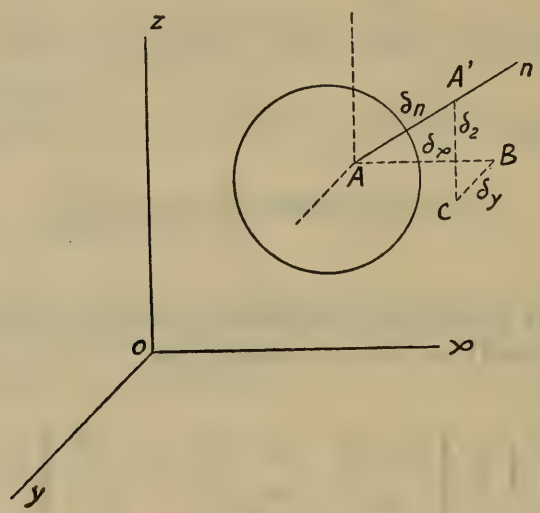


Figura 18.

Sobre la normal n tomemos un punto A' á la distancia infinitamente pequeña de A

$$A\,A' = d\,n.$$

Si por el punto A hacemos pasar tres ejes, como están representados en la figura, paralelos á los ejes coordenados, las diferencias de las coordenas de A y A', ó si se quiere las coordenadas de A' con relación á tales ejes, serán

$$AB = \delta x, \qquad BC = \delta y, \qquad AC = \delta z$$

y los cosenos de los ángulos que forma la normal n con los ejes coordenados tendrán evidentemente los siguientes valores:

$$\alpha = \frac{AB}{AA'} = \frac{\delta x}{dn}; \quad \beta = \frac{BC}{AA'} = \frac{\delta y}{dn}; \quad \gamma = \frac{A'C}{AA'} = \frac{\delta z}{dn}.$$

Hemos querido distinguir para este caso particular los tres incrementos δx, δy, δz, pero en rigor no son más que las variaciones de x, y, z del punto A cuando se pasa á otro punto del espacio; podemos, pues, representarlas por su notación general dx, dy, dz, es decir, que tendremos

$$\alpha = \frac{dx}{dn}, \quad \beta = \frac{dy}{dn}, \quad \gamma = \frac{dz}{dn};$$

y sustituyendo en el segundo miembro de la ecuación,

$$\int\int_s \left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dn} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dn} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dz} \right) \psi \, d\sigma.$$

Ahora bien; consideremos el factor de un elemento cualquiera de la integral

$$\frac{d\varphi}{dx}\frac{dx}{dn} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{dy}{dn} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{dz}{dn}.$$

Esta expresión es evidentemente

$$\frac{d\varphi}{dn}$$

según la regla general de la diferenciación.

Porque, fijemos las ideas, φ es una función de x, y, z; para el punto A tendrá un valor determinado, y al tomar otro punto tendrá para éste, otro valor distinto; la diferencia de ambos será su diferencial.

Pero si el segundo punto que tomamos es A', y está sobre la normal n, determinada dn, quedará determinado el punto A'; las tres variables x, y, z ya no serán independientes, sino que estarán determinadas á su vez, cuando fijemos el punto A'; y el incremento de φ será el que corresponda al incremento dn.

De aquí resulta un coeficiente diferencial determinado de φ, con relación á n, que es precisamente el que antes obtuvimos.

Y como lo que digamos de este elemento de la integral doble podremos decir de otro cualquiera, resulta que el segundo miembro se convierte en

$$\int\int_s \frac{d\varphi}{dn}\psi\, d\sigma;$$

y la fórmula en esta otra

$$\int\int\int_v \left(\psi\Delta\varphi + \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\psi}{dy}\frac{a\varphi}{dy} + \frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dz}\right) d\tau =$$
$$= \int\int_s \frac{d\varphi}{dn}\psi\, d\sigma.$$

Si cambiamos dentro del mismo volumen, y para su superficie, las dos funciones φ y ψ, obtendremos esta otra fórmula

$$\int\int\int_v \left(\varphi\Delta\psi + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}\right) d\tau =$$
$$= \int\int_s \frac{d\psi}{dn}\varphi\, d\sigma$$

y restando ambas fórmulas generales, y suprimiendo la parte igual

$$\int\int\int_v \left(\psi\Delta\varphi - \varphi\Delta\psi\right) d\tau = \int\int_s \left(\psi\frac{d\varphi}{dn} - \varphi\frac{d\psi}{dn}\right) d\sigma.$$

Fórmula de mucha importancia, que tendremos ocasión de aplicar en la electro-estática, y sobre la cual insistiremos cuando llegue la ocasión oportuna.

Pero no hemos de terminar este segundo caso de la función de Green sin hacer una aclaración.

Acabamos de decir que se cambian una por otra estas dos funciones, y ahora preguntamos: ¿Es esto legítimo?

En la conferencia próxima podremos contestar á esta pregunta, que es la que, naturalmente, puede ocurrir á un principiante con tal que tenga cierto espíritu crítico.

XXIV. — Determinación de algunas constantes físicas de la manganina.

Constantes elásticas y su variación con la temperatura. — Influencia de la tracción y de la temperatura combinadas sobre la resistencia y la resistividad. – Coeficiente de dilatación.

(Conclusión.)

POR B. CABRERA.

II

Resultados.

Las muestras sometidas á este estudio pertenecen al hilo de 0,05 cm. á que se refirió el trabajo que citábamos en el comienzo de la presente Memoria, y cuyo análisis ejecutó el Profesor auxiliar Sr. Campos, con los resultados que entonces consignamos. Al referido hilo pertenecen las muestras que en lo sucesivo designaremos con los números 2, 3 y 4, mientras que la núm. 5 procede de un carrete de hilo del mismo diámetro de la casa Isabellenhütte.

En gracia de la brevedad no hemos de consignar los resultados directos de las observaciones en la mayoría de los casos, sino las ecuaciones que los representan, calculadas por el método de Cauchy. Estas ecuaciones representan los resultados directos de la observación con errores que caen dentro de los límites previstos, como puede observarse en las gráficas contenidas en las figuras que siguen, donde las

curvas son siempre las definitivas por la ecuación correspondiente, mientras los puntos corresponden á los resultados experimentales directos.

a) Ecuaciones para la variación de la resistencia con la tracción (1):

Muestra número 2.

Temp.	ECUACIÓN	OBSERVACIONES
20°	$R = 1.03173\,[1 + 556 \times 10^{-15}\,D]$	Antes del recocido. Previamente sometido á varios ciclos hasta 2473×10^{6} D/cm.
21°	$R = 1.02192\,[1 + 502 \times 10^{-15}\,D]$	Después de 10 h. derecocido á 156°.
45°	$R = 1.02196\,[1 + 518 \times 10^{-15}\,D]$	
71°	$R = 1.02197\,[1 + 529 \times 10^{-15}\,D]$	
100°	$R = 1.02134\,[1 + 558 \times 10^{-15}\,D]$	
22°	$R = 1.02278\,[1 + 485 \times 10^{-15}\,D]$	

Muestra número 3.

21°,1	$R = 1.03182\,[1 + 569 \times 10^{-15}\,D]$	Antes del recocido. Después de 24 h. de tracción á 2328×10^{6} D/cm.
28°	$R = 1.02357\,[1 + 501 \times 10^{-15}\,D]$	Después de recocido durante 11 h. á una temperatura media de 152° y bajo la tracción de 2328×10^{6} D/cm. A estas observaciones precedieron las determinaciones de los coeficientes de temperatura bajo diferentes tracciones.
45°	$R = 1.02357\,[1 + 515 \times 10^{-15}\,D]$	
70°,5	$R = 1.02328\,[1 + 535 \times 10^{-15}\,D]$	
100°,5	$R = 1.02262\,[1 + 546 \times 10^{-15}\,D]$	

(1) En éste, como en alguno de los siguientes cuadros, se notarán diferencias notables si se les compara con la nota preliminar que citamos más arriba. Débense tales diferencias á errores de cálculo que hemos subsanado aquí.

Muestra número 4.

28°,8	$R = 1.05690\,[1 + 572 \times 10^{-15}\,D]$	Antes del recocido. Después de 24 h. de tracción á 2321×10^{6} D/cm.
25°,5	$R = 1.04712\,[1 + 470 \times 10^{-15}\,D]$	Después de recocido durante 9 h. á una temperatura media de 152° y sin carga. Las determinaciones de los coeficientes de temperatura precedieron á éstas.
51°,0	$R = 1.04723\,[1 + 488 \times 10^{-15}\,D]$	
70°,5	$R = 1.04625\,[1 + 492 \times 10^{-15}\,D]$	
99°,5	$R = 1.04558\,[1 + 533 \times 17^{-15}\,D]$	

Muestra número 5.

24°,1	$R = 0{,}91902\,[1 + 564 \times 10^{-15}\,D]$	Antes del recocido. Después de 24 h. de tracción á 2265×10^{6} D/cm.
17°,7	$R = 0{,}91293\,[1 + 491 \times 10^{-15}\,D]$	Después de recocido durante 8 h. á una temperatura no inferior á 152°, y que en alguna ocasión subió hasta 184°. También aquí precedió la determinación de los coeficientes de temperatura.
47°,0	$R = 0{,}91305\,[1 + 563 \times 10^{-15}\,D]$	
18°,8	$R = 0{,}91296\,[1 + 551 \times 10^{-15}\,D]$	
70°,4	$R = 0{,}91252\,[1 + 562 \times 10^{-15}\,D]$	
100°,9	$R = 0{,}91201\,[1 + 603 \times 10^{-15}\,D]$	

Con el fin de poner de manifiesto la aproximación con que las anteriores ecuaciones representan los resultados experimentales, hemos reunido en la fig. 6 las curvas calculadas correspondientes á la más baja temperatura para los hilos recocidos, marcando las resistencias, directamente medidas con una cruz, cuando corresponden al período ascendente de las tensiones, y con un círculo para el descendente. Las diferencias son, en general, del orden de algunas unidades del sexto orden decimal, y únicamente en la muestra núm. 5 llegan á algunas decenas de este mismo orden. Pero con frecuencia se denuncia la existencia de un fenómeno de histé-

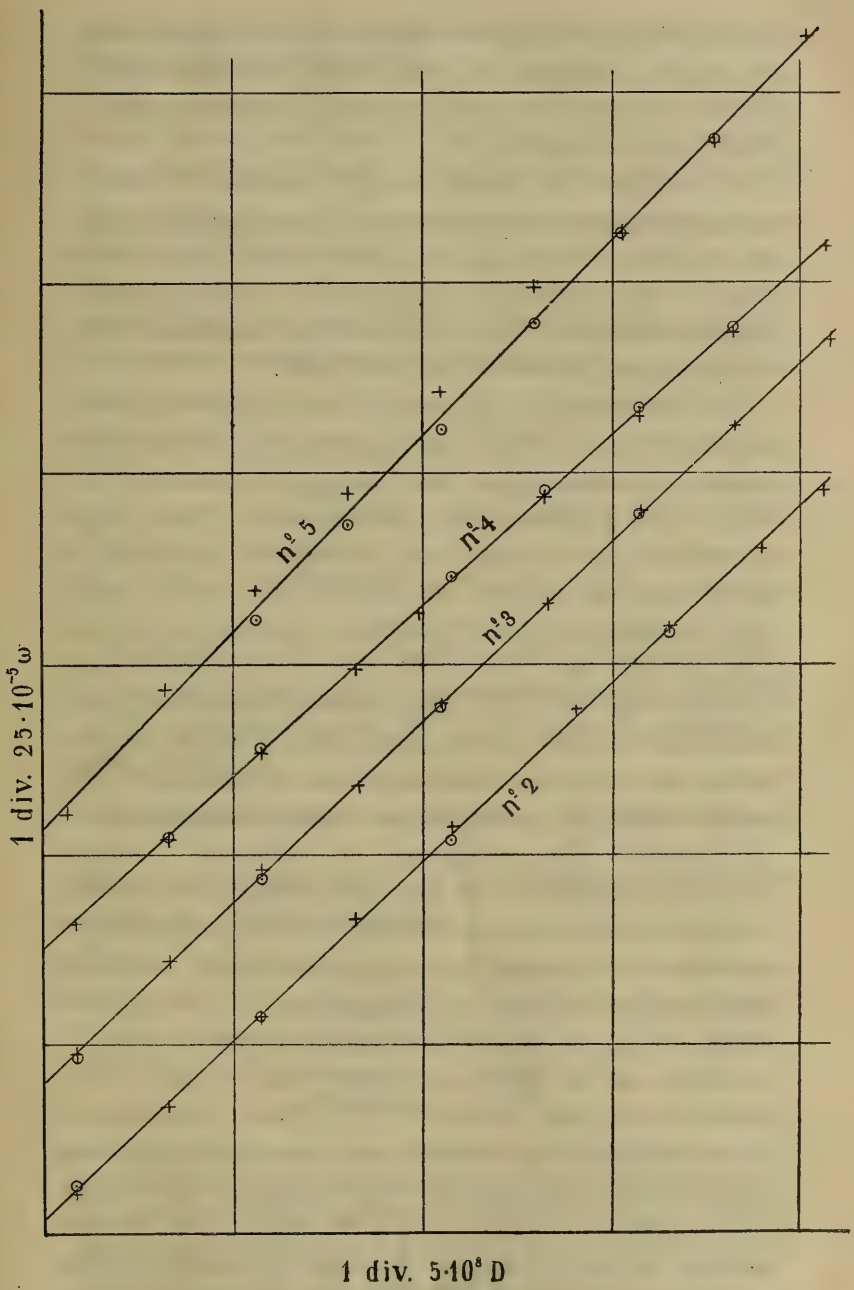


Figura 6.

resis, apareciendo los puntos del descenso por encima de los del ascenso, fenómeno del cual hemos prescindido por su escasa importancia, tomando todas las observaciones para el cálculo de las ecuaciones.

Por otra parte, las diferencias quizá denuncien la existencia de un término de segundo orden, que convertiría las curvas en ramas parabólicas, con la concavidad dirigida hacia el eje de las tracciones; pero la precisión alcanzada en nuestras determinaciones no permite más que vislumbrar la posibilidad de ese término de segundo orden.

Para la comparación de los anteriores coeficientes, conviene observar que la última cifra aparece como dudosa en los cálculos, circunstancia que hace más concordantes sus valores de lo que á primera vista pudiera parecer. Desde luego es notable la conformidad casi perfecta del coeficiente de tracción para las muestras no recocidas. El recocido determina una disminución en el coeficiente aludido, que para las 2, 3 y 5 oscila entre 60×10^{15} y 70×10^{15}, mientras para la 4 se eleva á 100×10^{15}. Esta última excepción no puede interpretarse de una manera satisfactoria, pues las circunstancias del recocido en esta muestra son perfectamente comparables á las que jugaron en las demás: quizá haya ocurrido un cambio brusco en alguna de las resistencias que constituía el puente, del cual no nos apercibimos. Esta sospecha se arraiga en nuestro ánimo con mayor fuerza analizando los resultados de la muestra 5, donde necesariamente ha debido existir igual perturbación en el paso de los 17°,7 á 47°,0, única manera de explicar la variación brusca experimentada por el coeficiente, que se observa con mayor claridad por la comparación de las dos curvas á 17°,7 y 18°,8: la diferencia entre sus coeficientes es, en efecto, muy superior á los errores experimentales. Pero aún hay más; durante las medidas que corresponden á la curva de 70°,4 se produjo uno de estos cambios, que nos ha obligado á calcular la ecuación correspondiente en dos partes, tomando para coeficiente definitivo

la media aritmética de ambos, razón que explica sea algo inferior á lo que debiera ser.

Mas, á pesar de estos cambios, queda completamente comprobado el crecimiento del coeficiente de tracción con la temperatura, por la simple inspección de los anteriores resultados, y calculando $\frac{d\alpha}{dt}$, donde α representa el indicado coeficiente, aquella conclusión se completa, pues sus valores resultan idénticos, dentro de la aproximación de que puede responderse, como indica el siguiente cuadro:

Muestra.	$\frac{d\alpha}{dt} \times 10^{16}$
Número 2...	6,9
Número 3...	6,6
Número 4...	7,2
Número 5...	6,7

Conviene advertir que el cálculo para la última muestra lo hemos hecho partiendo de las ecuaciones para 18°,8, 47° y 100°,9, eliminando las de 17°,7 y 70°,4 por las razones que arriba adujimos.

Simultáneamente con el cálculo de $\frac{d\alpha}{dt}$ hemos hecho el de los valores de α para 50° en las diferentes muestras, obteniendo los resultados siguientes:

Muestra.	$\alpha_{50}\ 10^{15}$
Número 2...	520
Número 3...	517
Número 4...	488
Número 5...	508

El último de estos números no es el obtenido por el cálculo, sino éste corregido mediante la sustración de la diferencia de los valores de α para 17,7 y 18,8, pues creemos que esta diferencia se debe á la causa que ya hemos señalado.

Habida cuenta de esta discusión, creemos que puede admitirse para representar los cambios de resistencia de la manganina con la tracción, cuando esta substancia se ha recocido á temperaturas próximas á 150° y durante un período de 10^4, la ecuación

$$R_D = R_0 \left\{ 1 + [51_1 + 0,6_9 (t' - 50^0)] \cdot 10^{-15} D \right\},$$

para una temperatura comprendida entre 0° y 100°, y una tracción D, en dina por centímetro cuadrado, que no exceda de 24×10^8. En esta ecuación el valor de α para los 50° lo dedujimos de los números del último cuadro por el método de las medias por pesos, asignando un peso doble á los dos primeros resultados sobre los dos últimos.

b. — Ecuaciones para el alargamiento por tracción.

Muestra núm. 2.

Temp.	ECUACIÓN	OBSERVACIONES
20°,2	$L = 51,07\ [1 + 836 \times 10^{-15} D]$	Antes del recocido. Distancia de la escala al espejo 162,2 $x = 0,00626\Delta - 0,0_7 89\Delta^3$.
21°	$L = 51,07\ [1 + 816 \times 10^{-15} D]$	Después del recocido. La misma distancia á la escala.
45°	$L = 51,07\ [1 + 824 \times 10^{-5} D]$	
71°	$L = 51,07\ [1 + 833 \times 10^{-15} D]$	
100°	$L = 51,07\ [1 + 845 \times 10^{-15} D]$	
22°	$L = 51,07\ [1 + 815 \times 10^{-15} D]$	

Muestra núm. 3.

21°	$L = 51,00\ [1 + 811 \times 10^{-15} D]$	Antes del recocido. Distancia de la escala al espejo 162,3 centímetros $x = 0,00626\Delta - 0,0_7 89\Delta^3$.

Sigue **Muestra núm. 3.**

28°	$L = 51{,}00\ [1 + 788 \times 10^{-15}\ D]$	Después del recocido. La misma distancia á la escala.
45°	$L = 51{,}00\ [1 + 789 \times 10^{-15}\ D]$	
70°,5	$L = 51{,}00\ [1 + 814 \times 10^{-15}\ D]$	
100°,5	$L = 51{,}00\ [1 + 811 \times 10^{-15}\ D]$	

Muestra núm. 4.

28°	$L = 52{,}12[1 + 753 \times 10^{-15} D]$	Antes del recocido. Distancia de la escala al espejo 161 $x = 0{,}00631\ \Delta - 0{,}0_7 91\ \Delta^3$.
25°,5	$L = 52{,}12[1 + 834 \times 10^{-15} D - 5 \times 10^{-23} D^2]$	Después del recocido. La misma distancia de la escala al espejo.
51°	$L = 52{,}12[1 + 843 \times 10^{-15} D - 5 \times 10^{-23} D^2]$	
70°,5	$L = 52{,}12[1 + 848 \times 10^{-15} D - 5 \times 10^{-23} D^2]$	
99°,5	$L = 52{,}12[1 + 857 \times 10^{-15} D - 5 \times 10^{-23} D^2]$	

Muestra núm. 5.

24°,1	$L = 42{,}11\ [1 + 871 \times 10^{-15}\ D]$	Antes del recocido. Distancia de la escala al espejo 158,5 centímetros $x = 0{,}00641\ \Delta - 0{,}_7 96\ \Delta^3$
17°,7	$L = 42{,}11\ [1 + 818 \times 10^{-15}\ D]$	Después del recocido. Distancia de la escala al espejo. $x = 0{,}00637\ \Delta - 0{,}_7 94\ \Delta^3$.
47°	$L = 42{,}11\ [1 + 833 \times 10^{-15}\ D]$	
18°,8	$L = 42{,}11\ [1 + 822 \times 10^{-15}\ D]$	
70°,4	$L = 42{,}11\ [1 + 845 \times 10^{-15}\ D]$	
100°,9	$L = 42{,}11\ [1 + 857 \times 10^{-15}\ D]$	

Los valores de x que figuran en estos cuadros representan los alargamientos en función de las lecturas Δ en la escala.

Debemos advertir que, por la disposición del aparato empleado, medimos exclusivamente aumentos de longitud, de suerte que el factor que figura en el segundo miembro únicamente es exacto para las temperaturas ambientes. Veremos, en efecto, más adelante que el coefiniente de dilatación de la manganina es del orden de magnitud del correspondiente al cobre, de suerte que para 50 cm. de hilo y un aumento de 100° de temperatura, corresponde una dilatación del orden del milímetro. Al despreciar este cambio cometeremos en los coeficientes de alargamiento un error que no excederá de algunas unidades del último orden á lo más.

La figura 7 representa una curva de cada una de las muestras (la correspondiente á temperatura más baja, después del recocido), trazadas de la misma manera que indicábamos arriba para las resistencias; esto es, la curva representa la ecuación teórica y los puntos tienen por ordenadas las prolongaciones medidas. Las observaciones hechas arriba para la fig. 6 podemos repetirlas aquí, *mutatis mutandi*, y únicamente indicaremos que en la muestra número 4, la existencia del término de segundo orden es indudable.

Analizando los coeficientes directamente, se reconoce inmediatamente que el recocido determina también aquí una disminución del orden de la mitad del valor que corresponde á la variación de α. En cuanto á la muestra número 4, teniendo en cuenta que el recocido ha cambiado el carácter de la curva, convirtiéndola en rama de parábola, la comparación ha de hacerse con $\frac{1}{L}\frac{dL}{dD}$ para $D = 12 \times 10^8$, cuyo valor es 714×10^{15}, dando una disminución de 39×10^{15}.

Respecto de la magnitud de estos coeficientes, debemos notar la concordancia de valores obtenidos cuando se ha repetido una misma serie, como demuestran las de 21° y 22° de la muestra núm. 2, y las de 17°,7 y 18°,8 de la núm. 5. Sin embargo, cuando se comparan unas muestras con otras,

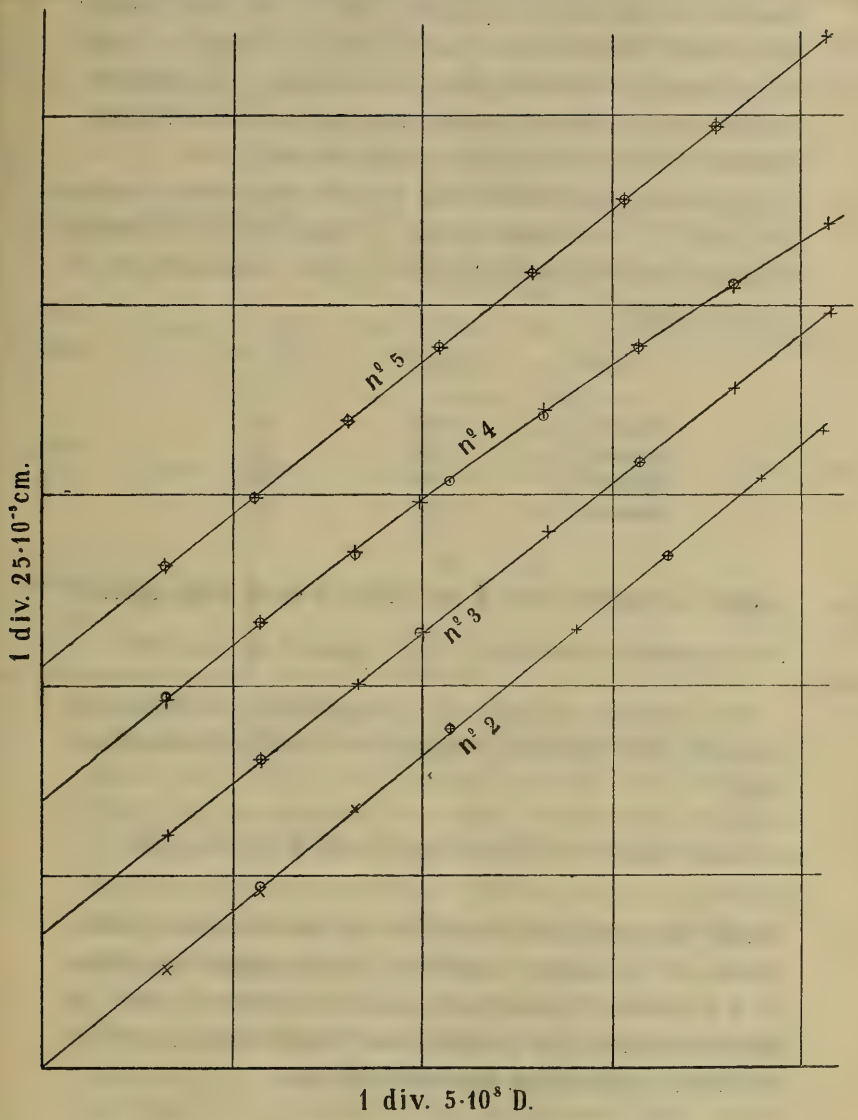


Figura 7.

las diferencias son análogas á las denunciadas para las resistencias, sin que exista correlación, por lo cual no es posible atribuirlas á cambios en la naturaleza de la aleación, como en un principio creímos. Así, las muestras 2 y 3, perfectamente concordantes en la resistencia, no lo son en el alargamiento, y lo contrario parece ocurrir con las 2 y 5.

Llamando β el coeficiente que venimos estudiando, su valor para 50° y su variación con la temperatura, calculados mediante los anteriores resultados, están contenidos en el cuadro adjunto:

Muestra.	$\beta_{50^0} \times 10^{15}$	$\frac{d\beta}{dt} \times 10^{16}$
Número 2...	820	3,7
Número 3...	806	5,0
Número 4...	723	3,0
Número 5...	835	4,7

Para la muestra núm. 4 los números de la tabla anterior corresponden al valor de $\frac{1}{L} \frac{dL}{dD}$ para $D = 12 \times 10^8$.

Para ecuación definitiva del alargamiento por la tracción creemos poder proponer, después de cuanto llevamos indicado,

$$L_D = L_0 \left\{ 1 + [82_3 + 0{,}4_4 (t - 50^\circ)] \times 10^{-15} D \right\},$$

donde los coeficientes numéricos se han calculado prescindiendo de la muestra número 4, y atribuyendo á las número 2 y número 5 doble peso que á la número 3, pues las determinaciones que corresponden á esta última son manifiestamente peores que para las otras dos.

C.—Rigidez.

Muestra	Lon. del hilo	Diámetro.	RIGIDEZ ANTES DEL RECOCIDO		RIGIDEZ DESPUES DEL RECOCIDO		
			Temp.	$n \times 10^{11}$	Temp.	$n \times 10^{11}$	Ecuación.
N.º 2	49,02 *cm.* 48,66	0,0495 *cm.*	20°	4,62	20° 80°,8	4,64 4,42	$n_t = 4{,}54[1 - 0{,}0_3 76(t-50)] \times 10^{11}$
N.º 3	49,13 46,59	0,0493	22°	4,85	27°,5 55°,0 82°,3	4,87 4,81 4,74	$n_t = 4{,}82[1 - 0{,}0_3 48(t-50)] \times 10^{11}$
N.º 4	49,58 46,96	0,0494	29°,5	4,82	27°,0 52°,0 81°,7	4,82 4,76 4,68	$n_t = 4{,}80[1 - 0{,}0_3 56(t-50)] \times 10^{11}$
N.º 5	48,20 41,00	0,0495	27°	4,71	20° 53°,2 81°,3	4,90 4,78 4,72	$n_t = 4{,}80[1 - 0{,}0_3 65(t-50)] \times 10^{11}$

En la columna de las longitudes del anterior cuadro, el primer número que aparece en cada muestra, se refiere á la determinación anterior al recocido, y el segundo á la ejecutada después del mismo. La ecuación que figura en la última columna representa las medidas directas con un error siempre inferior á una unidad del último orden de *n*, y por ende dentro de los errores experimentales.

Nótase inmediatamente la mayor conformidad que se obtiene para esta constante, comparada con las dos anteriores. Únicamente la muestra número 2, para la cual también ha sido inferior el número de determinaciones, difiere de una manera sensible de las restantes, pero adviértase que concuerdan las medidas anterior y posterior al recocido, no obstante haberse ejecutado con montajes independientes y

un mes de intervalo. Quizá realmente se trata de una diferencia de constitución, ó acaso de un error en el diámetro, único elemento común á todas las determinaciones. Sin embargo, este último error habría de exceder de dos milésimas de milímetro, límite que nos parece difícil se haya podido alcanzar. Otra explicación del hecho que discutimos puede encontrarse en la posibilidad de que esta muestra estuviese deformada en alguna porción, distinta de aquella que nos sirvió para la medida del diámetro.

Creemos razonable, en vista de la diferencia señalada, prescindir de la muestra número 2 para el cálculo de la ecuación definitiva, dando el mismo peso á las restantes. De esta suerte hallamos

$$n_t = 4{,}80_6\,[1 - 0{,}0_3 56\,(t - 50)] \times 10^{11}.$$

Se reconoce también inmediatamente de la inspección del cuadro anterior, que el recocido parece aumentar ligeramente el valor de n.

d.—Coeficiente de Poisson y contracción de la sección recta.

Los anteriores elementos nos permiten calcular el coeficiente de Poisson y la contracción de la sección recta del hilo, mediante las fórmulas conocidas

$$\sigma = \frac{1}{2n\beta} - 1,$$

$$S = S_0\,[1 - 2\sigma\beta D].$$

Tal cálculo puede ejecutarse para cada muestra separadamente, y así lo hicimos en la nota preliminar que de este trabajo apareció en los *Anales de la Sociedad Española de Física y Química;* pero consideramos preferible efectuarlo, partiendo de las ecuaciones finales que hemos ido adoptan-

do para cada una de las cantidades que en las fórmulas aparecen. De esta suerte hallamos

$$\sigma = \frac{1}{2 \times 4{,}806 \times 823 \times 10^{-3} [1 - 0.0_3 56\,(t - 50)]\,[1 + 0{,}0_3 54 (t - 50)]} - 1$$
$$= 0{,}264 + 0{,}0_4 2\,(t - 50),$$

despreciando términos de segundo orden. De igual manera, y con la misma aproximación,

$$S = S_0 \{1 - 2\,[0{,}264 + 0{,}0_4 2\,(t - 50)]\,[823 + 0{,}44\,(t - 50)]\,10^{-15}\,D\} =$$
$$= S_0 \{1 - [434 + 0{,}26\,(t - 50)]\,10^{-15} D\}.$$

Dicho se está que estas ecuaciones se refieren á la manganina ya recocida; para las muestras no sometidas á tal preparación hemos de calcular independientemente estas constantes, y sus valores se consignan en el síguiente cuadro:

MUESTRAS	σ	λ
Número 2.....	0,294	-493×10^{-15}
Número 3.....	0,271	-439×10^{-15}
Número 4.....	0,378	$=569 \times 10^{-15}$
Número 5.....	0,224	-390×10^{-15}
Medias.....	0,292	-473×10^{-15}

Es evidente que estas medias tienen un peso casi nulo, pues las diferencias entre los valores que corresponden á cada muestra son muy grandes, y así se explica que aparentemente tanto σ como λ disminuyan con el recocido, siendo así que las fórmulas de definición de ambas exigen un aumento.

e. — Resistividad y su cambio con la tracción.

La fórmula general que define la resistividad en función de la resistencia R de un conductor cilíndrico, de sección S y longitud l, nos permite determinar el cambio de esta constante con la tracción por la fórmula

$$\rho = R_0 \frac{S_0}{l_0} \{ 1 + [511 + 0{,}69\,(t - 50)]\, 10^{-15}\, D \}$$

$$\frac{1 - [434 + 0{,}26\,(t - 50)]\, 10^{-15}\, D}{1 + [823 + 0{,}44\,(t - 50)]\, 10^{-15}\, D},$$

que una vez realizados los cálculos, despreciando los términos de segundo orden, se reduce á

$$\rho = \rho_0 [\, 1 - 746 \times 10^{-15} D \,],$$

ecuación que presenta dos particularidades bien notables: 1.ª, el signo — del coeficiente de tracción, opuesto al que corresponde á la resistencia, de forma que la resistividad es tanto menor cuanto mayor es la fuerza mecánica que en él actúe; 2.ª, que el cambio de esta constante con la tracción es independiente de la temperatura.

La primera de estas conclusiones tiene precedentes en los resultados obtenidos por Tomlinson (1) para el aluminio y magnesio, que presentan igual fenómeno, constituyendo algo así como una transición entre la generalidad de los metales cuya resistencia específica crece con la tracción, de igual suerte que la resistencia total, y aquellos otros, como el niquel y el cobalto, cuyo coeficiente de tracción para valores pequeños de D es también negativo.

Observando que la manganina está constituída en su ma-

---

(1) *Phil. Trans.* CLXXIV p. *Proc. of the R. Soc.* XXXIX, p. 503.

yor parte por cobre, manganeso y niquel, correspondiendo al primero el 84 $_0/^0$, al segundo el 11 $_0/^0$ y al tercero el 4 $_0/^0$, es lógico suponer sea el cobre aquel á quien más se acerque por su manera de comportarse, y así ocurre precisamente para las constantes elásticas, pues de los resultados de Tomlinson se deduce, después de ejecutar las correcciones convenientes por la distinta unidad elegida por la tracción, que en dicho metal $\beta = 878 \times 10^{-15}$ y $n = 4{,}32 \times 10^{11}$, como resultado medio de las tres muestras por este físico estudiadas. Pero respecto del cambio de resistencia la disparidad es completa, porque en el cobre la resistividad crece también con la tracción: ¿puede esto explicarse por la influencia del *Ni*? La pequeña proporción de este metal parece poco favorable á tal interpretación, aun admitiendo que el manganeso, cuya manera de comportarse desde este punto de vista es desconocida, sumara su acción en idéntico sentido.

f.—Influencia de la tracción sobre las curvas de temperatura.

Antes de referir los resultados de nuestras determinaciones respecto de esta cuestión, resultados que son bastante discordantes, y, por tanto, de escaso valor, conviene que discutamos teóricamente la influencia que la tracción debe ejercer sobre la ley de variación de la resistencia con la temperatura. La ecuación que define esta ley puede escribirse

$$(1) \qquad R_t = R_o(1 - a\theta^2 + b\theta^3)$$

representando por θ la temperatura, contada á partir del máximo de resistencia.

Por otra parte, la dependencia entre R y D se puede expresar por

$$R_D = R_o\{1 + [\alpha + \frac{d\alpha}{dt}\theta]\, D\},$$

de suerte que cuando se tomen ambas variables en consideración

$$(2) \qquad R_{D \cdot t} = R_o [1 + (\alpha + \frac{d\alpha}{dt} \theta) D] [1 - a\theta^2 + b\theta^3],$$

ó puesta en la forma de la ecuación (1)

$$R_{D \cdot t} = R_o [1 + \alpha D] \{1 + \frac{d\alpha}{dt} \frac{1}{1 + \alpha D} D\theta - a\theta^2 + b\theta^3\},$$

pues los coeficientes en las potencias θ^3 y θ^4 son despreciables. Tal forma de la ecuación demuestra que la temperatura del máximo cambia con la tracción, y la función que determina tal cambio será

$$\frac{d\alpha}{dt} \frac{D}{1 + \alpha D} - 2a\theta + 3b\theta^2 = 0,$$

ó despreciando αD, que á lo más puede alcanzar 0,001, en presencia de la unidad

$$\frac{d\alpha}{dt} D - 2a\theta + 3b\theta^2 = 0,$$

de donde

$$\theta = \frac{a}{3b} - \frac{a}{3b} \left(1 - \frac{3b}{a^2} \frac{d\alpha}{dt} D\right)^{\frac{1}{2}}$$

que desarrollando el paréntesis por la fórmula del binomio, y despreciando los términos de segundo orden, se convierte en

$$(3) \qquad \theta = \frac{1}{2a} \frac{d\alpha}{dt} D,$$

de suerte que la temperatura de resistencia máxima crecerá linealmente con la tracción D.

Claro está que este cambio determinará una variación en el coeficiente a, si hemos de conservar la fórmula (1) para representar las variaciones de la resistencia con la temperatura, quedando ahora definido por la expresión

$$a' = a - 3b \frac{1}{2a} \frac{d\alpha}{dt} D,$$

que demuestra una disminución en el valor absoluto de dicho coeficiente á medida que aumenta la tracción D.

Para formar una primera idea de la importancia de estos cambios, calculemos los factores de D en ambas fórmulas, tomando para sus diferentes elementos los siguientes valores:

$$\frac{d\alpha}{dt} = 7 \times 10^{-16},$$

$$a = 4 \times 10^{-7},$$

$$b = 2 \times 10^{-9},$$

de los cuales el primero es el que adoptamos arriba, mientras los otros dos son los valores que la repetición de un gran número de medidas de este género, en este trabajo, y con anterioridad á él, nos ha dado como promedio. Con estos datos resulta para valor del coeficiente de D en la primera fórmula un número del orden 10^{-9}, y en el segundo de $3{,}10^{-18}$, de suerte que para la mayor tracción, ligeramente superior á $2{,}10^{-9}$, el aumento de la temperatura del máximo sería de unos 2°, y la disminución en el valor de a podría llegar á 6×10^{9}.

La variación de la temperatura es suficientemente grande para no pasar desapercibida; pero el cambio en a puede quedar velado por los errores experimentales.

Hecha esta discusión, veamos el resultado de las medidas ejecutadas para el estudio de este extremo.

Muestra.	Tracción.	T_m.	ECUACIÓN
Número 2.	410.10^6	$41^0,5$	$R_t=1,02235\,[1-373\times10^{-9}(t-41^0,5)^2]$
	820.10^6	$40^0,6$	$R_t=1,02252\,[1-261\times10^{-9}(t-40^0,6)^2]$
	1651.10^6	$43^0,5$	$R_t=1,02308\,[1-334\times10^{-9}(t-43^0,5)^2+11\times10^{-10}(t-43^0,5)^3]$
Número 3..	414.10^6	$41^0,6$	$R_t=1,02378\,[1-419\times10^{-9}(t-41^0,6)^2+26\times10^{-10}(t-41^0,6)^3]$
	835.10^6	$38^0,9$	$R_t=1,02399\,[1-365\times10^{-9}(t-38^0,9)^2+19\times10^{-10}(t-38^0,9)^3]$
	1243.10^6	$40^0,6$	$R_t=1,02429\,[1-375\times10^{-9}(t-40^0,6)^2+20\times10^{-10}(t-40^0,6)^3]$
	1660.10^6	$41^0,3$	$R_t=1,02434\,[1-385\times10^{-9}(t-41^0,3)^2+27\times10^{-10}(t-41^0,3)^3]$
	2078.10^6	$41^0,6$	$R_t=1,02472\,[1-360\times10^{-9}(t-41^0,6)^2+20\times10^{-10}(t-41^0,6)^3]$
Número 4..	414.10^6	$40^0,4$	$R_t=1\ 04764\,[1-337\times10^{-9}(t-40^0,4)^2+13\times10^{-10}(t-40^0,4)^3]$
	$835\ 10^6$	$39^0,9$	$R_t=1,04755\,[1-373\times10^{-9}(t-39^0,9)^2+22\times10^{-10}(t-39^0,9)^3]$
	1243.10^6	$41^0,3$	$R_t=1,04788\,[1-423\times10^{-9}(t-41^0,3)^2+36\times10^{-10}(t-41^0,3)^3]$
	1660.10^6	$40^0,4$	$R_t=1,04808\,[1-347\times10^{-9}(t-40^0,4)^2+17\times10^{-10}(t-40^0,4)^3]$
	2078.10^6	$41^0,2$	$R_t=1,04829\,[1-361\times10^{-9}(t-41^0,2)^2+19\times10^{-10}(t-41^0,2)^3]$
Número 5..	401.10^6	$35^0,9$	$R_t=0,91356\,[1-382\times10^{-9}(t-35^0,9)^2+8\times10^{-10}(t-35^0,9)^3]$
	805.10^6	$32^0,7$	$R_t=0,91374\,[1-435\times10^{-9}(t-32^0,7)^2+19\times10^{-10}(t-32^0,7)^3]$
	1210.10^6	$35^0,1$	$R_t=0,91387\,[1-480\times10^{-9}(t-35^0,1)^2+25\times10^{-10}(t-35^0,1)^3]$

Bastará dirigir una simple ojeada de inspección al anterior cuadro, para comprender que los resultados experimentales no corresponden á las predicciones teóricas anteriormente indicadas, sin que tales diferencias sea presumible que puedan atribuirse á errores experimentales, pues las ecuaciones representan las medidas directas con bastante exactitud, como puede juzgarse con las figuras 8.ª y 9.ª que corresponden á las primeras curvas de cada una de las muestras. Así, la temperatura que corresponde al máximo de resistencia, en vez de crecer proporcionalmente á la trac-

ción D, como arriba hemos dicho, parece primero disminuir rápidamente para crecer luego, y los coeficientes a, en lugar de disminuir en la forma que se deduce de las anteriores consideraciones, quizá crezca constantemente, ó quizá siga

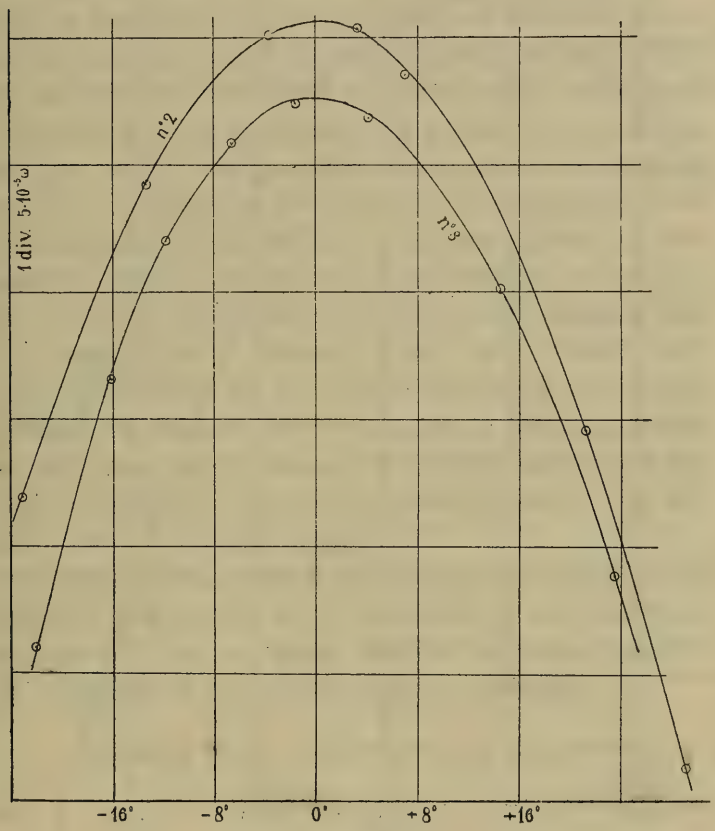


Figura 8.ª

una ley análoga á la que corresponde á la temperatura. ¿Cuál puede ser la razón de tal discrepancia? La dependencia directa de los coeficientes a y b de la tracción D, de la cual prescindimos arriba, parece natural responder; pero. admitiendo únicamente la posibilidad de desarrollar $R(0,t)$ por la fórmula de Maclaurin en las proximidades del pun-

to $0, T_m$, hipótesis de la cual es difícil prescindir, podemos dar á esta magnitud la forma (2), donde a y b son funciones de D que toman valores positivos finitos cuando esta varia-

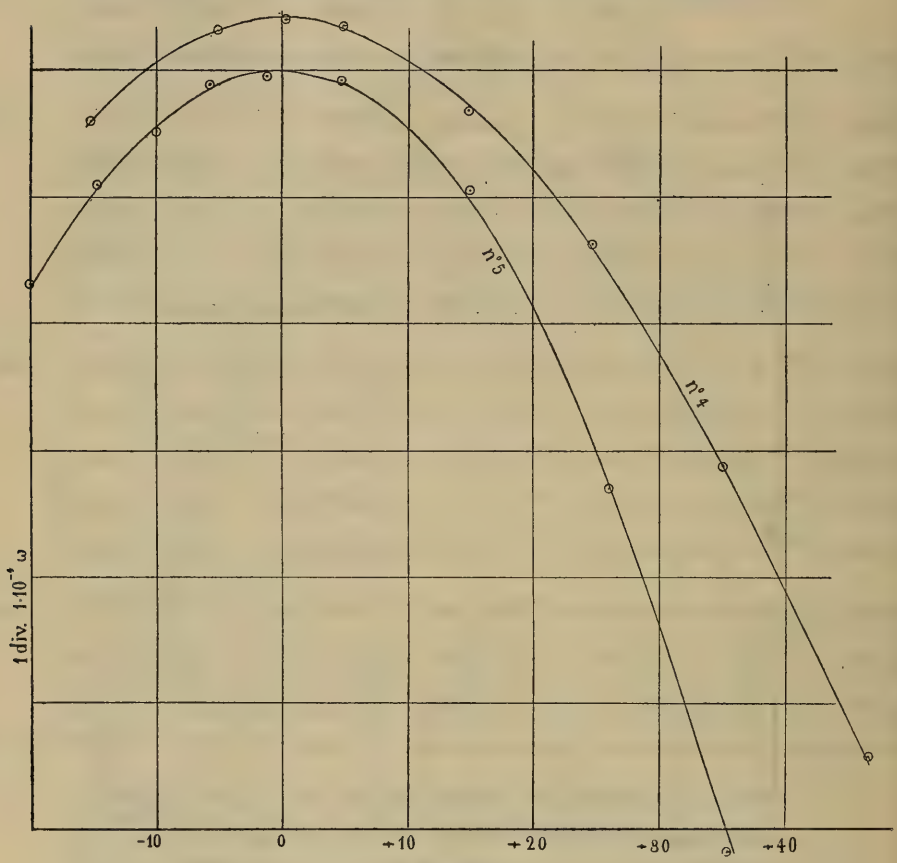


Figura 9.ª

ble tiende hacia cero, con lo cual obtendremos siempre la expresión (3) para la temperatura del máximo, expresión que no puede dar valores negativos cuando D es muy pequeña, sea cual fuere la forma atribuída á a, dentro de los requisitos que la experiencia le impone.

g.—Dilatación térmica.

Es este el último de los problemas que nos proponíamos resolver, sin que hayamos logrado nuestro objeto por defecto de sensibilidad del método utilizado. Habida cuenta de la disposición de nuestros aparatos, la dilatación de la muestra estudiada se determinaba por comparación con la dilatación del cobre, y la diferencia entre ambas ha resultado ser tal, que casi se confunde con los errores experimentales, haciendo muy inseguro su estudio. Esta inseguridad procede principalmente de que su valor no es proporcional á la temperatura, pues parece casi seguro que para temperaturas bajas el cobre se dilata más que la manganina, mientras á temperaturas altas es lo contrario lo que ocurre. Como el coeficiente de dilatación del cobre crece ligeramente con la temperatura, es menester que la manganina posea un cambio de este género muy acentuado; es probable además que este encorvamiento de la gráfica de la dilatación se hace más sensible cuando la tracción es mayor.

De todas suertes, nuestras determinaciones poseen escasa precisión para permitirnos la resolución de este problema, en vista de lo cual se realizan medidas directas actualmente en el Laboratorio de Termología de esta Facultad.

(Laboratorio de Electricidad de la Facultad de Ciencias de la Universidad Central.)

XXV.—Sobre los diagramas de estado de los sistemas estaño-azufre, estaño-selenio y estaño-telurio.

Por Wilhelm Biltz y Werner Mecklenburg

Motivan el presente estudio, en primer lugar, el desacuerdo que, respecto del punto de fusión del sulfuro estanoso, existe entre los datos de Guinchant (1) y los de Pélabon (2), y en segundo lugar los particulares cambios de estado que en aquel cuerpo fundido ha observado uno de nosotros en compañía del Dr. Weigel (3). Gracias á la investigación del diagrama de estado del sistema estaño-azufre, completada con el estudio de los sistemas estaño-selenio y estaño-telurio, que pueden establecerse con absoluta integridad, se han comprobado los resultados que Pélabon obtuviera y que hemos contrastado y completado. Y al contrario, no pudimos reproducir los cambios del sulfuro estanoso en estado de fusión que se han recordado.

Fueron primeras materias, en las preparaciones necesarias para las fusiones, substancias procedentes de la casa C. A. F. Kahlbaum, de Berlín, y en cuanto á la pureza del selenio, se comprobó por medio de su análisis (4), habiendo determinado 100,2 y 99,9 por 100.

---

(1) *Comptes Rendus-134.* 1224-1902.

(2) *Comptes Rendus-142.* 1147-1906.

(3) *Z. S. f. anorg. Chem. 59.* 281-1908.

(4) Para analizar el selenio se hierve con tres veces su peso de cianuro potásico en disolución al 10 por 100. El líquido resultante, después de filtrado, si fuese preciso, es precipitado con ácido clorhídrico concentrado; el precipitado se hierve hasta verlo ennegrecido, se filtra por un crisol Neubauer, se deseca á 100° ó 110° C y se pesa.

No aprovechan, cuando de obtener fundido el sistema estaño-azufre se trata, los sulfuros de estaño comerciales, porque de contínuo les acompañan compuestos de otros metales, materias oxidadas y, en ciertos casos, grandes cantidades de cuerpos salinos extraños, entre los que se cuenta principalmente el cloruro amónico. Debido á tales circunstancias, hemos procedido de la manera siguiente, con intento de lograr un sulfuro de estaño exento de óxidos. En un tubo de porcelana, calentado á 900° C. y lleno de vapor de azufre, introdujimos una mezcla hecha con estaño metálico y dos veces la necesaria cantidad teórica de azufre; de esta suerte se consigue obtener una masa fundida, no homogénea, y un tanto estratificada, de modo que sus capas superiores presentan la característica estructura cristalina de las hojas algo gruesas de sulfuro estanoso, y las inferiores, ya más tenaces, son también más ricas de estaño. Triturado el cuerpo y mezclado de nuevo con igual proporción de azufre que la primera vez, y vuelto á fundir de la manera que es dicha, resulta una substancia perfectamente homogénea. Al enfriarse el sulfuro después de solidificado aumenta de volumen á la temperatura de 400 á 600° C., de modo tan considerable, que bastan 200 gramos para hacer pedazos un tubo de porcelana, cuyas paredes tenían 2,5 milímetros de espesor. Semejante dilatación no corresponde á un punto de transformación.—Fundiendo una mezcla de sus elementos puros en las proporciones teóricas, sólo se forman exiguas cantidades de sulfuro, á causa de volatilizarse el azufre, sin reaccionar.

Preparado el sulfuro conforme queda dicho, no corresponde exactamente á la fórmula teórica. Según el tiempo que dure la acción del calor y la temperatura sostenida luego de haber introducido en el tubo de porcelana la mezcla de estaño y azufre, se obtienen productos diversamente sulfurados, y así la primera materia empleada para nuestros experimentos contenía 76,6 por 100 de estaño y 23,4 por 100 de azufre. Otras substancias fundidas de distinta composición,

prevista á voluntad, se pueden originar con sólo añadir á los cuerpos que forman el sistema inicial, las cantidades de estaño calculadas.

Demuestra el estudio de las masas de fusión y de solidificación que las pérdidas de azufre en las ricas de este elemento, conteniendo más de un átomo de azufre por un átomo de estaño, son bastante considerables, lo cual hace necesario el apelar al análisis para establecer la composición de los régulos fundidos. En estos casos se determina el estaño calcinando el cuerpo en un crisol abierto y pesando el residuo formado por el dióxido estánico. Cuando la proporción de estaño pasa del 80 por 100, la oxidación se efectúa por medio del ácido nítrico, agregándole un poco de ácido clorhídrico, evaporando la disolución luego de tratada con nitrato amónico y calcinando el residuo. Por lo que atañe al azufre del sulfuro, se determinó pulverizándolo, humedeciéndolo con agua, descomponiéndolo en una corriente de anhídrido carbónico calentando lentamente, y agregando poco á poco la suficiente cantidad de ácido clorhídrico de 18 por 100 de concentración; el hidrógeno sulfurado de tal suerte producido era absorbido en una disolución decinormal de iodo, medida y diluída en agua, determinando luego la cantidad de iodo restante (1).

Se prepararon las mezclas de estaño y selenio calentando sus componentes en los tubos de reacción llenos de anhídrido carbónico; comienza la reacción con desprendimiento de luz, que se propaga sucesivamente por la masa. No siendo posible evitar alguna pérdida de selenio por volatilización, se requiere analizar todos los productos fundidos, después de

---

(1) Al ensayar los productos más ricos de azufre, se observa de continuo que al desprenderse hidrógeno sulfurado destila, asimismo, cierta cantidad de cloruro estanoso, que no influye nada en la valoración del iodo resultante. El cloruro estanoso no destila ni con vapor de agua ni con ácido clorhídrico. Véase Lewis A Youtz. Z f anorg Chem. 35. 57-1903.

haber estudiado las correspondientes curvas de solidificación: los productos más pobres de selenio eran tratados en un crisol Rose y en una corriente de oxígeno; los que contienen más de 85 por 100 de estaño, se calcinaban en la forma indicada al tratar del análisis del estaño sulfurado, pesando el dióxido luego de haber eliminado el selenio.

Cuanto á las mezclas de estaño y telurio, se han fundido en las mismas vasijas de porcelana utilizadas para los experimentos ulteriores; y como el punto de ebullición del telurio corresponde á temperatura más elevada que la propia del calor de reacción, no eran de temer pérdidas sensibles de materia.

Para realizar los experimentos objeto del presente estudio, se ha adoptado la disposición de los hornos representada en la figura 1.ª

Hecha la mezcla de estaño metálico con cualquiera de los elementos del grupo del azufre, se introduce en un tubo de fusión Tammann, cerrado por su extremo inferior, y al superior se adapta un tapón de esteatita atravesado por tres tubos capilares, conforme se ve en el centro de la figura: uno de ellos sirve de protector al pirómetro I de Le Chatelier (1), cuyos alambres se aislan uno del otro mediante tubitos capilares contenidos en las porciones incandescentes de la lámpara Nernst; los otros dos se destinaban á dar entrada y salida á la corriente de nitrógeno, que se emplea para evitar la oxidación parcial de las substancias fundidas. Este nitrógeno, que ejercía oficios de atmósfera inerte, hallábase en absoluto privado de oxígeno y de humedad, á cuyo fin, antes de entrar en el tubo de Tammann, y luego que salía del depósito que lo contenía, era purificado haciéndolo pasar suce-

---

(1) Se ha comprobado la exactitud del pirómetro al comenzar los estudios experimentales, y de vez en cuando en el transcurso de los mismos, por medio de los puntos de fusión del cadmio (322°), del antimonio (631°), del eutético cobre-oxígeno (1065°) y del oro (1064°).

sivamante por una disolución concentrada de amoníaco, por una red de cobre arrollada y calentada en un horno de gas, por una disolución diluída de ácido sulfúrico, por otra de

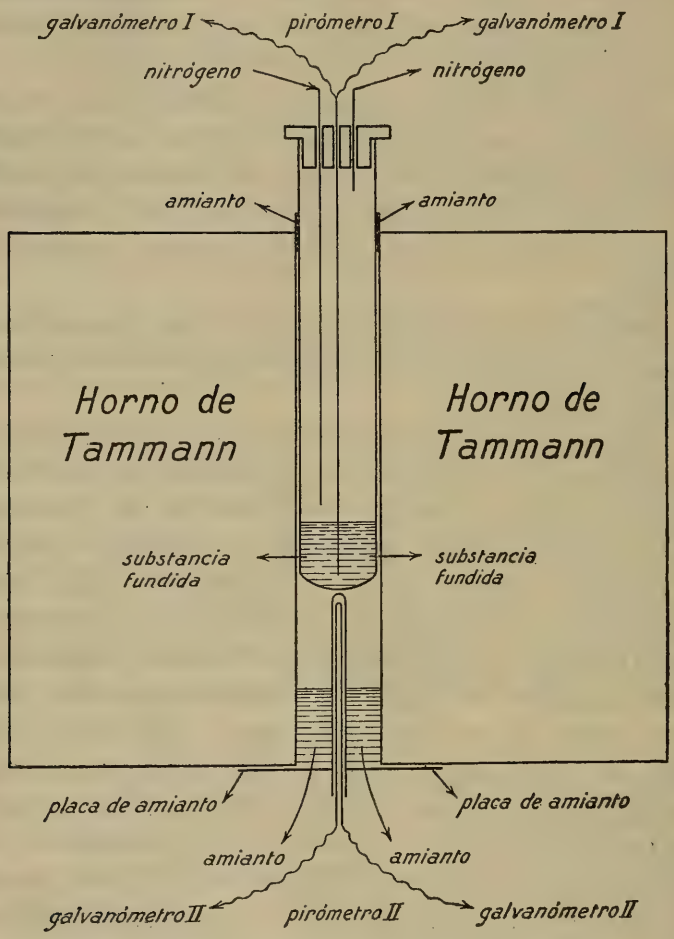


Figura 1.ª—Esquema del horno dispuesto para los experimentos.

pirogalol, y en fin, por ácido sulfúrico concentrado. Para cada ensayo se empleaban de 10 á 20 gramos de materia, y el ya citado tubo de Tammann destinado á contenerla era calentado en un horno de carbón ideado por el mismo autor,

empleando una corriente eléctrica de poca tensión y mucha intensidad, y la temperatura alcanzada se determinaba con el pirómetro II de Le Chatelier, colocado conforme se indica en la parte baja de la figura.

Habíase observado, en una serie precedente de experimentos, cómo el sulfuro estanoso, calentado á temperatura superior á la de su punto de fusión (880° C.), adquiría cada vez mayor tenacidad, luego se solidificaba, y á cosa de 1.000° C. de nuevo se liquidaba, lo cual coincide bastante con los ya citados datos de Guinchant, según los cuales el sulfuro estanoso presenta el fenómeno de la fusión pastosa á las temperaturas de 950 ó 1.000° C. Investigando de nuevo los hechos acaecidos, nos ha sido imposible reproducir las observaciones apuntadas, aun variando repetidas veces el modo de calentar las masas y empleando diversos productos calificados de sulfuro estanoso. Hemos ensayado el cuerpo sintético, de la composición teórica ó de otras cercanas, diversos sulfuros comerciales impuros, el preparado con el sulfuro estánico comercial y, finalmente, otros sulfuros procedentes de antiguas investigaciones. Comprendieron las observaciones practicadas desde los puntos de fusión de las mezclas, á unos 880° C., hasta los puntos de ebullición de las mismas, próximos de 1.230° C.; á veces se advertía en las fundiciones cierta tenacidad; pero, no obstante, en ningún caso nos fué dado reconocer de nuevo, con certeza y exactitud, los curiosos fenómenos de la primera vez, ya indicados. En cuanto al calor absorbido para la «segunda liquefacción», habíase explicado ya en el trabajo anterior como calor de gasificación; mas nada podemos decir seguro acerca de la realidad de los fenómenos entonces observados. Ni el seleniuro ni el telururo de estaño fundidos han presentado variaciones extraordinarias de consistencia.

Para completar el diagrama de estado del sistema *azufre-estaño*, se ha estudiado asimismo la curva de ebullición correspondiente á mezclas que contenían de 11,5 á 20,3 por 100

de azufre. Estableciéronse los puntos de ebullición mediante observación directa del fenómeno, y al propio tiempo por la constancia de la temperatura de la mezcla, mantenida también constante, si la exterior del horno superaba de 100° á 150° C. la de aquélla.

CUADRO I

SISTEMA ESTAÑO-AZUFRE		CURVA DE SOLIDIFICACIÓN	
Número del ensayo.	Azufre por 100.	Comienzo de la solidificación.	Eutético.
1	0,0	—	232° (1)
2	0,2	—	232°
3	0,6	—	232°
4	1,1	—	234°
5	2,2	—	241°
6	3,2	853°	240°
7	7,1	856°	241°
8	11,7	860°	
9	14,0	855°	230°
10	15,0	858°	
11	18,3	863°	
12	20,1	868°	
13	20,3	874°	
14	21,3	880°	
15	21,6	881°	
16	23,4	836°	

(1) Las temperaturas de solidificación en las fusiones 1, 2, 3 y 4, se han determinado empleando un termómetro de mercurio, comprobado por el punto de fusión del estaño puro (232° C.).

CUADRO II

SISTEMA ESTAÑO-AZUFRE		CURVA DE EBULLICIÓN
Número del ensayo.	Azufre por 100.	Ebullición.
1	11,5	1293°
2	13,5	1282°
3	15,6	1276°
4	16,9	1271°
5	17,9	1266°
6	19,0	1251°
7	20,3	1240°

CUADRO III

SISTEMA ESTAÑO-SELENIO		CURVA DE SOLIDIFICACIÓN	
Número del ensayo.	Selenio por 100.	Comienzo de la solidificación.	Eutético.
1	0,0	—	232°
2	3,6	694°	233°
3	7,0	784°	233°
4	10,2	815°	234°
5	26,4	822°	233°
6	39,4	861°	—
7	41,7	834°	635°
8	44,8	742°	638°
9	47,6	709°	652°
10	53,2	640°	—
11	56,3	654°	220?
12	57,7	645°	—
13	57,9	656°	220?
14	62,1	652°	—
15	74,6	628°	—
16	78,1	600°	216°
17	89,2	566°	

CUADRO IV

SISTEMA ESTAÑO-TELURIO		CURVA DE SOLIDIFICACIÓN	
Número del ensayo.	Telurio por 100.	Comienzo de la solidificación.	Eutético.
1	4,8	436°	229°
2	13,0	674°	231°
3	20,0	707°	231°
4	25,9	726°	—
5	35,3	742°	—
6	38,2	744°	—
7	41,7	755°	230°
8	47,6	786°	229°
9	50,0	796°	—
10	56,7	774°	405°
11	63,0	698°	404°
12	68,0	634°	405°
13	70,8	593°	405°
14	73,9	553°	404°
15	77,3	504°	403°
16	84,3	—	405°
17	90,9	422°	403°
18	100,0	455° (1)	—

Se reproducen en las figuras 2.ª, 3.ª y 4.ª los diagramas, respectivamente correspondientes á cada uno de los tres sis-

(1) Resultados de la determinación del punto de fusión del telurio:
Masumi Chikashigé... (Z. S. f. anorg Ch. *54*.50 (1906))... 438°
Pélabon..... (Comptes Rendus *142*.1147 (1906))... 452°
H. Fay y C. B. Gillson (Amer. Chemic. Journ. *27*.81 (1902)) 446°

temas, *estaño-azufre, estaño-telurio* y *estaño-selenio,* los cuales, observados en principio, del lado de las mezclas ricas de estaño, se asemejan bastante. A partir del máximo, mirando de derecha á izquierda los dibujos, la curva del comienzo de la solidificación principia con un rápido descenso, que es luego mucho más lento, de suerte que, sobre todo tratándose del sistema *estaño-azufre,* pudiera creerse que constituía un segmento horizontal, que si tal fuera indicaría miscibilidad incompleta y parcial en el estado líquido; pero en tal caso tendría que extenderse hacia la derecha, hasta llegar á la abscisa de concentración del compuesto respectivo Sn S, Sn Se ó Sn Te; pero en ningún caso fué dado el observar la continuación del referido segmento horizontal. Tratándose de mezclas de sulfuro estanoso y estaño metálico, la homogeneidad de las masas fundidas, á temperaturas superiores á 1.200° C. está asegurada por la elevación del punto de ebullición cuando la concentración del metal aumenta, porque obedece á la ley de Raoult. Siguiendo adelante y hacia la izquierda de las figuras, las curvas de fusión descienden rápidamente hasta el punto de solidificación del eutético, el cual coincide exactamente, en los tres casos estudiados, con el punto de fusión del estaño puro.

Atendiendo á las diferencias de los pesos específicos y á la gran separación existente entre el comienzo y el fin de la solidificación, se ve cómo es posible, en los tres casos, la marcada separación de los componentes, de la manera ya dicha al tratar de la obtención del sulfuro de estaño, en la que suelen formarse dos capas desigualmente compuestas. Sirvan de ejemplo la materia del ensayo núm. 9 del cuadro primero, así estratificada:

	Encontrado.					
Capa superior.....	79,2	por 100 de Sn	y	21,1	por 100 de S.	
Capa media.....	79,3	—	—	y 20,9	—	—
Capa inferior.....	95,7	—	—	y 4,5	—	—

Y la materia del ensayo núm. 8, del mismo cuadro:

	Encontrado.
Capa superior....	80,2 por 100 de Sn y 19,8 por 100 de S.
Capa inferior.....	97,5 — — y 1,7 — —

Todavía es más determinada tal separación en el sistema *estaño-telurio*, cuyas mezclas se caracterizan por su extraor-

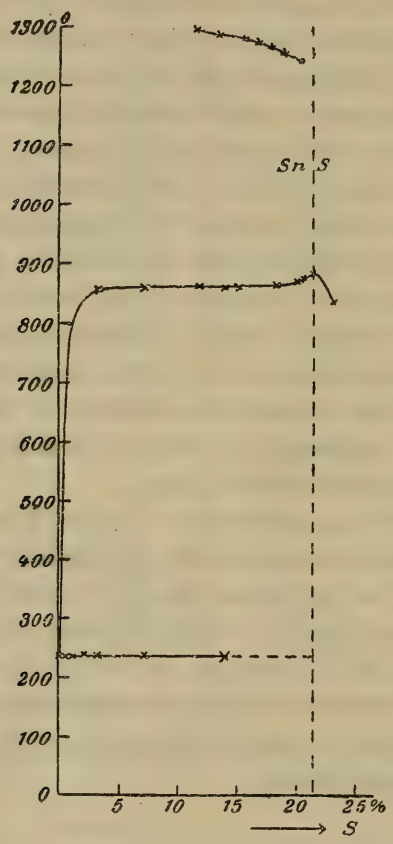


Figura 2.ª — Diagrama de estado del sistema estaño-azufre.

dinaria tendencia á cristalizar, lo cual es causa de las diferencias siempre encontradas de las temperaturas de solidifi-

cación, según se observan estando el pirómetro en las capas superiores ó en las inferiores de las masas fundidas. Esto ha sido el motivo de elegir, para cuantos experimentos se han practicado, idéntica posición del pirómetro, y era la correspondiente á las temperaturas más elevadas.

Son más diferentes entre sí las partes derechas que las izquierdas de los diagramas; en los tres casos la curva, pasando desde el máximo, á la derecha, desciende rápidamente. Tratándose de sulfuro de estaño (fig. 2.ª), y á consecuencia de las grandes é incalculables pérdidas por volatilización del azufre, la curva no se ha podido realizar después de alcanzar mayores tantos por ciento de aquel elemento.

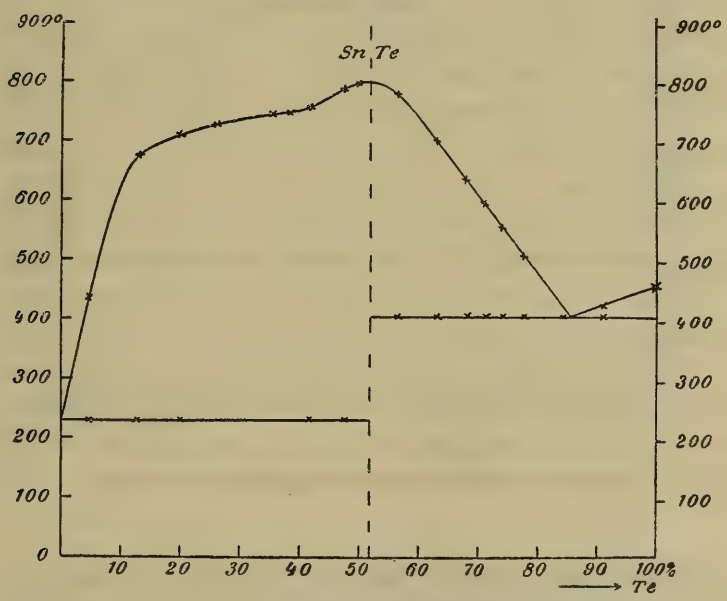


Figura 3.ª – Diagrama de fusión del sistema estaño-telurio.

En el caso del sistema *estaño-telurio* (fig. 3.ª), se obtiene otra curva eutética á la temperatura de 404° C. y este mismo eutético corresponde á su vez á la mezcla de 85 por 100 de

telurio y 15 por 100 de estaño, no pudiendo existir, á lo menos en las condiciones especiales de los experimentos, un compuesto más rico de telurio que el prototelururo.

Respecto del sistema *estaño-selenio* (fig. 4.ª) se han de notar las dificultades de la investigación experimental, motivadas por la volatilidad del selenio y su tendencia á solidifi-

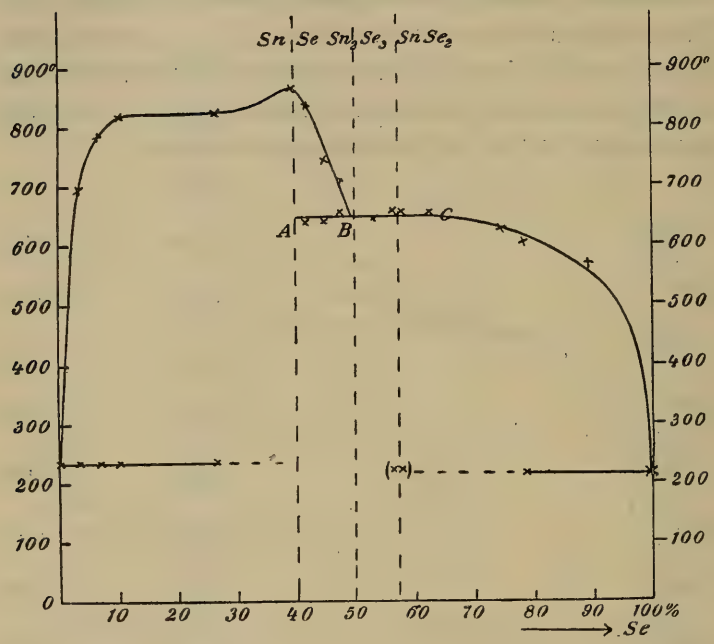


Figura 4.ª—Diagrama de fusión del sistema estaño-selenio.

carse en estado amorfo. Puede explicarse de dos maneras el diagrama obtenido. Quizá se trate de un máximo *semidisimulado*, semejante al que ha observado Vogel en el Instituto de Tammann (1) estudiando el sistema *oro-antimonio*. En-

(1) Z. S. f. anorg. Chem. *50*-151 (1906).

tonces la porción *BC* de la curva sería la continuación rectilínea de la recta eutética *AB*, y de la discontinuidad de la dicha curva habría de inferirse la existencia de un compuesto, que conforme puede verse, sería el sesquiseleniuro de estaño $Sn_2 Se_3$, análogo al sesquisulfuro $Sn_2 S_3$ descubierto por Berzelius é inestable á elevada temperatura. Se demostraría perfectamente la existencia de tal compuesto si la recta eutética correspondiente al eutético constituído por el selenio puro y el sesquiseleniuro se prolongase hasta el punto preciso que señala su concentración y no más adelante; pero esto no ha podido ser comprobado, á causa de lo difícilmente que cristaliza el selenio metálico. Con sólo estudiar la curva de calentamiento de la mezcla que contiene 78,1 por 100 de selenio, se ha reconocido con toda certeza su discontinuidad á 216°C, lo cual permite establecer que el eutético está formado de selenio casi absolutamente puro, siendo su punto de fusión 217°C. En las mezclas que lo contienen en poca cantidad, ó sea entre las concentraciones criticas de 50 á 60 por 100 de selenio, ya no es tan seguro el reconocer los puntos de discontinuidad, y así no ha sido posible marcar exactameute el término del eutético á la izquierda de la recta correspondiente, indicando lo expuesto que no es inadmisible la hipótesis de que la sección *AB* representa una laguna de la miscibilidad en el estado líquido; pero el supuesto parece menos probable, si se tiene en cuenta que el estudio metalográfico de régulos metálicos con 58 por 100 de selenio no ha revelado el menor indicio de estratificación de su masa.

Fueron ejecutadas las investigaciones metalográficas de algunos productos fundidos de los que hemos obtenido en el Instituto de Siderurgia de esta Berg-akademie por el Sr. W. Goldbeck, á quien nos complacemos en enviar, desde aquí, el testimonio de nuestra profunda gratitud, y se consignan en compendio los resultados de semejante trabajo. Distínguense en la figura 5.ª de la lámina I, con la mayor cla-

ridad, bien formados cristales de sulfuro estanoso, en la masa de estaño puro: la proporción de azufre era de 1.1 por 100. Corresponden la figura 6.ª de la misma lámina I y la figura 7.ª de la lámina II al sistema *estaño-telurio* y á mezclas con 40 y 70 por 100 de telurio respectivamente. Vense, en la citada figura 6.ª, los cristales claros de telururo estanoso destacándose sobre el fondo obscuro del estaño, y en la figura 7.ª los propios cristales agrupados de modo particular y esta vez se perciben obscuros sobre el fondo claro, constituído por el eutético compuesto del telururo y del teluro metálico puro. Representa la figura 8.ª de la lámina II el corte transversal de un régulo de selenio que contenía 10 por 100 de estaño y las partículas de seleniuro estanoso aparecen obscuras sobre fondo claro, no tienen forma característica, y en el presente caso, como tratándose de otros régulos más ricos de estaño, ha sido imposible identificar, ni siquiera distinguir, formas cristalinas definidas.

Luego de terminados los estudios experimentales que quedan referidos, tuvimos noticia de un trabajo bastante notable, debido á Henry Fay, que lleva por título *Tellurium-tin-alloys* (1); su diagrama del sistema *telurio-estaño* es muy semejante al que nosotros hemos obtenido; en general, los puntos correspondientes al comienzo de las cristalizaciones observados por Fay, están más bajos que los de nuestra curva y en los pormenores nótanse asimismo algunas diferencias bastante pequeñas. El punto de fusión del telururo estanoso, conforme á las determinaciones del citado investigador, está á la temperatura de 769° C.

Comparando nuestros resultados con los que obtuvo Pélabon, vese al momento la concordancia notable en lo que atañe á los puntos de fusión de los compuestos estanosos, conforme aparece en el siguiente estado:

---

(1) Journ. Amer. Chem. Soc. *29*, 1.265 (1907).

CUADRO V

COMPUESTOS	PUNTOS DE FUSIÓN DETERMINADOS POR	
	PÉLABON	BILTZ Y MECKLENBURG
Sn S.....	880° C	882° C
Sn Se.	860° C	861° C
Sn Te.....	780° C	800° C

Respecto de los otros datos de Pélabon, se han completado, con intento de fijar las rectas eutéticas y establecer con mayor precisión las inflexiones de las curvas de fusión.

Chemisches Laboratorium der Koniglichen Berg-akademie zu Clausthal. i. H.

XXVI. — Viaje de estudio á la Guinea española.

Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales.

Por Gustavo Pittaluga

(Continuación).

Estos siete casos bastan para dar idea de los caracteres epidemiológicos de la tripanosomiasis humana en la isla. Se reflejan en ellos claramente los factores que contribuyen á la probable difusión de la enfermedad. Al propio tiempo se ve que ésta ha tomado carta de naturaleza, quizás desde hace mucho tiempo, en Fernando Póo, y que debe considerársela como endémica en la isla.

El caso de la niña María, nacida y criada en Concepción, y que nunca abandonó el territorio de la isla, es demasiado elocuente. No lo es menos el del bubi *Lepa* (caso núm. IV), sin contar los muy numerosos que vinieron presentándonos en Santa Isabel, dueños de fincas, comerciantes é indígenas, y los que se refieren en los datos recogidos de personas fehacientes.

Todo el valle que se abre enfrente de la bahía de Concepción desde lo alto de la Misión hasta la costa, y quizás desde más arriba, debe considerarse como invadido por la enfermedad. Abundan en ese territorio las moscas del genero *Glossina*, las cuales, en cambio, no se encuentran ni se conocen por los indígenas en el centro de la isla, en la meseta de Moka (1.100 m. sobre el nivel del mar) y en la región comprendida entre los dos lagos de Moka (1.800 m.) y de Loreto (1.262 m.). En ese valle de Concepción, y en la costa

que constituye la bahía del mismo nombre, en los villorrios de chozas bubi que suben desde el mar hasta la Misión, se halla desde hace tiempo establecido el foco endémico de mayor intensidad de tripanosomiasis humana en la isla de Fernando Póo.

Un segundo foco, desde luego más reciente, se halla en los alrededores de San Carlos. La intensidad de la infección aparece aquí menor hasta ahora; pero las condiciones especialísimas en que se encuentra esta zona por la continua inmigración de braceros procedentes de países invadidos por la tripanosomiasis y por la presencia de Glossinas, hace temer que muy en breve el foco de San Carlos adquiera difusión mucho mayor que el de Concepción, si no se opone al desarrollo de la endemia un franco y enérgico valladar.

De la parte Sur de la isla, casi deshabitada, ó habitada por escasos restos de población bubi, nada sabemos. En cambio, por las referencias de los dueños de fincas, no cabe duda de que casos esporádicos de la enfermedad se han observado en factorías ó fincas emplazadas á lo largo de la costa Occidental comprendida entre San Carlos y Punta Fraile, ó de la Oriental, entre Concepción y Santa Isabel. ¿Estos casos eran autóctonos, originarios de la isla, ó importados?

No pudiendo contestar directamente á esta pregunta, nos limitaremos á poner de relieve un hecho incontestable, y es que entran en Santa Isabel, en San Carlos, en la isla, en fin, completamente inobservados, numerosos casos de tripanosomiasis humana, procedentes de lugares infectados de la costa Occidental de Africa ó de la isla del Príncipe.

El ejemplo del portugués Felisardo Godiño (caso III) es harto demostrativo. Lo es también el del otro portugués, observado por el Sr. Rocafort en 1908.

Quedan los casos II *(Dongo*, de Bata), VI *(Domingo De ché*, senegalés) y VII *(Oké*, Lagos), en los cuales puede caber la duda de si llegaron á Fernando Póo enfermos ó adquirieron en la isla la enfermedad.

En el caso del muchacho *Dongo,* que procedía directamente de Bata (Guinea continental española), y que sólo diez meses antes había llegado á Fernando Póo, puede suponerse que el germen patógeno hubiese sido contraído en el continente. (En los pueblos *Bujebas* ó *Combes* que rodean á Bata no es rara la tripanosomiasis.) En tal caso, se pone una vez más de manifiesto la gravedad del peligro que para la isla representa la importación continua de braceros, no sometida á vigilancia ni responsabilidad alguna desde el punto de vista sanitario.

En los casos VI y VII es de suponer que la enfermedad haya sido contraída en la isla, y precisamente en el primero en Concepción, en el segundo en San Carlos.

En resumen: la isla de Fernando Póo posee un foco endémico de tripanosomiasis humana, de relativa intensidad en la bahía de Concepción; otro, inicial ó incipiente, en las cercanías de San Carlos; en los dos se hallan en número considerable las moscas del género *Glossina;* la enfermedad no se ha extendido por toda la isla ni ha logrado alcanzar la difusión é intensidad que le es propia en otras regiones, porque las moscas del género *Glossina* han sido, según toda probabilidad, importadas del continente en época no lejana y no se han extendido todavía mucho, y porque la población indígena de la isla vive en pequeños grupos muy separados los unos de los otros, condición poco favorable para la transmisión del germen; por fin, la isla se halla amenazada de un grave peligro por la continua importación de braceros en gran parte procedentes de lugares infestados par la tripanosomiasis.

Tales son los hechos—no ya las apreciaciones—que se refieren á la existencia del *Trypanosoma gambiense* en la isla de Fernando Póo.

Veamos ahora los datos recogidos en la Guinea continental española, en los dos distritos de Elobey y de Bata.

En el Hospital de Elobey el practicante Sr. Díaz, que desde

hace tiempo conoce el país, nos comunicó haber visto cinco casos típicos de enfermedad del sueño en estos últimos cuatro años. Todos ellos procedían de la cuenca del Muni. En el territorio de los afluentes del Muni, Río Congüe, Río Utongo y Río Utoche, la enfermedad es conocida por los indígenas de las tribus pamues, y hace estragos entre ellos desde hace muchos años. Aquí se halla, sin duda alguna, el foco más importante de la tripanosomiasis humana de las posesiones españolas del Golfo de Guinea. De allí procedía — del puesto de Kogo, en el estuario del Muni, entre la desembocadura del Río Congüe y la pequeña isla de Ibelo — el enfermo N'Bá, que falleció en Elobey durante nuestra estancia (véase el caso VIII). Del pueblo de Ibay, en el alto del Río Utongo (véase el Mapa adjunto), procedían dos casos, de que conserva exacta memoria y datos el Sr. D. Pedro Bengoa; el uno, *Boy*, hijo de un tratante de la Compañía Trasatlántica, que se llamaba Raumbe Anguile, trabajaba á su vez como tratante en la casa John Holt, adquirió la enfermedad del sueño en Ibay y murió en Gabón en 1905; el otro, que se llamaba *Bediquihangue,* y era natural de Elobey grande, vivió largo tiempo en Ibay y allí enfermó; falleció de enfermedad del sueño poco tiempo después. En el territorio del Río Utamboni, que va desde la desembocadura del río hasta Asobla y Mbung, tanto en la parte española como en la parte que se interna brevemente en terreno francés, también es endémica la enfermedad, aunque con caracteres de menor intensidad y difusión. En Wermakogo es conocida por los pamues con el nombre de «*Uyó*», y se han dado casos recientes. En Asobla también nos dieron noticia de un caso; el enfermo nunca había salido de allí. Más arriba, en el alto Utamboni, ya la enfermedad es desconocida. En Mebonde, ni el Jefe Obama ni los demás indígenas supieron darnos indicación alguna acerca de ella.

Los datos y las noticias adquiridas acerca de la enfermedad del sueño durante nuestro viaje por la costa desde Punta

Mosquitos á Bata, en Cabo San Juan, en Río Aye, en Benito, han sido ya referidos en parte, como también los que nos proporcionó el Superior de la Misión de Bata, P. Ferré.

D. Aurelio Santiuste, comerciante, que desde el año de 1899 vive en Bata, nos comunicó haber visto personalmente algunos casos de enfermedad del sueño, y exactamente recuerda *dos* de ellos, indígenas de la tribu «Bujeba», uno de diez y seis años y el otro de veintidós años aproximadamente. Este último, en efecto, estuvo en el Hospital de Bata en 1906-1907 durante un período de cerca de dos semanas. Ignórase en qué fecha exacta falleció. Recuerda el Sr. Santiuste el aspecto característico de este enfermo, demacradísimo, incapaz de todo movimiento.

Uno de los Misioneros de Bata afirmaba haber visto recientemente en Itika, muy cerca ya del Río Campo, en la costa al Norte de Punta M'Bonda, tres casos típicos de la enfermedad.

He aquí ahora los casos observados:

Caso VIII.—*N'Bá*, de la tribu Pamue de Rio Benito, de veinte años de edad, Guardia Colonial. Ha prestado servicio en Kangañe (Rio Utamboni, cerca de Wermakogo) en un principio, y posteriormente en Kogo, donde estuvo diez meses. Ha tenido muchas fiebres.

Observado, por primera vez, el 22 de Julio de 1909, en Elobey.

Examen clínico. — Demacración intensa. — Aspecto caquéctico.— Infartos glandulares submaxilares, parotideos, cervicales, del triángulo de Scarpa, etc., muy considerables.— Hígado grande.— Bazo muy aumentado de volumen.—Pulso frecuente (96-100). Temper. 37°,1.— Erupción de kraw-kraw generalizada.

Examen hematológico, 22-VII-909. - Numerosos embriones de *Filaria.*— 23-VII-909.—Idem íd.—24-VII-909.—*Positivo:* numerosos *Trypanosoma gambiense.*

En esta fecha se le practica la punción lumbar y se le extraen dos cm. cub. de líquido céfalo raquídeo, inoculándose un conejo com.; más tarde se le extraen cinco c. c. de sangre de la vena cefálica del brazo izquierdo y se inocula un mono *(Cynocephalus).*

Falleció en Elobey (Hospital) el 11 de Agosto. Practicada la autopsia á la una de la tarde de este mismo día. El material anatomo-patológico se halla actualmente en estudio.

Caso IX.—*Biong*, de Igeni, pueblo «bujeba» cerca de Rio Aye, trein-

ta años. No ha salido nunca de su pueblo, en el cual, según nos refiere D. Pedro Bengoa, murió de enfermedad del sueño hace un año y medio un muchacho, *Mabián,* de veintidós años, que había estado en Fernando Póo. *Biong* está enfermo desde hace tres años. Empezó entonces á tener fiebres largas, con sudor intenso, que todavía duran. Sobrevino luego invencible tendencia al sueño, cansancio, cefalea.

Observado el 18 de Agosto de 1909 en Rio Aye (Factoría).

Examen clínico.— Caquexia.— Infartos glandulares submaxilares y cervicales evidentes; inguinales muy considerables.

Examen hematológico, 18-VIII-909. – Preparaciones secas, met. Ross, teñidas en fecha posterior con Romanowsky: *Positivo: Trypanosoma gambiense.*

Caso X.—*N'Chaga*, de catorce años, de Mipemba (Punta Indungo). Ha estado hace años en Rio Miyogo, cerca del Rio Utoche. Desde hace un año empezaron los síntomas de la emfermedad del sueño (fiebres, luego tendencia invencible al sueño, demacración, atonía y apatía profundas).

Observado en la Misión de Rio Benito el 19 de Agosto de 1909.

Examen clínico.—Caquexia profunda.—Demacración extremada.— El enfermo no puede andar ni tenerse de pie. Grandes infartos glandul. supraclaviculares, cervicales, occipitales, inguinales, supraepitrocleares, etc.

Examen hematológico, 19-VIII-909. — *Positivo: Trypanosoma gambiense* muy numerosos. Además, numerosas formas endoglobulares jóvenes de parásitos del paludismo (infección tropical por *Laverania malariae).*

Caso XI.—*Manuel Marocue*, quince años, «balengue» del pueblo de Bolondo (Benito), ha vivido siempre en su pueblo. Hace seis meses empezaron los síntomas de la enfermedad.

Observado en Benito el 20 de Agosto de 1909.

Examen clínico.—Demacración.—Infartos glandulares múltiples.— Aspecto estuporoso; atonía y apatía general.

Examen hematológico, 20-VIII-909. — *Positivo: Trypanosoma gambiense.* En sucesivos exámenes, Microfilarias.

A partir del día 21-VIII-909 en el Hospital de Bata.

21-VIII-909.—	Cuenta de glóbulos:	R. 4.060.000.—B.
23-VIII-909.—	ídem	R. 3.124.000.—B. 6.716
23-VIII-909.—2.ª	ídem	R. 3.024.250.—
27-IX 909.—	ídem	R. 1.237.200.—B. 10.936

Caso XII.—*Ibendjele,* de veintitrés años, de Ekuku. Ha estado una vez en Santa Isabel de Fernando Póo. También ha estado en el Río Muni.

Tuvo fiebres intensas y prolongadas hace ocho meses. Tendencia invencible al sueño. Cansancio.

Observado en Ekuku (Bata) el 26 Agosto 1909.

Examen clínico.—La demacración no es muy acentuada. Infartos grandul. múltiples, especialmente cervicales, submaxilares, parotideos, inguinales. Pulso frecuente y pequeño.

Examen hematológico, 26-VIII-1909.—*Positivo: Trypanosoma gambiense* numerosos. *Filaria.*

El 27-VIII 1909 se le extraen 5 c c. de sangre de la vena cefálica del brazo derecho para inocular un conejo com. y una rata *(Mus decumanus).*

28-VIII-1909.—*Positivo: (Trypanos.* abundantes). Cuenta de glóbulos: R. 2.437.200. B. 6.640 p. mm³.

Caso XIII. - *Nay*, veintiséis años—de Ekuku—ha estado en Libreville (Congo francés) y algunas horas en el Río Muni Empezó la enfermedad hace cinco meses con fiebres persistentes, luego con gran cansancio, cefalea y tendencia invencible al sueño.

Examen clínico.—Demacración, caquexia, infartos gland. múltiples, temblor difuso.

Examen hematológico, 26-VIII-1909 (en Bata).—*Positvo: (Trypanos. gambiense).*

Tampoco dejan lugar á dudas estas observaciones hechas en Elobey y en el continente. El enfermo N'Bá (caso VIII) que falleció en Elobey el 11 de Agosto, había nacido en Río Benito y no había salido nunca de la Colonia, habiendo permanecido durante algún tiempo—desde que entró al servicio como guardia colonial—en Kangañe (cerca de Wermakogo, en el Río Utamboni), y después, durante diez meses, en Kogo. La infección debió, pues, ser contraída en uno de los tres sitios. Lo más probable—teniendo en cuenta que el enfermo había salido de Río Benito dos ó tres años antes - es que haya contraído la enfermedad en el Utamboni ó en el Muni.

El caso IX está bien claro. El enfermo, indígena del Río Aye, no había salido nunca de su pueblo. Allí, pues, fué contraída la enfermedad.

El caso XI es igualmente típico. El territorio de Río Benito, en una extensión considerable desde la desembocadura del magnífico río hasta las cataratas, está invadido por la enfermedad. El enfermo Manuel Marocue no había salido nunca

de Bolondo, pueblo cerca del cual se halla emplazada la Misión protestante y en que se han observado varios casos de enfermedad del sueño en los años pasados.

El enfermo N'Chaga (caso X) puede haber contraído la enfermedad de Miyogo, cerca del Río Utoche, ó en su pueblo, en Punta Indongo, en la orilla izquierda del Río Benito. La misma duda existe para el caso XII (Ibendjele). Sin embargo, todo indica que estos dos enfermos habían contraído la tripanosomiasis en el mismo lugar en que vivían, en Indongo el primero, en Ekuku el segundo, puesto que hacía mucho tiempo ya que habían vuelto y los síntomas primeros no se habían manifestado antes del regreso, sino muchos meses después. Lo mismo dígase en lo que atañe al caso XIII; si bien en los alrededores de Libreville (Gabón, Congo francés) la tripanosomiasis humana existe con carácter ligeramente endémico, es probable que el enfermo la haya contraído en Ekuku.

Inútil es repetir á este propósito que en todos los territorios indicados, á lo largo del Río Muni, del Utamboni, del Congüe, del Utongo y del Utoche, del Río Ñañe, del Río Aye, del Río Benito, del Ekuku, del Emvía, y en otros sitios que en el mapa se hallan indicados, se encuentran en gran número las moscas del género «*Glossina*».

En cuanto á los caracteres de la enfermedad, aunque no es este el momento de hablar de ellos, me parece de sumo interés el insistir sobre un dato objetivo que debe considerarse como muy importante: me refiero á los infartos glandulares, especialmente cervicales, parotideos, submaxilares. En mi entender, por lo que hemos observado en nuestra expedición—y me acompañan en esta opinión otros clínicos é investigadores—todo indígena que tenga infartos glandulares de algún relieve y desde algún tiempo, acompañados de fiebres ó de un sindrome de atonía, apatía y decaimiento general, debe considerarse como muy sospechoso y ser sometido á examen como probable tripanosomiásico.

He aquí un criterio que podría facilitar grandemente la selección de los braceros importados en la isla de Fernando Póo, si algún día, como es de esperar, se adoptan medidas para evitar la rápida difusión de la enfermedad.

De todo lo expuesto resulta que en la isla de Fernado Póo se halla ya con carácter endémico la tripanosomiasis humana, aunque la enfermedad no se ha extendído todavía en proporción alarmante, ni ha atacado á los blancos (la proporción puede calcularse aproximadamente en un 2 por 100 de atacados), y que en la Guinea continental española el foco principalísimo de la enfermedad se halla comprendido entre el Río Utamboni y los demás afluentes del Muni al Sur, y el Río Benito al Norte. A lo largo de la costa que va desde el Río Benito hasta Bata la intensidad de la endemia disminuye, aunque alrededor de Bata (Ekuku), y entre Bata y Río Campo (Itika), se encuentran todavía algunos casos. En cambio, desaparece por completo la enfermedad en el territorio comprendido entre Punta M'bonda y Nguambang y recorrido por nosotros para alcanzar el Río Campo (Río Itembo) en el interior.

En todo este territorio, desde N'tum ó Tum hasta la frontera del Kamerun alemán en Ngoambang, los pamues de las tribus Samangunde y Sambira desconocen por completo la enfermedad. A pesar de nuestra insistencia, y del excelente intérprete y guía que llevábamos (1), no nos fué posible averiguar la existencia de un solo caso ni tener noticía de la enfermedad.

El hecho depende, sin duda alguna, de las relaciones

---

(1) El indígena James Malonga, hijo del jefe de Punta M'Bonda, de la tribu Urumi, tratante de la casa Woermann, y conocedor como pocos de aquel territorio, amigo de muchos jefes de pueblos y del mismo Mangebekana, jefe de los Samangunde, fué nuestro guía durante la expedición en el bosque desde Punta M'bonda á Ngoambang.

étnicas y comerciales de las tribus que pueblan estos territorios, con las de la costa por un lado, y por otro lado con las del «hinterland» de la Colonia, que proceden del Sur y del centro de África. Mientras estas últimas tribus—que pueblan en gran parte la región del alto Río Utamboni y la cuenca del Muni y de sus afluentes—están en relación directa con las del Gabón francés y de todo el inmenso territorio, invadido por la tripanosomiasis, del Congo y de sus afluentes, especialmente del alto Sanga; y por otra parte, los «balengues», los «bapujos», los «combes» y los «bujebas» de la costa, que se extienden desde Punta Mosquitos hasta Bata, mantienen constantes cambios comerciales y personales con otras regiones infectadas, proporcionando braceros á Fernando Póo, al Kamerun mismo, á Libreville y á todo el Congo francés, y comunicando con la isla del Príncipe, gravemente invadida por la enfermedad; en cambio los pamues «Samangunde» y los «Sambira», habitantes de la cuenca del Río Itembo, comprendida en los términos por nosotros recorridos, enemigos de los «bujebas» y en hostilidad, oculta ó manifiesta, con todos los pueblos de la costa, alejados por el interior de los focos centrales de la enfermedad (que se hallan hacia el Sur), se mantienen por ahora libres de la grave endemia. Yo ignoro si en las mismas orillas del Río Campo ó Río Itembo, y particularmente en su parte más próxima al mar, en el territorio alemán, se han observado casos de tripanosomiasis. Afirmo, sí, que desgraciadamente se hallan reunidas también en esta región las condiciones necesarias y suficientes para que la enfermedad se desarrolle; y desde luego no es difícil que desde la costa, subiendo por el rio, en cuyas orillas abundan las moscas del género *Glossina*, llegue á invadir pronto aquel mismo territorio todavía indemne por nosotros recorrido desde Punta N'bonda hasta Ngoambang.

Una cosa es, sin embargo, oportuno poner de relieve: me refiero á la mayor probabilidad de procedencia del peligro

de la parte alemana que de la parte española. En efecto, el comercio alemán por el Rio Itembo es de mayor consideración, las embarcaciones que por cuenta de alemanes lo recorren más numerosas, las incursiones de agentes y caravanas alemanas más frecuentes que las españolas, procedentes de la costa (de Bata ó de la desembocadura del Rio Campo). Recordaré tan solo que desde hace dos años no había llegado ningún español de la costa á Ngoambang, y por tanto, ninguna caravana; mientras que agentes comerciales, alemanes, de la casa Kuderling y otras, visitan con frecuencia, acompañados por cargadores y guías indígenas, aquel territorio.

Séanos, pues, permitido insistir sobre este punto para que las medidas profilácticas internacionales que se acuerde adoptar en tal sentido sean equitativamente distribuídas, y las consecuencias de su descuido ó de su abandono imputadas en su día á quien justamente corresponda.

Otra cuestión mucho más importante cabe ahora vislumbrar en estos breves comentarios. Y se refiere á las relaciones entre la isla de Fernando Póo y: 1.°, las islas portuguesas del Príncipe y de Santo Tomé; 2.°, la costa continental de la Guinea española; 3.°, los pueblos de los demás puntos de la costa de la Guinea continental.

La isla del Príncipe, que dista de la costa del Gabón cerca de 100 kilómetros, y de Fernando Póo, aproximadamente, 150, está tan gravemente invadida por la tripanosomiasis, que la Comisión portuguesa recientemente regresada de su viaje de estudios fija en el 25,5 por 100 la proporción de individuos tripanosomiásicos, sobre 1.836 examinados en el curso de poco más de un año (Octubre, 1907. Noviembre, 1908). Como se ve, la endemia en la isla del Príncipe ha adquirido una intensidad desconocida todavía en la isla de Fernando Póo.

Mas — hecho singularísimo — la otra isla portuguesa de Santo Tomé, que se halla 90 millas más al Sur de la del

Príncipe, está hasta ahora completamente libre de tripanosomiasis. Mientras en la del Príncipe se encuentran en número extraordinario las Glossinas, en la de Santo Tomé estas moscas no existen.

Evidentemente no han sido importadas todavía ó no han encontrado condiciones adecuadas para su desarrollo.

El hecho cierto es que Santo Tomé, mucho más importante que la isla del Príncipe por su extensión (50 kilómetros por 30 kilómetros) y por su población y riqueza, se halla indemne de la endemia tripanosomiásica.

Este hecho podría influir muy favorablemente sobre la eficacia de las medidas profilácticas, que es indispensable y urgente adoptar á propósito de Fernando Póo. En efecto, para la isla de Fernando Póo representan un peligro contínuo, inminente y grave los cambios comerciales, las relaciones constantes con la isla del Príncipe. Dos ó tres veces al mes hay correo entre las dos islas: braceros y gentes de la una viene ó va á la otra. El caso del portugués Felisardo Godiño (caso núm. III) es ejemplo suficiente. Adviértase que se trata de un blanco. ¡Imagínese, pues, cuántos indígenas en esas condiciones habrán hecho lo mismo! Afirmemos una vez más que en la grave endemia tripanosomiásica de la isla del Príncipe hay que ver un peligro de consideración para la isla de Fernando Póo.

Por otra parte, no puede negarse tampoco que las relaciones directas con Fernando Póo pueden constituir una amenaza y un peligro para la isla portuguesa de Santo Tomé. Aunque en grado mucho menor que en la del Príncipe, la enfermedad es ya endémica en algunos puntos de Fernando Póo. Y Fernando Póo mantiene relaciones periódicas también con Santo Tomé. Luego á las autoridades portuguesas les importará mucho que las medidas de defensa por ellas adoptadas, ó en camino de adoptarse, con objeto de evitar que del Príncipe la infección se extienda—con hombres ó con Glossinas—á Santo Tomé, puedan aplicarse también á

los procedentes de Fernando Póo. Y teniendo en cuenta este interés internacional podría concertarse la adopción de medidas comunes entre los gobiernos coloniales de España y de Portugal, que garantizaran recíprocamente á Fernando Póo de la invasión del germen procedente del Príncipe y á Santo Tomé de la invasión del que pueda proceder de Fernando Póo.

En cuanto á las relaciones entre Fernando Póo y la Guinea Continental española, es ya cuestión de régimen interno, que con un poco de buena voluntad se resolverá convenientemente. El Reglamento de contrato de braceros para Fernando Póo, que es modelo de disposición legislativa y humanitaria, y la excelente institución del Curador colonial, que reside en Santa Isabel, y que conoce las procedencias de los varios grupos de braceros enviados desde el continente á las diferentes casas ó fincas en Fernando Póo, pueden ser base de un servicio de vigilancia fácil, sin excesivas trabas, pero tal que garantice á la isla de la introducción contínua de nuevos casos de tripanosomiasis.

Los braceros procedentes de Monrovia (República de Liberia), de Lagos, de Accrá ó del Kemerun y del Gabón (estos últimos más escasos), deberían ser sometidos igualmente á examen médico, aunque somero; y no sería inoportuno—si bien de eficacia muy escasa—el que se exigiera en el certificado de origen la declaración de la zona—infectada ó indemne—de que procede el bracero.

Las medidas profilácticas locales y directas contra las moscas del género «Glossina», conocidas con el nombre de moscas *tsé-tsé*, merecen estudio aparte.

Llegado á este punto de mi exposición, me es forzoso declarar, á guisa de conclusión, que si no se toman enérgicas determinaciones y no se hacen serios esfuerzos para oponerse á la invasión de la enfermedad, la tripanosomiasis humana habrá alcanzado dentro de muy pocos años en la isla de Fernando Póo la misma proporción alarmante, el

mismo grado de intensa endemia que actualmente padece la isla del Príncipe; y en el territorio del Muni, del Río Benito y probablemente del Río Campo, llegará á producir daños incalculables, puesto que la pérdida de vidas humanas, aun prescindiendo de razones sentimentales y humanitarias, acarrea el perjuicio económico del encarecimiento de la mano de obra, por la escasez de braceros indígenas y por la progresiva despoblación que ya viene lamentándose como supremo azote en algunas regiones del Centro de Africa, en estos últimos años castigadas en alto grado por la enfermedad.

Madrid.—Laboratorio de Parasitología del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII.

XXVII. — Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales.

POR GUALTERIO M. SECO (*)

(Adicion á la Segunda parte).

TEOREMA IV.—*En la coordinación* y $a_1\ b_2\ c_3$ ... *de grado par indivisible por cuatro* $(4n+2)^{\text{ésimo}}$, *si las letras* $a_1\ c_3\ e_5$ ..., *que tienen subíndice impar, están multiplicadas por* $\sqrt{-1}$, *siendo por hipótesis positivas y reales las de subíndice par, todos los términos de una misma conjugación llevan igual signo.*

Empecemos por averiguar la clase del número de estas letras en los términos de la determinante.

La suma de subíndices de las letras que ocupan lugar par en orden alfabético es par; luego la suma de subíndices de las que ocupan lugar impar será también par, puesto que la suma de todos los subíndices del término ha de ser par, para que, siendo divisible por la cifra par del grado de la ecuación, el término resulte racional. Y como, para que la suma de varios sumandos impares sea par, es indispensable que el número de éstos sea par, el número de letras $a_1\ c_3\ e_5$ ... ha de ser par en todos los términos de la determinante de todo grado par.

Teniendo esto en cuenta, pasemos á la demostración.

Según hemos dicho (2.° corolario del lema), los signos de

(*) Véase tomo V, números 11 y 12, Mayo y Junio, 1907, y tomo VI, números 1, 2, 3, 4 y 5, Julio, Octubre y Noviembre de 1907, de esta REVISTA.

FIG. 5. Sistema estaño-azufre. 1 : 1 por 100 de S.
Corroído por una disolución de 1 por 100 de HNO_3 y en una mezcla de alcohol y éter 1 : 1.—Aumento 1 : 62.

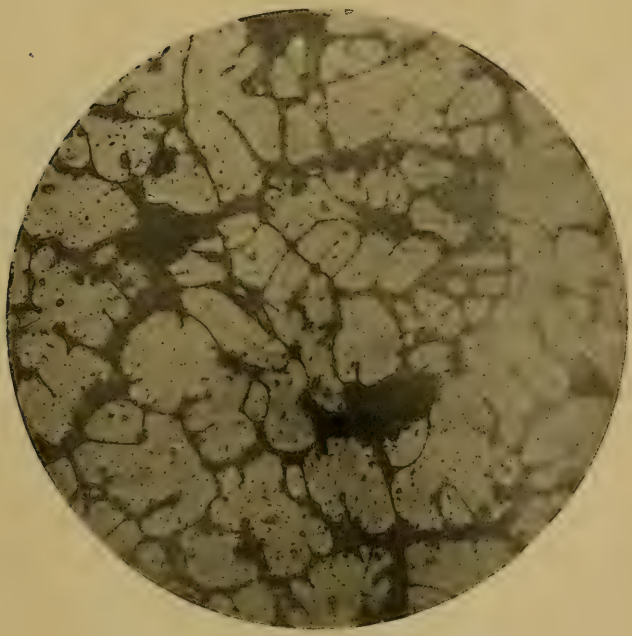


FIG. 6. Sistema estaño-telurio. 40 por 100 de Te
Corroído por una disolución de 30 por 100 de HNO_3 y en una mezcla de alcohol y éter 1 : 1.—Aumento 1 : 62.

FIG. 7. Sistema estaño-telurio. 70 por 100 de Te
Corroído por una disolución de 30 por 100 de HNO_3 y en una
mezcla de alcohol y éter 1 : 1.—Aumento 1 : 62.

FIG. 8. Sistema estaño-selenio. 90 por 100 de Se.
Corroído por una disolución de 10 por 100 de HNO_3 y en una
mezcla de alcohol y éter 1 : 1.—Aumento 1 : 375.

Fototipia de Hauser y Menet.—Madrid

posición de dos términos consecutivos, en una conjugación de matriz de grado par, son contrarios; y, para que se conviertan en iguales, será indispensable que las cantidades contenidas en cada término lleven signos propios, que sean igualmente contrarios (*); y vamos á demostrar que esto ocurre en el caso que nos ocupa.

Sean los términos consecutivos

$$\pm (a^r\, b^s\, c^t\, d^u\, e^v\, f^x \ldots\ldots$$
$$\mp (b^r\, c^s\, d^t\, e^u\, f^v\, g^x \ldots\ldots$$

donde, con arreglo á lo que hemos dicho, la suma $r+t+v+\ldots$ es par, porque representa un número par de letras en el primero de estos términos; y la suma $s+u+x+\ldots$ es también par, por la misma razón aplicada al segundo término; y como la suma de todos los exponentes en el caso del enunciado es

$$r+s+t+u+v+x+\ldots\ldots=4n+2$$

tendremos uno de estos dos sistemas, siendo $p+q=n$:

$$\left.\begin{array}{l} r+t+v+\ldots\ldots=4p \\ s+u+x+\ldots\ldots=4q+2 \end{array}\right\} \text{ ó } \left\{\begin{array}{l} r+t+v+\ldots\ldots=4q+2 \\ s+u+x+\ldots\ldots=4p \end{array}\right.$$

porque no hay otro modo de descomponer la cifra $4n+2$ en dos sumandos pares, uno de los cuales corresponde á las letras de lugar par; y otro, á las de lugar impar.

Al pasar de un término á otro de la conjugación, los exponentes que tenían las letras de lugar par pasan á las de lugar impar, y los de éstas, á aquéllas: por manera que la

(*) Recuérdese que el signo del término conjugado es signo de posición, y que el de las cantidades contenidas en el término es signo propio y específico de estas cantidades.

suma de exponentes de letras de lugar impar es, alternativamenfe, en términos sucesivos, $4q + 2$ y $4p$. Poniendo, pues, en lugar de las letras reales a, c, e..... de subíndice impar, las imaginarias $a\sqrt{-1}$, $c\sqrt{-1}$, $e\sqrt{-1}$ ..... entrará en los términos sucesívos, alternativamente, uno de estos factores:

$$(\sqrt{-1})^{4p} = 1$$

$$(\sqrt{-1})^{4q+2} = -1$$

luego, los términos propuestos se convertirán en

$$\pm(\pm a^r b^s c^t d^u e^v f^x .....)$$

$$\mp(\mp b^r c^s d^t e^u f^v g^x .....)$$

que nos dan una coniugación

$$\pm(T_0 + T_1 + T_2 + ...)$$

de signos iguales en todos los términos, quedando demostrado el teorema.

Escolio.—En el grado $4n$, considerando también que a, c, e..... están multiplicados por $\sqrt{-1}$, habrá conjugaciones que nos darán alternativamente los factores $(\sqrt{-1})^{4p} = 1$, $(\sqrt{-1})^{4q} = 1$; y otras que nos darán $(\sqrt{-1})^{4p+2} = -1$, $(\sqrt{-1})^{4q-2} = -1$. Es evidente que las primeras conservarán sus signos, y las segundas cambiarán los de todos sus términos.

Tercera parte.

Fórmula del coeficiente numérico del término general de la determinante.

Vamos á empezar por reconocer el significado del símbolo $\lfloor\underline{o}$ (*), del cual hemos de hacer uso.

Es indudable que en

$$1.2.3 \ldots\ldots (n-1).n = \lfloor\underline{n}$$

dividiendo ambos miembros por el último factor del primer miembro, si queremos hacer que desaparezcan los denomi-

---

(*) Practicando el análisis de la expresión $1.2.3 \ldots\ldots r = \lfloor\underline{r}$ vemos que, aplicada la fórmula del término de la *mésima* potencia del polinomio $a + b + c \ldots\ldots$

$$T = \frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{s}\,\lfloor\underline{t}\ldots\ldots} a^r b^s c^t \ldots\ldots$$

al polinomio $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ldots\ldots$ nos resulta

$$\frac{\lfloor\underline{m}}{\lfloor\underline{r}\,\lfloor\underline{s}\,\lfloor\underline{t}\ldots\ldots}\left(\frac{1}{a}\right)^r\left(\frac{1}{b}\right)^s\left(\frac{1}{c}\right)^t = \frac{\underline{m}}{\lfloor\underline{-r}\,\lfloor\underline{-s}\,\lfloor\underline{-t}\ldots\ldots} a^{-r} b^{-s} c^{-t} \ldots\ldots$$

ó sea

$$\frac{\lfloor\underline{m}}{a^r\,\lfloor\underline{r}\,b^s\,\lfloor\underline{s}\,c^t\,\lfloor\underline{t}\ldots\ldots} = \frac{\lfloor\underline{m}\,a^{-r}\,b^{-s}\,c^{-t}\ldots\ldots}{\lfloor\underline{-r}\,\lfloor\underline{-s}\,\lfloor\underline{-t}\ldots\ldots}$$

donde, suprimiendo el factor común $\lfloor\underline{m}$, podremos igualar los factores correlativos en esta forma:

$$\frac{1}{a^r\,\lfloor\underline{r}} = \frac{a^{-r}}{\lfloor\underline{-r}}; \quad \frac{1}{b^s\,\lfloor\underline{s}} = \frac{b^{-s}}{\lfloor\underline{-s}}; \quad \frac{1}{c^t\,\lfloor\underline{t}} = \frac{c^{-t}}{\lfloor\underline{-t}} \ldots.$$

Ahora, si tenemos en cuenta que a^{-r} es igual á $\frac{1}{a^r}$, y en la primera de estas igualdades multiplicamos los dos miembros por a^r, resulta $\frac{1}{\lfloor\underline{r}} = \frac{1}{\lfloor\underline{-r}}$, ó sea $\lfloor\underline{r} = \lfloor\underline{-r}$, de modo que esta forma negativa es un mero símbolo que nos indica que hemos operado con

nadores, habremos de restar una unidad á la n contenida en el signo $\lfloor\underline{\ }$, resultando

$$\frac{1.\,2.\,3.\,\ldots\ldots(n-1).\,n}{n}=\frac{\lfloor\underline{n}}{n}=1.2.3.\ldots\ldots(n-1)=\lfloor\underline{n-1}$$

y podremos repetir esta operación, haciendo desaparecer, una á una, las unidades contenidas en el signo; es decir que, á medida que el divisor disminuye en una unidad, ha de dis-

---

exponentes negativos; y si quisiéramos tomar negativamente el valor de $\lfloor\underline{r}$, no podríamos expresarlo en dicha forma, sino en esta otra: $-\lfloor\underline{r}$.

Otro ejemplo de particularidad curiosa: si hacemos $y=\lfloor\underline{x}$, donde, por ser x un número entero, las ordenadas nuesivas serán 1, 2, 6, 24, 120 ....., parece que las ordenadas deben crecer constantemente; sin embargo, si queremos reducir la magnitud de la unidad para que, siendo menor la de las abscisas, sea menor también el error de la curva que construyamos, determinándola por la ecuación $y=\lfloor\underline{x}$, habremos de substituir 1, por la relación entre la unidad primitiva y el número por el cual queramos dividirla para obtener la nueva. Sea este número, a, entero, y mayor que la unidad primitiva, con lo cual, la ecuación se transforma en $y=\lfloor\underline{\frac{x}{a}}$, donde, desarrollando el valor de y hallaremos

$$y=\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{a}\ldots\ldots\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a}{a}\cdot\frac{a+1}{a}\ldots\ldots\frac{x-1}{a}\cdot\frac{x}{a}=\frac{\lfloor\underline{x}}{a^x}$$

ecuación que nos hace ver la existencia de dos ordenadas iguales,

$$y=\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{a}\ldots\ldots\frac{a-1}{a}=\frac{\lfloor\underline{a-1}}{a^{a-1}}$$

$$y'=\frac{1}{a}\cdot\frac{2}{a}\cdot\frac{3}{a}\ldots\ldots\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a}{a}=\frac{\lfloor\underline{a-1}}{a^{a-1}}\cdot\frac{a}{a}=y\cdot\frac{a}{a}=y$$

que sólo se unirán, cuando hagamos $a=oo$.

minuir en una unidad, al verificar la división, la cifra contenida en dicho signo, por lo cual, repitiendo la operación hasta el total de n veces, hallaremos:

$$\frac{\lfloor n}{n} = \lfloor n-1$$

$$\frac{\lfloor n-1}{n-1} = \lfloor n-2$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\frac{\lfloor 3}{3} = \lfloor 2$$

$$\frac{\lfloor 2}{2} = \lfloor 1$$

$$\frac{\lfloor 1}{1} = \lfloor 0$$

Pero, indudablemente, $\frac{\lfloor 1}{1} = \frac{1}{1} = 1$; luego será $\lfloor o = 1$, lo cual quiere decir que *el producto de los cero primeros números enteros es un símbolo de la unidad.*

Así se comprende que, en la fórmula del coeficiente numérico de los términos de la potencia de un polinomio

$$T = \frac{\lfloor m}{\lfloor r \lfloor s \lfloor t \ldots} a^r b^s e^t \ldots$$

la reducción á cero, de uno ó varios de los exponentes r, s, t..... no reduzca el denominador á cero, siendo, en último resultado, $a^0 = 1^0 = \lfloor o = 1$. Podremos, pues, incluir dicha expresión en los denominadores, para que ocupe el

lugar correspondiente á la letra que tenga cero por exponente; y, con este convenio estableceremos el sistema de ecuaciones de primer grado que nos ha de dar las cifras de los coeficientes numéricos de la determinante, de la cual conocemos la parte literal por medio de la conjugación.

Tanto por no agotar el alfabeto, cuanto porque es conveniente para la claridad de los cálculos, representaremos cada coeficiente incógnito por una X, que llevará por subíndices los números de orden alfabético de las letras que entren á formar parte del mismo término, y, sobre cada subíndice, un índice igual al exponente de la misma letra. No se incluirá el índice y subíndice de a, que pueden restablecerse en cuanto nos convenga. Según lo dicho, X^{253}_{378} será el coeficiente del término $a^n c^3 g^5 h^3$.

Y, para practicar metódicamente la operación, empezaremos por plantear las ecuaciones correspondientes á los términos de la forma $(a^{m-2n} b^n) y^n$, lo cual efectuaremos, por ahora, con arreglo al método explicado en la primera parte de esta teoría.

$$\left(X^1_2 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-1}\,\underline{|1}} = m\right) a^{m-2} b y$$

$$\left(X^2_2 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-2}\,\underline{|2}} - \frac{\underline{|1}}{\underline{|0}\,\underline{|1}} X^1_2\right) a^{m-4} b^2 y^2$$

$$\left(X^3_2 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-3}\,\underline{|3}} - \frac{\underline{|2}}{\underline{|1}\,\underline{|1}} X^2_2\right) a^{m-6} b^3 y^3$$

$$\left(X^4_2 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-4}\,\underline{|4}} - \frac{\underline{|2}}{\underline{|0}\,\underline{|2}} X^2_2 - \frac{\underline{|3}}{\underline{|2}\,\underline{|1}} X^3_2\right) a^{m-8} b^4 y^4$$

$$\left(X^5_2 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-5}\,\underline{|5}} - \frac{\underline{|3}}{\underline{|1}\,\underline{|2}} X^3_2 - \frac{\underline{|4}}{\underline{|3}\,\underline{|1}} X^4_2\right) a^{m-10} b^5 y^5$$

$$\left(X_2^6 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-6}\,\underline{|6}} - \frac{\underline{|3}}{\underline{|0}\,\underline{|3}} X_2^3 - \frac{\underline{|4}}{\underline{|2}\,\underline{|2}} X_2^4 - \frac{\underline{|5}}{\underline{|4}\,\underline{|1}} X_2^5\right) a^{m-12} b^6 y^6$$

$$\left(X_2^7 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-7}\,\underline{|7}} - \frac{\underline{|4}}{\underline{|1}\,\underline{|3}} X_2^4 - \frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\,\underline{|2}} X_2^5 - \frac{\underline{|6}}{\underline{|5}\,\underline{|1}} X_2^6\right) a^{m-14} b^7 y^7$$

$$\left(X_2^8 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-8}\,\underline{|8}} - \frac{\underline{|4}}{\underline{|0}\,\underline{|4}} X_2^4 - \frac{\underline{|5}}{\underline{|4}\,\underline{|1}} X_2^5 - \frac{\underline{|6}}{\underline{|4}\,\underline{|2}} X_2^6 - \frac{\underline{|7}}{\underline{|6}\,\underline{|1}} X_2^7\right) a^{m-16} b^8 y^8$$

$$\left(X_2^9 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-9}\,\underline{|9}} - \frac{\underline{|5}}{\underline{|3}\,\underline{|2}} X_2^5 - \frac{\underline{|6}}{\underline{|3}\,\underline{|3}} X_2^6 - \frac{\underline{|7}}{\underline{|5}\,\underline{|2}} X_2^7 - \frac{\underline{|8}}{\underline{|7}\,\underline{|1}} X_2^8\right) a^{m-18} b^9 y^9$$

. . . . . .

Este sistema de ecuaciones de primer grado es muy fácil de resolver, y su estructura no menos fácil de recordar.

El primer término del segundo miembro de cada ecuación es siempre el coeficiente del término $a^{m-n} b^n$ en la $m^{ésima}$ potencia del polinomio $a + b + \ldots\ldots$, del cual término procede el término $a^{m-2n} b^n y^n$ de la determinante. Los demás términos, todos negativos, contienen, por orden riguroso, las equis de las ecuaciones precedentes que figuran en los primeros miembros, multiplicada cada una de ellas por un cierto coeficiente de una potencia del binomio $(a + b)$, siguiendo en este orden: el coeficiente de X_2^{n-1} es el del segundo término de $(a + b)^{n-1}$; el de X_2^{n-2} es el del tercer término de $(a + b)^{n-2}$; el de X_2^{n-3} es el cuarto de $(a+b)^{n-3}$; y, en general, el de X_2^{n-t} es el $(t + 1)^{ésimo}$ de $(a + b)^{n-t}$. Y es evidente que, cuando en la serie de ecuaciones llegamos á un término X_2^{n-t}, en que deba tomarse el coeficiente del último término de $(a + b)^t$, X^{n-t} ya no aparecerá en las ecuaciones sucesivas, porque $(a + b)^t$ no contiene más que $t + 1$ términos. Esto sucederá en la ecuación de X_2^{n-2t}, en

la cual X^{n-t} ocupa el $t^{ésimo}$ lugar, contando de derecha á izquierda en el segundo miembro. La razón de que todo esto ocurra consiste en que, dentro del tantas veces citado esquema, inserto en la primera parte, $X_2^1(a+b)$, $X_2^2(a+b)^2$, $X_2^3(a+b)^3$ ..... ocupan las columnas segunda y tercera; tercera, cuarta y quinta; cuarta, quinta, sexta y séptima ..... respectivamente, ganando un lugar á la derecha, el principio, y dos lugares el fin de cada potencia; y $X_2^n a^{m-n} b^n$ es igual al término $\frac{\lfloor m}{\lfloor m-n \lfloor n} a^{m-n} b^n$, que se halla en la columna p^{m+n}; menos los productos

$$X_2^{n-1} a^{m-2(n-1)} b^{n-1} \times \frac{\lfloor n-1}{\lfloor n-2 \lfloor 1} a^{n-2} b$$

$$X_2^{n-2} a^{m-2(n-2)} b^{n-2} \times \frac{\lfloor n-2}{\lfloor n-4 \lfloor 2} a^{n-4} b^2$$

$$X_2^{n-3} a^{m-2(n-3)} b^{n-3} \times \frac{\lfloor n-3}{\lfloor n-6 \lfloor 3} a^{n-6} b^3$$

.....

que van á parar á la misma columna cuando verificamos las restas para hacer racional la ecuación, siendo racionales los primeros factores de estos productos, porque

$$(ap)^{m-2s}(bp^2)^s = a^{m-2s} b^s p^m = a^{m-2s} b^s k$$

es siempre racional.

Por virtud de lo expuesto, podemos plantear el sistema de ecuaciones, sin previos cálculos, teniendo en cuenta que en la $n^{ésima}$ potencia del binomio, dentro del primer signo

del denominador, la cifra decrece desde n hasta o; y, dentro del segundo signo, crece desde o hasta n, en esta forma:

$$(a+b)^n = \frac{\underline{|n}}{\underline{|n}\,\underline{|o}}\, a^n b^o + \frac{\underline{|n}}{\underline{|n-1}\,\underline{|1}}\, a^{n-1} b^1 \ldots\ldots +$$

$$+ \frac{\underline{|n}}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}}\, a^1 b^{n-1} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|o}\,\underline{|n}}\, a^o b^n$$

Por lo tanto, nos bastará adoptar el método siguiente: la primera ecuación nos da el valor de $X^1_2 = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-1}\,\underline{|1}} = m$ en un solo término; en la segunda tendremos un término negativo $-\frac{\underline{|1}}{\underline{|o}\,\underline{|1}}\, X^1_2$, correspondiente al segundo de $(a+b)^1 = \frac{\underline{|1}}{\underline{|1}\,\underline{|o}}\, a + \frac{\underline{|1}}{\underline{|o}\,\underline{|1}}\, b$; y X^1_2 ya no volverá á aparecer; en la tercera y cuarta, respectivamente, figurarán los términos $\frac{\underline{|2}}{\underline{|1}\,\underline{|1}}\, X^2_2$ y $\frac{\underline{|2}}{\underline{|o}\,\underline{|2}}\, X^2_2$; etc., etc. El último de una ecuación de X^n_2 será X^{n-1}_2, con el coeficiente $\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-2}\,\underline{|1}}$; y, en las ecuaciones sucesivas, este coeficiente sufrirá, de ecuación en ecuación, la disminución en una unidad en el primer signo del denominador, y el aumento de otra unidad en el segundo signo, hasta llegar al término $\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|o}\,\underline{|n-1}}\, X^{n-1}_2$, que será el último de la serie de las X^{n-1}_2, comenzada en $\frac{\underline{|n-1}}{\underline{|n-2}\,\underline{|1}}\, X^{n-1}_2$, según hemos visto. No puede darse mayor sencillez en el planteamiento,

$a^{m-n}b^n$, siendo b la letra que ocupa el primer lugar á la derecha de a, no es más que un caso particular de $a^{m-n}h^n$, ocupando h el lugar $r^{ésimo}$. Vamos, pues, á estudiar el caso general; y, para este fin, averigüemos en qué términos del esquema citado tienen su origen los términos racionales que sólo contienen las letras $a_1 h_{r+1}$ (*), restableciendo la ordenatriz p. Estos términos serán

$$\left.\begin{array}{l} a^{m-(r+1)}\, p^{m-(r+1)}\, h\;\; p^{r+1}\;\; y^r \\ a^{m-2(r+1)}\, p^{m-2(r+1)}\, h^2\, p^{2(r+1)}\, y^{2r} \\ a^{m-3(r+1)}\, p^{m-3(r+1)}\, h^3\, p^{3(r+1)}\, y^{3r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots \qquad (a)$$

donde la suma de exponentes de p siempre nos da m, siendo racional, como sabemos, el término $p^m = k$; y, al mismo tiempo, vemos que la suma de exponentes de las letras $a\,h\,y$ es m también, como debe suceder, porque m es el grado de la potencia del polinomio primitivo.

Para formar el término racional, habíamos multiplicado el término irracional de la potencia citada por $y^t : a^t$, es decir, habíamos restado del exponente de a el exponente que dábamos á y; por manera que, si queremos restablecer el término primitivo, hemos de suprimir la y, sumando su exponente al de a. Efectuando esta operación en los anteriores términos, hallamos:

$$\left.\begin{array}{l} a^{m-1}\, h\;\; p^{m+r} \\ a^{m-2}\, h^2\, p^{m+2r} \\ a^{m-3}\, h^3\, p^{m+3r} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \dots\dots \qquad (b)$$

(*) No se olvide que r es lugar ocupado á la derecha de a, por h, siendo a el punto de partida cero; y los subíndices indican el número de orden en la coordinación $a_1\, b_2\, c_3 \dots\dots h_{r+1}$.

que corresponden á las columnas indicadas por el exponente de p, demostrándonos que no hemos de hallar para nuestro objeto términos comprendidos en las demás columnas, y permiténdonos establecer el primer término de cada ecuación del sistema, porque este término es el coeficiente numérico del término correspondiente hallado en (b); es decir, que es

$$\left.\begin{array}{c} \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-1}\,\underline{|1}} \\ \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-2}\,\underline{|2}} \\ \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-3}\,\underline{|3}} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots \qquad (c)$$

Observaremos que en (a) ya no tenemos el factor y, $y^2\, y^3$ ....., con el cual debíamos contar para establecer el sistema correspondiente á b, sino que ahora este factor se convierte en y^r, y^{2r}, y^{3r} ....., permitiéndonos desarrollar el sistema correspondiente á h, en la forma siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} \left(X^1_{r+1} = \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-1}\,\underline{|1}} = m\right) a^{m-(r+1)}\, h\, y^r \\ \left(X^2_{r+1} = \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-2}\,\underline{|2}} - \dfrac{\underline{|r}}{\underline{|r-1}\,\underline{|1}}\right) a^{m-2(r+1)}\, h^2\, y^{2r} \\ \left(X^3_{r+1} = \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-3}\,\underline{|3}} - \dfrac{\underline{|r}}{\underline{|r-2}\,\underline{|2}} - \dfrac{\underline{|2r}}{\underline{|2r-1}\,\underline{|1}}\right) a^{m-3(r+1)}\, h^3\, y^{3r} \\ \left(X^4_{r+1} = \dfrac{\underline{|m}}{\underline{|m-4}\,\underline{|4}} - \dfrac{\underline{|r}}{\underline{|r-3}\,\underline{|3}} - \dfrac{\underline{|2r}}{\underline{|2r-2}\,\underline{|2}} - \dfrac{\underline{|3r}}{\underline{|3r-1}\,\underline{|1}}\right) a^{m-4(r+1)} h^4 y^{4r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \cdots\cdots (d)$$

Este sistema, que nos da un número de términos bastante considerable para la conjugación, no requiere más cuidado que el de suprimir los términos en los cuales resulte negativa la cifra contenida en el primer signo del denominador. Si esta cifra negativa se halla en el primer término de un segundo miembro, quiere decir que ha terminado el sistema de ecuaciones. También debemos suprimir la ecuación en que este primer término sea $\frac{\underline{|m}}{\underline{|m-m}\ \underline{|m}} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|o}\ \underline{|m}}$, porque corresponderá á un término de la determinante que podremos hallar por medio de la conjugación.

No menos fácil de hallar es la fórmula del coeficiente de un término $a_1^{m-2}\, h_{r+1}\, k_{t+1}$ en el cual h, k, representan las letras que ocupan los lugares $r+1$, $t+1$, de la coordinación: esta fórmula es

$$X^{1\ \ 1}_{r+1,\ t+1} = \frac{\underline{|m}}{\underline{|m-2}\ \underline{|1}\ \underline{|1}} - rX^{1}_{r+1} - tX^{1}_{t+1} \qquad (e)$$

y se demuestra fácilmente, si se tiene en cuenta el método que hemos usado en la primera parte, para hacer racional la ecuación irracional.

Pero, en el momento en que elevemos el grado de h y de k, ó que introduzcamos más letras en la combinación, nos hallamos con la misma dificultad que encontraríamos si quisiéramos ampliar el teorema III de la segunda parte, incluyendo en él nuevos principios: las dificultades de observación y demostración irían en aumento, y no serían compensadas por los resultados prácticos. Nos contentaremos, pues, con dicho teorema y con las fórmulas (d), (e), la segunda de las cuales puede resolverse desde luego en esta forma:

$$X^{1\ \ 1}_{r+1,\ t+1} = (m-1-r-t)\, m \ldots\ldots \qquad (f)$$

con lo cual, podemos hallar rápidamente numerosos términos conjugables.

Pero lo que debemos hacer para aprovechar todas las ventajas del método de conjugación es establecer aisladamente la fórmula de un coeficiente cualquiera. Para este objeto, empezaremos por hallar los coeficientes racionales literales, conjugándolos, como hemos explicado en la segunda parte. Acto seguido, restableceremos la ordenatriz p con los exponentes que la resulten, iguales á la suma de los números de orden alfabético de las letras $a\ b$ ..... $g\ h$ que formen parte del término respectivo; y en cada conjugación subrayaremos el término en que p tenga exponente menor. Hecha esta preparación, necesitamos únicamente conocer los coeficientes numéricos de los términos subrayados, puesto que en cada conjugación estos coeficientes son iguales. Si queremos abreviar aún más la operación, podremos efectuarlo, si recordamos los principios del teorema III de la segunda parte, y las fórmulas (d), (e), (f), de la tercera, aplicándolos desde luego.

La operaeión ha de efectuarse rigurosamente por orden de menor á mayor de los exponentes de p, en los términos subrayados; y vamos á hallar el coeficiente numérico de uno de ellos.

Sea T_m un producto de factores literales, representando por m la suma de sus exponentes. T_{m-r}, T_{m-s}, T_{m-t} ..... son submúltiplos de T_m, cuyos complementos algebráicos para obtener el producto T_m serán, respectivamente, T_r, T_s, T_t ..... Designaremos por C_0, X_0, X_1, X_2 ..... Z_0, Z_1, Z_2 ..... los coeficientes numéricos.

Hallada la parte literal del término $A_{m-n}y^n$ de la determinante, queremos averiguar los datos de la resta que, para conocerlo, hubiéramos efectuado con arreglo al método que dimos en la primera parte de esta teoría. Con este objeto, asi como entonces, para dar forma racional al término, lo multiplicábamos por y^n, y lo dividíamos por a^n, ahora efec-

tuaremos la operación contraria, igualándolo á T_m, que ya no contendrá la letra y:

$$A_{m-n}y^n \times \frac{a^n}{y^n} = A_{m-n}a^n = T_m.$$

Como en nuestros cálculos vamos siguiendo el orden creciente de las potencias de p, conocemos anticipadamente todos los términos de la determinante, $X_0 T_{m-r}y^r$, $X_1 T_{m-s}y^s$, $X_2 T_{m-t}y^t$ ..... que sean submúltiplos del propuesto T_m, y cuyos coeficientes racionales son: $X_0 T_{m-r}$, $X_1 T_{m-s}$, $X_2 T_{m-t}$ .....

Recordando la forma de la resta de donde había de proceder el término propuesto en nuestro primer método, podemos restablecer la operación con arreglo á la fórmula siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} C_0\, T_m \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots C_0 \\ \left.\begin{array}{l} X_0\, T_{m-r} \times Z_0\, T_r \ldots X_0\, Z_0 \\ X_1\, T_{m-s} \times Z_1\, T_s \ldots X_1\, Z_1 \\ X_2\, T_{m-t} \times Z_2\, T_t \ldots X_2\, Z_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} S \\ \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad C_0 - S} \end{array}\right\} \ldots (g).$$

Un término de la $m^{ésima}$ potencia del polinomio

$$(a + b + c + \ldots)$$

era el minuendo.

El substraendo se componía de varios productos, cada uno de dos factores, el primero de los cuales era un coeficiente racional de cierta potencia de y (y^r, y^s, y^t...), hallado anteriormente; y el segundo, un término de la potencia de igual grado del polinomio $a + b + c + \ldots$, complemen-

tario del primer factor, de modo que minuendo y substraendo eran semejantes.

Veamos cómo con estos antecedentes podemos determinar todos los datos: T_m, $X_0\,T_{m-r}$, $X_1\,T_{m-s}$, $X_2\,T_{m-r}$ ... son conocidos por hipótesis; podemos establecer inmediatamente la parte literal complementaria en los factores T_r, T_s, T_t ..., y hallaremos los coeficientes numéricos C_0, Z_0, Z_1, Z_2 ... por medio de la fórmula del término general de la potencia de un polinomio, aplicada, respectivamente, á las expresiones literales T_m, T_r, T_s, T_t ..., que son potencias de los grados señalados por los subíndices. Sumados en S los productos de los coeficientes de los términos del substraendo, según se indica en la fórmula (g), $C_0 - S$ es el coeficiente numérico del término propuesto $A_{m-n}\,y^n$; y sólo faltará que determinemos su signo, al restablecer y^n en lugar de a^n, teniendo en cuenta que, en el polígono ó cuadro eliminante, toda la determinante se halla en un miembro de la igualdad cuyo segundo miembro es cero; y que ahora hemos tomado y en sentido contrario que la tomábamos en nuestro primer método, pues entonces hicimos $y = a + b + \ldots\ldots + h$; y ahora hacemos $y + a + b + \ldots\ldots + h = o$, siendo arbitrario el signo de y en la ecuación de origen; pero, una vez adoptado, inalterable para sus efectos en todas las operaciones sucesivas.

Ejemplo: Aplicar la fórmula (g) á la determinación de 6.° grado. Insertamos el cálculo íntegro para conocimiento de los nuevos suscriptores de esta Revista.

Empezaremos por indagar la parte literal de los coeficientes de y^4, y^3, y^2, y, en la determinante, caracterizados porque la suma de los números de orden alfabético contenídos en los subíndices es seis ó un múltiplo de seis; y, según vayamos hallándolos, los conjugaremos en el cuadro de la determinante de 6° grado, inserto más adelante.

$$\begin{array}{ll} & \underline{a_1 b_2 c_3 d_4 e_5} \\ F(1+1)y^4 \ldots\ldots\ldots\ldots & a e_6 \ldots b d_6 \\ F(1+1+1)y^3 \ldots\ldots & a b c_6 \ldots c d e_{12} \\ F(1+1+1+1)y^2 \ldots & a b d e_{12} \\ \hline \end{array}$$

$$F(2)y^4 \; \frac{a^2_2 \, b^2_4 \, c^2_6 \, d^2_8 \, e^2_{10}}{c^2_6}$$

$$F(2+2)y^2 \begin{cases} a^2 e^2_{12} \ldots b^2 d^2_{12} \\ a^2 b^2_6 \ldots (d^2 e^2_{18}) \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} & a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 \\ & \underline{a^2_2 \, b^2_4 \, c^2_6 \, d^2_8 \, e^2_{10}} \\ F(1+2)y^3 \ldots & a^2 d_6 \ldots b e^2_{12} \\ F(3)y^3 \ldots\ldots\ldots & b^3_6 \ldots (d^3_{12}) \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} & a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 \\ & a_1 b_2 c_3 d_4 e_5 \\ & \underline{a^2_2 \, b^2_4 \, c^2_6 \, d^2_8 \, e^2_{10}} \\ F(1+1+2)y^2 & \begin{cases} \ldots a c d^2_{12} \ldots (b^2 c e_{12}) \\ \ldots a c^2 e_{12} \ldots (b c^2 d_{12}) \end{cases} \end{array}$$

La conjugación nos ha dado $F(1+3)y^2$, $F(4)y^2$, que ya no necesitamos buscar.

Con arreglo á los principios 1.°, 3.° y 4.° del teorema tercero de la segunda parte, estableceremos los coeficientes de los cuatro primeros términos de la primera columna del cuadro de la determinante, repitiéndolos en todos los términos de la conjugación respectiva; y abreviamos la operación, aplicando los principios del teorema tercero de la segunda parte á las nueve primeras conjugaciones.

Ignoramos los coeficientes numéricos de las cinco últimas filas; y, para los fines explicados anteriormente, restablecemos la ordenatriz p, y subrayamos en cada fila el primer término que encontramos con p elevada á menor potencia. Por lo dicho en la segunda parte, al explicar la manera de hallar los coeficientes racionales, en su parte literal, veremos que los términos subrayados deben contener la letra y. Dichos términos subrayados son, por orden creciente de exponentes: $a^2 b^2 y^2 p^8$, $a^2 b c e y p^{13}$, $a^2 b d^2 y p^{13}$, $b^2 d^2 y^2 p^{14}$, $a^2 c^2 d y p^{14}$; y á ellos, por su orden, aplicamos la fórmula (g) que nos da los coeficientes numéricos que aparecen en las conjugaciones respectivas. Al practicar todas estas operaciones, hemos cuidado de alternar los signos + y —, por tratarse de matriz de grado par.

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 4 \lfloor 2} a^4 b^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 15$$

$$- \frac{\lfloor 6}{\lfloor 5} a^4 b \times b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6$$

$$9$$

$$9\, a^4 b^2 \times - y^2 : a^2 = - 9\, a^2 b^2 y^2$$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3} a^3 bce \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 120$$

$$\left.\begin{array}{ll} - 6\, a^3 c . \lfloor 2\, be \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 12 \\ - 12\, abc . \dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2} a^2 e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 36 \\ - 6\, ae . \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2} a^2 be \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & 72 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad 120$$

$$0\, a^3 bce \times y : a = 0\, a^2 bcey$$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 2} a^3 b d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60$$

$$\left.\begin{array}{ll} -6 a^2 d \times \lfloor 3 a b d \ldots\ldots\ldots\ldots & 36 \\ -6 b d \times \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 3} a^3 d \ldots\ldots\ldots\ldots & 24 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad 60$$

$$00$$

$$0 a^3 b d^2 \times y : a = 0 a^2 b d^2 y$$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 2 \lfloor 2} a^2 b^2 d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 90$$

$$\left.\begin{array}{ll} -9 a^2 b^2 \times \dfrac{\lfloor 2}{\lfloor 2} d^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 9 \\ -6 a^2 d \times \dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2} b^2 d \ldots\ldots\ldots\ldots & 18 \\ -6 b d \times \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 2} a^2 b d \ldots\ldots\ldots\ldots & 72 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad 99$$

$$-9$$

$$-9 a^2 b^2 d^2 \times -y^2 : a^2 = 9 b^2 d^2 y^2$$

$$\frac{\lfloor 6}{\lfloor 3 \lfloor 2} a^3 c^2 d \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad 60$$

$$\left.\begin{array}{ll} -6 a^3 c . \lfloor 2 c d \ldots\ldots\ldots\ldots & 12 \\ -6 a^2 d . \dfrac{\lfloor 3}{\lfloor 2} a c^2 \ldots\ldots\ldots\ldots & 18 \\ -3 c^2 . \dfrac{\lfloor 4}{\lfloor 3} a^3 d \ldots\ldots\ldots\ldots & 12 \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad 42$$

$$18 a^3 c^2 d \times y : a = 18 a^2 c^2 d y$$

Tenemos ya todos los datos necesarios, é incluídos los coeficientes hallados, la determinante está completa y se inserta á continuación.

y^6	$-a^6$	$+b^6$	$-c^6$	$+d^6$	$-e^6$
$-6y^4ae$	$+6a^4by$	$-6b^4ca$	$+6c^4db$	$-6d^4ec$	$+6e^4yd$
$-6y^4bd$	$+6a^4ce$	$-6b^4dy$	$+6c^4ea$	$-6d^4yb$	$+6e^4ac$
$-3y^4c^2$	$+3a^4d^2$	$-3b^4e^2$	$+3c^4y^2$	$-3d^4a^2$	$+3e^4b^2$
$+12y^3abc$	$-12a^3bcd$	$+12b^3cde$	$-12c^3dey$	$+12d^3eya$	$-12e^3yab$
$+12y^3cde$	$-12a^3dey$	$+12b^3eya$	$-12c^3yab$	$+12d^3abc$	$-12e^3bcd$
$+6y^3a^2d$	$-6a^3b^2e$	$+6b^3c^2y$	$-6c^3d^2a$	$+6d^3e^2b$	$-6e^3y^2c$
$+6y^3be^2$	$-6a^3cy^2$	$+6b^3da^2$	$-6c^3eb^2$	$+6d^3yc^2$	$-6e^3ad^2$
$+2y^3b^3$	$-2a^3c^3$	$+2b^3d^3$	$-2c^3e^3$	$+2d^3y^3$	$-2e^3a^3$
$0\,y^2abde\,p^{14}$	$0\,a^2bcey\,p^{13}$	$0\,b^2cdya\,p^{13}$	$0\,c^2deab\,p^{18}$	$0\,d^2eybc\,p^{19}$	$0\,e^2yacd\,p^{18}$
$+9y^2a^2e^2\ p^{14}$	$-9a^2b^2y^2\ p^8$	$+9b^2c^2a^2\ p^{12}$	$-9c^2d^2b^2\ p^{18}$	$+9d^2e^2c^2\ p^{24}$	$-9e^2y^2d^2\ p^{18}$
$+9y^2b^2d^2\ p^{14}$	$-9a^2c^2e^2\ p^{18}$	.....	.....	.....	.....
$-18y^2acd^2\ p^{14}$	$+18a^2bde^2\ p^{18}$	$-18b^2cey^2\ p^{14}$	$+18c^2dya^2\ p^{13}$	$-18d^2eab^2\ p^{18}$	$+18e^2ybc^2\ p^{19}$
$0\,y^2ac^2e\,p^{14}$	$0\,a^2bd^2y\,p^{13}$	$0\,b^2ce^2a\,p^{18}$	$0\,c^2dy^2b\,p^{14}$	$0\,d^2ea^2c\,p^{18}$	$0\,e^2yb^2d\,p^{19}$

Comparación de métodos. — En el cálculo anterior, suprimiendo algunos detalles innecesarios cuando el curso de las operaciones está bien comprendido, la suma de letras, cifras y signos, en conjunto, no llega á 500 tipos de impresión. Las operaciones, todas, son de una sencillez elemental.

En el mismo grado, por el método únicamente conocido hasta ahora, consistente en el desarrollo de menores, el índice de 20 pares de menores de tercer orden lleva 300 tipos; y el desarrollo de dichos pares (suponiendo todas las letras distintas) 6.600: en total, 6.900, del cual hay que restar 444 letras que se economiza, por los términos que contienen terceras y cuartas potencias de una letra.

Resulta, pues, que la extensión material de nuestro cálculo es trece veces menor que la del cálculo de las determinantes menores, en sexto grado.

Pero la ventaja mayor que se obtiene aplicando nuestra fórmula consiste en evitar 240 multiplicaciones de letras para el desarrollo de 40 menores; otras 720 multiplicaciones, entre dos términos de tres dimensiones; y la fatigosa suma de 20 polinomios que contienen 720 términos, de seis dimensiones cada uno.

De aquí se deduce que hemos conseguido traer al terreno de la práctica operaciones que, por su desarrollo enorme, se mantenían casi siempre en el terreno de las teorías inaplicables.

Epílogo. — El plan completo de investigación que me había propuesto para ésta, que podemos llamar con exactitud *Teoría general de las determinantes,* abarcaba tres teorías parciales: la de la *potencia racional de las ecuaciones irracionales,* contenida en la primera parte de esta Memoria; la de *conjugación,* inserta en la segunda parte; y la de las *matrices coincidentes,* dando este nombre á las que coinciden en la formación de una misma determinante.

La importancia (por lo menos en el terreno especulativo) de esta tercera teoría podría llegar á ser muy grande, porque

quizá nos permitiera en lo porvenir conocer con exactitud la estructura interna de las ecuaciones algebráicas, que hasta hoy es un misterio en lo tocante á las que pasan del cuarto grado; pero he abandonado la investigación para ocuparme en otros asuntos, y me limito á apuntar la idea, por si algún curioso aficionado quisiera desarrollarla.

Programa de premios para el Concurso del año 1911.

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid, abre concurso público para adjudicar tres premios á los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, á juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.° «*Problemas geométricos más notables, cuya resolu-*»*ción es imposible con el sólo auxilio de la regla y el* »*compás.*»

Su estilo será correcto y el contenido expuesto con claridad, sencillez y la posible concisión.

Comprenderá la historia de tales problemas; su importancia; intentos de resolución por matemáticos de todas épocas, así como los medios propuestos para ello de un modo aproximado.

Se intentará alguna demostración elemental, ó, por lo menos, algún razonamiento que pueda llevar al ánimo de los no muy versados en los últimos adelantos el conocimiento de la imposibilidad de tal resolución con los instrumentos indicados en el enunciado del tema.

Se hará, sin embargo, mención suficiente de las demostraciones principales de tal imposibilidad, basadas en trabajos de matemáticos relativamente modernos, citando autores y obras ó publicaciones en que por vez primera vieron la luz.

2.° «*Teoría y técnica de la fotografía de los colores*».

El autor presentará las pruebas de su trabajo personal.

3.° «*Catálogo de los mamíferos de España*».

El autor de la Memoria relativa á este tema la redactará de modo que comprenda una parte de Bibliografía, con indi-

cación de los autores que han tratado de los Mamíferos de España, de las especies que cada uno cita, y de las correcciones de nomenclaturatura que sean necesarias; otra parte referente á nomenclatura de las especies, incluyendo en un grupo los nombres que deben admitirse, y en otro los que son sinónimos y su correspondencia con los anteriores; otra con la distribución geográfica de las especies; y por fin, la descripción de todas las de España, con mención de las mejores obras y figuras, y cuantas observaciones juzgue conveniente añadir el autor.

La Memoria irá acompañada de buenos dibujos de las especies más raras ó interesantes de la fauna, especialmente de las no figuradas todavía.

La parte bibliográfica estará dispuesta por orden alfabético de autores y cronológico de sus publicaciones, y las tres restantes por orden alfabético de los nombres genéricos y específicos. Al principio de la Memoria figurará la lista de todos los mamíferos conocidos de España por el orden sistemático más en armonía con los adelantos científicos de la época.

En resumen, las Memorias que se presenten optando al premio, con las condiciones señaladas, han de ser una importante adición á la obra publicada por el Profesor Graells en las Memorias de esta Academia sobre el mismo asunto.

2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accesit* y *mención honorífica*.

3.° El premio consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación, una medalla de oro de 60 gramos de peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, ó á persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1.500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hu-

hubiere sido laureada; y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

4.° El *premio* se adjudicará á las Memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

5.° El *accesit* consistirá en diploma y medalla iguales á los del premio y adjudicados del mismo modo, y en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

6.° El *accesit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito á las premiadas y que versen sobre los mismos temas, ó, á falta de término superior con que compararlas, á las que reunan condiciones científicas y literarias aproximadas, á juicio de la Corporación, á las impuestas para la adjudicación ú obtención del premio.

7.° La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo á los de *premio* y *accesit,* que se entregará también en sesión pública al autor ó concurrente agraciado ó á persona que le represente.

8.° La *mención honorífica* se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares é imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente á su publicacióu, por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accesit.*

9.° El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid,* y cerrado en 31 de Diciembre de 1911, á las diez y siete horas; plazo hasta el cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, cuantas Memorias se presenten.

10.° Podrán optar al concurso todos los que presenten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas,

sean nacionales ó extranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

11.° Las Memorias habrán de estar escritas en castellano ó latín.

12.° Las Memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia, dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre ó cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio ó paradero.

13.° De las Memorias y pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, á las personas que los presenten y entreguen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

14.° Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accesit* se abrirán en la sesión en que se acuerde ó decida otorgar á sus autores una ú otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

15.° Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas, y, en el improrrogable término de dos meses, los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad á sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se dé por aludido,

la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian á la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

16.° Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con *accesit*, ni con *mención honorífica*, se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiere declarado. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes á las Memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando, en los dos meses de que trata la regla anterior, los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

17.° Las Memorias originales, premiadas ó no premiadas, pertenecen á la Academia, y no se devolverán á sus autores. Lo que, por acuerdo especial de la Corporación podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado, como modelos de construcción, atlas ó dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etc. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las Memorias que respectivamente les correspondan.

Madrid 31 de Diciembre de 1909.

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

Observatorio Astronómico Nacional de Tacubaya. —Anuario del... para el año de 1908.—Año XXVIII.—México, 1907.

Congreso de los Diputados.—Actas de las Cortes de Castilla publicadas por acuerdo del.. —Tomo vigésimo octavo —Madrid, 1907.

Académie Impériale des Sciences de St. Petersbourg.—Bulletin de l'...—VI Serie, 15 janvier, 1 février.—St. Petersbourg.

Geological Survey of India.—Records of the...—Vol. XXXVI, Part. 2, 1907. Calcutta, 1907.

University of California. – Publications in Botany.—Vol. 3, N.°. 1, pp. 1-302, Pls. 1-3, December 28, 1907.—Compositæ of Southern California By Harvey Monroe Hall.—Berkeley.

Royal Irish Academy.—Proceedings of the...—Volume XXVII, Section C, N.°. 1-2-3.—Dublin, 1908.

Douling B. A. Sc. (D. B.)—Geological Survey of Canada A. P. Low, Deputy Head and Director.—Report on the Cascade Coal Basin Alberta, By Maps, id. Ottawa, 1907.

Geological Survey.—Summary Report of the Department of Mines...—For the Calendar year 1907.—Ottawa, 1908.

Geological Survay of Canada A. P. Low, B. Sc., Director.—Sectión of Mines Annual Report du the Mineral Industries of Canada for 1905.—Ottawa, 1907.

Ells (R. W.)—Geological Survey of Canada A. P. Low, Deputy Head and Director.—Report of the Geology and Natural Resources of the area included in the northwest quarter-sheet, number 122 of the Ontario and Quebec Series comprising portions of the counties of Pontiac, Carleton and Renfreco By... Ottawa, 1907.

Cairnes (D. D.)—Geological Survey of Canada A. P. Low. Deputy Head and Director. Moose Monntain District of Southern Alberta, By...—Ottawa, 1907.

Hoffmann, Ll. D., F. J. C., F. R. S. C. (G. Christian.)—Geological Survey of Canada A. P. Low, Director.—Report of the Section of Chenintry and Mineralogoy, By... Ottawa, 1906.

Ciel et Terre.—28.e anné.—N.° 23, 1.er Fev. 1908; ídem 24, 16 Fev. 1908. Bruxelles.

Manchester Literary & Philosophical Society. — Memoirs and Proceedings of the...—1907-1908.—Manchester.

Laisant (C. A.), etc —L'Intermediaire des Mathématiciens.—Tome XV, 1908.—N.º 1.—Janvier, 1908.—París, 1908.

Ferreira da Silva (A. P.), etc.—Revista de Clínica Pura e applicada.—4.º Anno.—N.º 2. - 15 Fevereiro de 1908.—Porto.

Böklen (Dr. O.). — Mathematisch-naturwissenschaftliche Mitteiluugen begrundet von...—Zueîte serie. Neunter Band, Drittes Heft. December 1907. Stuttgart, 1907.

Observatoire Central Nicolas.—Publications de l'...—Sous la direction de O. Backlund.—Série II, Vol. XVI-XVIII.—St. Petersbourg, 1907.

Missions Scientifiques pour la mesure d'un arc de méridien au Spitzberg entreprises en 1899-1901 sous les unspices des Gouvernements russe et suédois.—Misión Russe.—Tome I.—Tome II.—St. Petersbourg, 1907.

Royal Society of London.—Philosophical Transactions of the...—Series A. Vol. 207, Pp. 393-544.—Series B., Vol. 199, Pp. 341-392.—London, 1908.

Akademie der Wissenschaften.—Abhandlungen der Mathematisch-Physikalischen Klasse der Königlich Bayerischen...—Vierundz wanzigsten Bandes Erst abteilung in der reihe der Deukschriften der LXXXI. Band.—Munchen, 1907.

Gomes Teixeira (Dr. F.).— Obras sobre Mathematica do...—Publicadas por ordem do Governo Portugués.—Volume segundo.—Coîmbra, 1906.

Oppenheimer-Berlin (Carl).—Biochemisches Centralblatt.—Band VI, Numero 24. Registerheft 1908.—Leipzig.

Klein (Felix).—Mathematische Annalen. 65 Band, 2 Heft.—Leipzig, 1908.

Mouchez et F. Tisserand (E.).—Bulletin Astronomique.—Tome XXV, Février 1908.—París, 1908.

Museum of Comparative Zoologie at Harvard College.—Bulletin of the...—Vol. LI, N.º. 8.—Cambridge, January, 1908.

Societatis Entomologicæ Bohemiæ.—Casopis... Acta... Roînik IV, 1907. Cislo 4.—V. Praze.

The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science.—Sixth Series. N.º 86, February 1907.—London.

The Observatory.—A monthly Review of Astronomy.—N.º 392, January. 1908: ídem 393, February, 1908.—London.

The Geographical Journal.—Vol. XXXI.—N.º 2, February, 1908.—London.

Royal Astronomical Society.—Monthly Notices of the...—Vol. LXVIII.—N.º 2, December, 1907.—London.

Institut Océanographique.—Bulletín de l'...—N.º 107, 31 December, 1907. ídem 110, 31 Janvier, 1908.—Mónaco.

(Se continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXIII.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia sexta.... 381

XXIV.—Determinación de algunas constantes físicas de la manganina, por *B. Cabrera* (conclusión)..... 408

XXV.—Sobre los diagramas de estado de los sistemas estaño-azufre, estaño-selenio y estaño-telurio, por *Wilhem Biltz y Werner Mecklenburg*..... 430

XXVI.—Viaje de estudio á la Guinea española. Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por *Gustavo Pittaluga* (continuación)... 446

XXVII.—Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales, por *Gualterio M. Seco*..... 460

Programa de premios para el concurso del año 1911..... 482

Publicaciones recibidas..... 487

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 8

(Febrero de 1910)

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXVIII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia séptima.

SEÑORES:

Estudiando casos particulares de la fórmula de Green, habíamos examinado ya el caso en que las tres componentes F, G, H del vector fuesen funciones independientes de x, y, z, en cuya hipótesis se decía, que el vector era triplemente *escalar* ó que correspondía á tres escalares.

Este caso se presentaba cuando, por ejemplo, la función diferencial

$$Fdx + Gdy + Hdz = o$$

ni era integrable ni existía ningún factor de integrabilidad.

Estudiamos también, como segundo caso particular, aquel en que el vector W era doblemente *escalar*, es decir, en que existía un factor de integrabilidad para la ecuación diferencial precedente. Porque en este caso si ψ era el factor de integrabilidad y φ la integral, es claro que F, G, H dependían de estas dos últimas funciones.

Introduciendo dicha condición en la fórmula de Green, ésta tomaba la forma siguiente

$$\iiint_v \left(\psi\,\Delta + \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\psi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\psi}{dz}\right) d\tau = \int\int_s \psi\,\frac{d\varphi}{dn}\,d\sigma$$

é invirtiendo las dos funciones φ, ψ, es decir, poniendo cada una en lugar de la otra, obteníamos una expresión análoga á la precedente, y restando ambas, llegábamos á una fórmula de transformación de integral triple en integral doble, que es de mucho uso en Física matemática, como veremos más adelante.

Pero al terminar la conferencia insinuábamos esta duda. ¿Es legítima la inversión de las funciones φ y ψ? Sí; es legítima, pero no es evidente, aunque la demostración, como veremos, es elemental y sencillísima.

No es evidente, repetimos, porque, al fin y al cabo, ambas funciones φ, ψ, tienen significación completamente distinta en el problema: la primera es la integral que resulta cuando

$$Fdx + Gdy + Hdz$$

se hace integrable; la segunda el factor inverso de integrabilidad, cosa bien diferente de la primera.

Para demostrar que la inversión de que se trata puede hacerse, hay que demostrar, que siempre existe una ecuación diferencial

$$F_1 dx + G_1 dy + H_1 dz = o$$

tal, que su integral es ψ y que su factor inverso de integrabilidad es φ, en cuyo caso, aplicando la misma fórmula de Green al vector cuyas componentes sean F_1, G_1, H_1, se obtendrá la fórmula indicada con las dos funciones φ y ψ invertidas.

Veamos ahora cuál es la demostración.

Hallamos en la última conferencia que F, G, H se expresaban en valores de φ y ψ de este modo:

$$F = \psi \frac{d\varphi}{dx}, \; G = \psi \frac{d\varphi}{dy}, \; H = \psi \frac{d\varphi}{dz}.$$

Agregando y quitando la misma cantidad á los segundos miembros, y siendo esta cantidad la que se expresa para cada ecuación, tendremos

$$F = \psi \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d\psi}{dx} - \varphi \frac{d\psi}{dx}; \; G = \psi \frac{d\varphi}{dy} + \varphi \frac{d\psi}{dy} - \varphi \frac{d\psi}{dy};$$

$$H = \psi \frac{d\varphi}{dz} + \varphi \frac{d\psi}{dz} - \varphi \frac{d\psi}{dz}$$

ó bien

$$F - \psi \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d\psi}{dx} = \varphi \frac{d\psi}{dx}; \; G - \psi \frac{d\varphi}{dy} + \varphi \frac{d\psi}{dy} = \varphi \frac{d\psi}{dy};$$

$$H - \psi \frac{d\varphi}{dz} + \varphi \frac{d\psi}{dz} = \varphi \frac{d\psi}{dz}.$$

Suponiendo conocidas las dos funciones φ, ψ, y esto basta para demostrar la posibilidad del problema, los primeros miembros son funciones perfectamente determinadas, que podremos designar por F_1, G_1, H_1, y son las que buscamos; en cuyo caso tendremos,

$$F_1 = \varphi \frac{d\psi}{dx}, \; G_1 = \varphi \frac{d\psi}{dy}, \; H_1 = \varphi \frac{d\psi}{dz}$$

ó bien

$$\frac{1}{\varphi} . F_1 = \frac{d\psi}{dx}, \; \frac{1}{\varphi} G_1 = \frac{d\psi}{dy}, \; \frac{1}{\varphi} H_1 = \frac{d\psi}{dz};$$

donde se ve claramente, que si se multiplica por $\frac{1}{\varphi}$ la ecuación diferencial

$$F_1 \, dx + G_1 \, dy + H_1 \, dz = o$$

resulta una diferencial exacta

$$\frac{d\psi}{dx}dx + \frac{d\psi}{dy}dy + \frac{d\psi}{dz}dz = o.$$

Es decir, que el factor de integrabilidad es $\frac{1}{\varphi}$ y la integral ψ; ambas funciones resultan, pues, invertidas, según pretendíamos demostrar.

Con esto damos por terminado, por ahora, el caso particular de la fórmula de Green, en que el vector W es doblemente *escalar.*

***

Tercero. Examinemos, por último, el caso en que el vector W es simplemente escalar, es decir, que las tres componentes F, G, H dependen de una sola función, y esta dependencia será, como siempre, el resultado de una hipótesis sobre la ecuación

$$Fdx + Gdy + Hdz = o$$

que nos ha servido como tipo.

Suponemos en este tercer caso, como ya dijimos en la última conferencia, que esta ecuación es una diferencial exacta, y, por lo tanto, integrable desde luego. Será, pues,

$$\frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = o$$

y, por consiguiente,

$$F = \frac{d\varphi}{dx}, G = \frac{d\varphi}{dy}, H = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Resulta, como decíamos, que F, G y H sólo dependen de una función φ, y por eso al vector W, cuyas componentes son F, G, H, se le llama vector de un solo escalar.

Sustituyendo en la fórmula de Green fundamental,

$$\iiint_v \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dG}{dy} + \frac{dH}{dz}\right) d\tau = \iint_s (F\alpha + G\beta + H\gamma)\, d\sigma,$$

los valores anteriores de F, G, H, tendremos desde luego,

$$\iiint_v \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} + \frac{d^2\varphi}{dz^2}\right) d\tau =$$
$$= \iint_s \left(\frac{d\varphi}{dx}\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\beta + \frac{d\varphi}{dz}\gamma\right) d\sigma;$$

y empleando la notación Δ, que ya conocemos, para el primer miembro, y aplicando al segundo la transformación que explicábamos en la conferencia precedente, es decir, calculando la diferencial de φ cuando el punto de la superficie varíe sobre la normal, tendremos esta fórmula sencillísima

$$\iiint_v \Delta d\tau = \iint_s \frac{d\varphi}{dz} d\sigma$$

en que el segundo miembro, sea cual fuere su forma, expresa siempre el flujo del vector W por toda la superficie S.

La fórmula última es muy importante, y de ella pueden deducirse varias consecuencias que no haremos más que indicar; pero no ha de olvidarse que es nuestro propósito en este curso ir mezclando en cierto modo, para evitar la monotonía, las cuestiones de análisis puro con sus aplicaciones á la Física matemática.

***

Si en la última fórmula hacemos aplicación á un punto del volnmen V, rodeado por una superficie infinitamente pequeña S, y tomamos, por lo tanto, del primer miembro un solo elemento, y del segundo el flujo correspondiente á la superficie infinitamente pequeña s que rodea al punto considerado, tendremos

$$\Delta d\tau = \text{fluj.}\, s$$

ó bien

$$\Delta = \frac{\text{fluj.}\, s}{d\tau}$$

y esta fórmula nos demuestra un teorema importante de una manera, por decirlo así, intuitiva, al paso que la demostración directa sería mucho más larga; y el teorema es éste.

La expresión Δ, ó sea

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \qquad (1)$$

es constante en forma y valor, sea cual fuere el sistema de coordenadas trirectangulares á que se refiera el sistema ó abreviadamente, es una invariante.

Claro es que la forma es invariable porque es lo que constituye su definición, de suerte que si viene dada por la expresión anterior cuando los ejes son x, y, z, cuando los nuevos ejes trirectangulares sean x_1, y_1, z_1 será su forma

$$\frac{d^2 \varphi_1}{dx_1^2} + \frac{d^2 \varphi_1}{dy_1^2} + \frac{d^2 \varphi_1}{dz_1^2} \qquad (2)$$

siendo $\varphi_1 (x_1, y_1, z_1)$ la función en que se convierte $\varphi (x, y, z)$ cuando se sustituyen x, y, z en valores de x_1, y_1, z_1 según las fórmulas de transformación de coordenadas.

Claro es que esto puede demostrarse directamente, como hacíamos en el curso anterior para varios ejemplos; pero por

el análisis precedente y por la última fórmula se demuestra de una manera inmediata.

Porque, fíjense bien mis alumnos: si alrededor del punto que se considera se traza una superficie infinitamente pequeña, invariable para todos los sistemas de coordenadas que se consideren, como los vectores aplicados á los puntos de la superficie son siempre los mismos, por más que en un sistema sean F, G, H sus componentes y en otro sistema F_1, G_1, H_1, el flujo será una cantidad constante para todos los sistemas de ejes coordenados, puesto que para cada punto del volumen la superficie elegida y los vectores son los mismos; luego el mismo será el valor de Δ y el de Δ_1.

Además, aunque el segundo miembro está dividido por el elemento del volumen, éste también permanece invariable como se demostraría fácilmente.

Cuando decimos que el valor de Δ es el mismo, queremos decir que es el mismo para todos los sistemas de ejes coordenados, aunque claro es que podrá variar de un punto á otro del sistema variable.

***

La misma fórmula

$$\Delta = \frac{\text{flujo } s}{d\tau}$$

nos conduce en el caso particular de la atracción newtoniana á dos fórmulas fundamentales de la electro-estática: la de La Place y la de Poisson.

Decimos que nos conduce, no decimos que nos demuestra de una manera completa, porque para ello necesitaríamos hacer un estudio de las derivadas que entran en la fórmula respecto á su continuidad, como explicaremos más adelante.

Por ahora y provisionalmente prescindamos de esta circunstancia.

En vez de ser el vector W un vector abstracto, supongamos que es una fuerza, que obedece á la ley de Newton.

Fijemos las ideas.

Sean (fig. 19).

S una superficie cerrada simplemente conexa para simplificar la explicación.

m una masa de materia ponderable ó eléctrica ó de otra cualquiera que obedezca á la ley de atracción newtoniana.

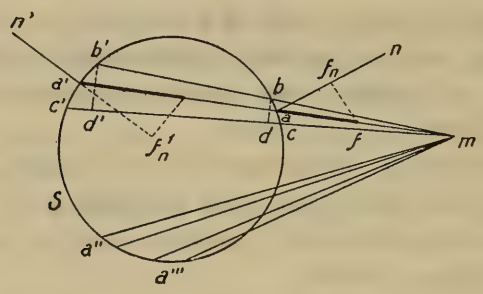


Figura 19.

$m\,a\,a'$ una recta que parta de m y que corte á la superficie en dos puntos a y a'.

$b\,c$ y $b'\,c'$ dos elementos de superficie correspondientes á los puntos a, a' comprendidos en un mismo cono infinitamente estrecho cuyo vértice esté en m.

m ejercería, por ejemplo, acciones atractivas en a y en a' si en estos dos puntos existieran masas ó flúidos, sobre los cuales pudiera ejercer su acción m, y lo mismo decimos de las áreas $b\,c\,b'\,c'$.

De aquí resultarían dos vectores en los puntos a, a', que representaremos por f, f'.

Si en la superficie no existen masas ponderables ó eléctricas, sobre las cuales ejerza su acción m, estos vectores, en

a antigua Física Matemática, serían puramente ideales, meramente *posibilidades*; y por el contrario, si las superficies $bc\ b'c'$ contienen materia ó flúido, entonces los vectores serán reales, serán verdaderas fuerzas.

Supongamos que este es el caso: repitiendo lo expuesto para todos los puntos de la superficie, resultará un flujo de vectores, que vamos á definir inmediatamente.

Admitamos que sobre toda la superficie S existe un flúido ó capa uniforme, cuyos elementos reciben de m una atracción que se ejerce según la ley newtoniana.

Sea δ la densidad superficial de dicho flúido.

La masa sobre bc será, llamando $d\sigma$ á la superficie bc,

$$\delta . d\sigma$$

y la fuerza f

$$f = \frac{\delta . d\sigma . m}{r^2},$$

suponiendo que el coeficiente de esta expresión se reduce á la unidad.

La componente de esta fuerza según la normal, puesto que esta componente determina el flujo, según hemos explicado en otra conferencia, tendrá por valor

$$\frac{\delta . d\sigma . m}{r^2} \cos (\text{man})$$

y como

$$\text{ángulo (man)} = \text{ángulo} (dbc)$$

la componente f_n se reducirá á

$$f_n = \frac{\delta . d\sigma . m}{r^2} \cos (dbc) = \text{flujo} (bc).$$

Y, por fin, como

$$db \,.\, \cos(dbc) = \text{área} \,.\, db$$

resulta

$$\text{flujo}\,(bc) = \frac{\delta m \,.\, \text{área}\, db}{r^2}.$$

Podemos repetir todo esto para el área $b'c'$; pero como la normal n' y la componente de f' forman un ángulo obtuso, tendremos

$$\text{flujo}\,(b'c') = -\frac{\delta m\, \text{área}\, d'b'}{r'^2}.$$

Ahora bien,

$$\frac{\text{área}\, db}{r^2} = \text{ángulo sólido}\ \omega$$

y

$$\frac{\text{área}\, d'b'}{r'^2} = \text{ángulo sólido}\ \omega.$$

Siendo ω el ángulo sólido del cono, cuyo vértice está en m, y que determina en la superficie las áreas bc, $b'c'$.

Tendremos, por lo tanto,

$$\text{flujo}\,(b'c') + \text{flujo}\,(bc) = \delta m\,(\omega - \omega) = 0;$$

luego la suma de los flujos en las áreas de entrada bc y de salida $b'c'$ es nula. Y como podemos considerar á m como vértice de infinitos conos infinitamente estrechos, ma'', ma'''... para todos los elementos de la superficie S; y como además el flujo para cada uno de estos conos es nulo, nulo será el flujo para toda la superficie.

De aquí se deduce que cuando el vector W del teorema general es una fuerza, según la ley newtoniana, el flujo para una superficie S procedente de masas exteriores es nulo.

Si ahora volvemos á la fórmula

$$\Delta = \frac{\text{flujo } s}{d\tau}.$$

Como flujo s es igual á o, en este ejemplo de vectores newtonianos, tendremos

$$\Delta = o$$

ó bien

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = o$$

que es análoga la célebre fórmula de La Place.

Expliquemos una vez más su significación.

Recordemos que F, G, H eran las componentes de un vector W; en este caso es una fuerza newtoniana, es decir, de la forma $\frac{C}{r^2}$; además estas tres componentes dependían de una función de fuerzas, es decir, de un solo escalar, de suerte que

$$F = \frac{d\varphi}{dx}, \; G = \frac{d\varphi}{dy}, \; H = \frac{d\varphi}{dz}.$$

Precisamente en el curso anterior estudiamos este caso, y llamando V á la potencial cuyo valor era $V = -\varphi$, teníamos

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dV}{dx}, \; \frac{d\varphi}{dy} = -\frac{dV}{dy}, \; \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{dV}{dz}.$$

Y es claro que la ecuación anterior se convertirá en

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = o$$

que es precisamente la ecuación de Laplace.

Y como lo que hemos dicho para una masa m, pudiéramos decir para cualquier número de masas exteriores á la superficie G, tendremos este teorema: un sistema cualquiera de masas que obedecen á la ley newtoniana tienen una potencial V que satisface á la ecuación diferencial precedente.

Es, por decirlo así, la ley del campo exterior á las masas, y expresa una propiedad general de todas las potenciales que están dentro de la ley de Newton, ya procedan de masas ponderables, ya de masas eléctricas.

V es una integral de dicha ecuación diferencial.

¿Es la integral general, ó una de las integrales particulares?

¿Expresa la ecuación diferencial de que se trata una propiedad exclusiva de las acciones newtonianas, circunscribiéndose sólo á ellas, ó expresa propiedades mucho más amplias?

Por el pronto, no contestamos á estas preguntas; nos limitamos á decir que sea cual fuere la distribución de las masas, la potencial en cualquier punto exterior á las mismas es una integral particular de la ecuación diferencial

$$\Delta V = o,$$

y se comprende que en los problemas de las potenciales newtonianas, y como caso particular en la electro estática, el estudio de tal ecuación diferencial ha de ser importantísimo, porque podrá servirnos para determinar V, y dada V en función de x, y, z, conoceremos las tres componentes de la fuerza posible ó real que corresponde á dicho punto, con sólo tomar las derivadas de V con relación á x, y, z.

Conocer la acción de un sistema sobre un punto es ya tener mucho adelantado para establecer las condiciones de equilibrio.

Pero todo esto ya lo estudiaremos en otra ocasión; por ahora nuestro objeto tan sólo es dar una idea, ó si se nos

permite esta palabra, despertar una sospecha de cómo el problema de Green se enlaza con estos problemas de la Física matemática.

***

También se deduce de la fórmula del insigne matemático otra fórmula en cierto modo complementaria de la de Laplace, que es la de Poisson.

Se enlaza con un problema análogo al precedente.

También se trata de masas cuyas acciones se ejercen por la ley newtoniana; también entra en juego una superficie; lo mismo que antes, se trata de determinar el flujo ideal ó real de estas fuerzas ó vectores en toda la extensión de la superficie S que consideramos, y también aparece aquí la potencial de dichas fuerzas, es decir, una función de x, y, z, cuyas derivadas con signo contrario dan las tres componentes de la acción de las masas en un punto cualquiera del espacio.

Pero hay una diferencia esencial entre este caso y el anterior.

Allí las masas eran exteriores á la superficie, aquí son interiores.

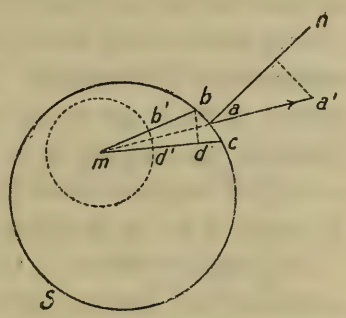


Figura 20.

Sea la superficie S (figura 20) y una masa interior m, cuya acción es newtoniana.

Si en cualquier punto de la superficie existiese una masa real, la fuerza ó acción que sobre ella ejerciese m sería también real.

Si no existe masa ninguna, el vector sería, si se nos permite la palabra, un vector de posibilidad; es decir, que en

cuanto en ese punto colocásemos una masa se convertiría en un vector real, ó si se quiere en una fuerza real.

Supongamos, para fijar las ideas, que sobre la superficie S existe una capa de flúido, cuyos elementos son rechazados por m, según la ley newtoniana, y sea δ la densidad superficial de la expresada capa.

Si en el punto a de la superficie consideramos el elemento bc, la masa sobre este elemento será

$$\delta \text{ sup. } bc$$

y la fuerza repulsiva entre m y el elemento bc, que en general será oblicua á la superficie, y que representaremos por $a\,a'$, actuará hacia el exterior y tendrá por valor numérico

$$aa' = \frac{m\delta \text{ sup. } bc}{r^2}$$

siendo r la distancia ma de la figura.

Esta fuerza ó este vector, que es la resultante de todos los vectores que corresponden á las diferentes unidades de superficie de bc, y que serán próximamente iguales entre sí y paralelos, tal conjunto de vectores podemos decir que forma un flujo de vectores como filetes de un flúido que salen por la superficie bc, en la dirección aa'.

Este cilindro oblicuo, ó sea este flujo, tendrá por valor el producto de su base por su altura, lo cual se reduce en último análisis á multiplicar el valor de aa', que es la resultante total sobre el elemento S por el coseno del ángulo $a'\,an$; de modo que

$$\text{flujo de vectores correspondientes á } bc = \frac{m\delta \text{ sup. } bc}{r^2} \cos (a'\,an).$$

Fijemos bien las ideas: el flujo figurado de vectores es un cilindro oblicuo cuya base es bc, y está formado por un

manojo de vectores correspondientes á los elementos iguales á la unidad de dicha superficie. Su volumen será la base por la altura, y esta altura será la proyección sobre an de uno de dichos vectores elementales.

Es decir, que deberemos multiplicar uno de ellos por el coseno del ángulo $a'an$. Y el producto de esta altura por la base será precisamente el flujo, que es lo que indica la fórmula anterior, porque $\frac{m\delta}{r^2}$ es el valor de uno de estos vectores elementales por unidad de superficie.

Claro es, que todo esto se simplificaría si considerásemos el flujo abstracto, por decirlo de este modo, y si para calcular el vector en cada elemento de superficie dijéramos: Vector que correspondería á un elemento de superficie para el caso en que colocásemos sobre dicha superficie un flúido con la densidad 1, que equivaldría á suponer $\delta = 1$.

Y esto sería aplicable á toda superficie infinitamente pequeña colocada en el campo de vectores.

Volviendo á la fórmula anterior, observaremos que los ángulos $a'an$ y cbd, siendo bd un arco de círculo trazado desde m con el radio mb, son iguales por tener sus lados perpendiculares; de modo que

$$\text{sup. } bc. \cos(a'an) = \text{sup. } bc. \cos(cbd) = \text{sup. } bd$$

y la fórmula se reduce á

$$\text{flujo vectores correspondientes á } bc = \frac{m\delta \,.\, \text{sup. } bd}{r^2}.$$

Ahora bien, trazando desde m con un radio mb', igual á la unidad, una esfera, es evidente que tendremos

$$\frac{\text{sup. } b'd'}{1^2} = \frac{\text{sup. } bd}{r^2}$$

y flujo correspondiente á sup. $bc = m\delta$. sup. $b'd'$.

Para obtener el flujo total sobre toda la superficie S, basta sumar los flujos correspondientes á sus diferentes elementos, en cuyo caso tendremos que sumar todos los elementos de superficie $b'd'$, que constituyen la superficie de la esfera de radio 1, cuya área es igual á 4π, y, por último:

$$\text{flujo de } S = m\delta \,.\, 4\pi.$$

Y en el caso de vectores que hemos llamado abstractos para simplificar la explicación, es decir, en el caso, repitiendo lo ya dicho antes, de una masa m en un campo que ha de llenarse con vectores abstractos, digámoslo así, ó si se quiere de vectores posibles, correspondientes para cada punto á una superficie infinitamente pequeña que en él colocásemos cargada con un flúido cuya densidad fuese 1, tendríamos

$$\text{flujo } S = m \,.\, 4\pi.$$

***

Recordemos la fórmula de donde hemos partido

$$\Delta = \frac{\text{flujo } s}{d\tau}.$$

Si en ésta substituímos en vez de flujo en s su valor, que acabamos de obtener, resultará

$$\Delta = \frac{4\pi m}{d\tau}$$

de donde inmediatamente se deduce la fórmula de Poisson, aunque variando un poco las notaciones; por ejemplo, em-

pleando en vez de la función de fuerzas φ la potencial V ligada con la anterior por la relación $\varphi = - V$, y en vez de $\frac{m}{d\tau}$ la densidad ρ, obtendremos

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = - 4\pi\rho.$$

Pero no insistimos más sobre este punto, porque más adelante hemos de estudiarlo bajo otro aspecto.

Hemos querido tan sólo demostrar, que de la fórmula de Green pueden deducirse dos fórmulas fundamentales de la electricidad, la de Laplace y la de Poisson.

Sin embargo, la demostración de esta última no es tan rigurosa como parece.

Hemos dicho desde un principio que todas las demostraciones y todas las transformaciones empleadas para demostrar la fórmula de Green, suponían siempre que las integrales empleadas tenían un sentido; es decir, que no eran ni infinitas ni indeterminadas, lo cual exige que no sean infinitas ni indeterminadas F, G, H ni sus derivadas $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dG}{dy}$, $\frac{dH}{dz}$, porque si lo fueran, las transformaciones y los razonamientos empleados caerían por su base.

A iguales condiciones ha de satisfacer la función φ, así como sus derivadas primeras y segundas con relación á x, y, z.

De no ser así, la expresión

$$\Delta = \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{d^2 \varphi}{dy^2} + \frac{d^2 \varphi}{dz^2}$$

sería infinita ó indeterminada y carecería de sentido.

*
* *

El título de las conferencias que nos proponíamos explicar en este curso ha sido el siguiente: Cuestiones de Análisis y su aplicación á la Física Matemática

Hemos expuesto la fórmula de Green, la hemos aplicado á varios casos particulares, y de ellos ó mejor dicho del último de aquél en que F, G, H, componentes del vector W, son las derivadas con relación á x, y, z de una función de fuerzas φ, hemos deducido dos fórmulas importantísimas para las aplicaciones á la teoría de la electricidad, á saber: la fórmula de Laplace y la fórmula de Poisson.

Ambas fórmulas las demostraremos directamente cuando estudiemos la electro-estática; pero cumpliendo la segunda parte de las conferencias de este año, hemos de hacer aplicación de ellas, ó mejor, indicar la aplicación que tienen para el problema del equilibrio eléctrico.

Hasta aquí, al estudiar la fórmula de Green y sus casos particulares, en rigor hemos estudiado una cuestión de matemáticas puras, considerando en cierto modo vectores abstractos; ahora debemos decir algo de las aplicaciones de dicha fórmula, ó sea de las dos ya indicadas, que de ellas se deducen, á la teoría de la electricidad.

Digamos algo, pues, de esta teoría, y por hoy, y mientras no la estudiemos sistemáticamente y como cuerpo de doctrina, mientras no sea para nosotros más que un ejemplo de la aplicación de fórmulas abstractas á la realidad de los fenómenos naturales, supondremos conocidos aquellos principios que se explican y se demuestran experimentalmente en la Física.

Admitiremos provisionalmente, que existe un flúido eléctrico, como se admite en Física, que la Física experimental nunca ha estado exenta de hipótesis; y de la hipótesis se ha ayudado siempre la experiencia y en la experiencia ha buscado siempre comprobación la teoría.

Suponemos aún que el flúido eléctrico encierra en si una dualidad, es decir, una electricidad que llamamos positiva y otra que llamamos negativa.

Todo esto, si se me permite la palabra, es enormemente hipotético y un tanto metafísico, pero tal ha sido la hipótesis primitiva, que se aceptó casi unánimemente por los físicos, cuando empezaron á estudiar los fenómenos eléctricos.

Estas dos electricidades, la positiva y la negativa, se supone que están en cierto modo combinadas en cantidades equivalentes, y algunos dicen iguales, y que cuando en tal estado de equilibrio se encuentran, se compensan y neutralizan y no aparecen fenómenos eléctricos á lo exterior, que llamen la atención de los experimentadores.

Todo esto es muy vago, bien lo reconocemos: muy vaga y poco precisa, por lo tanto, es la existencia de esos dos flúidos positivo y negativo, que por llevar denominaciones algebráicas no por eso muestran su manera de ser, ni su constitución, ni ninguna propiedad que hable á los sentidos.

Muy vaga es todavía esa especie de combinación eléctrica á la cual el instinto de representación busca analogía en las combinaciones químicas; muy vaga es aún la neutralización que se supone, como si se tratase de un ácido y de una base que en química se neutralicen.

Nada hay preciso en los términos empleados de equivalencia ó igualdad, porque el que estudia por primera vez esta materia formula una serie de preguntas á las que nadie le da respuesta, ni los sabios ni los libros.

¿Cuándo y cómo son iguales ó equivalentes dos cantidades de electricidad positiva ó negativa?

Al avanzar en el estudio de los fenómenos eléctricos, alguna respuesta puede intentarse, pero al principio la respuesta es difícil.

Se dirá, cuando más, que al reunirse ó combinarse dos cantidades opuestas de flúido eléctrico, el negativo y el positivo son equivalentes ó iguales si la reunión de ambos es algo neutral que no ofrece ningún fenómeno eléctrico y puede pasar inadvertido el hecho para el observador.

Demos todo ello por bueno, que no hemos de discutirlo

en este instante, y digamos, para terminar esta pequeña digresión, que la hipótesis de los dos flúidos dominó en la Física experimental, y aun en la Física matemática, muchos años con imperio casi absoluto.

Todo el mundo la aceptaba creyendo, ó sin creer en ella: era una hipótesis sencilla, verdadera ó falsa, bastante clara, con sus reminiscencias algebraicas, si la palabra vale, y sobre todo, cómoda en gran manera y prestándose con gran docilidad á la explicación de los fenómenos eléctricos y á sus atracciones y repulsiones, como saben mis alumnos por recuerdo que tengan de la Física elemental.

*
* *

Pero llegó un momento en que empezó la baja de la hipótesis dualista.

Toda hipótesis tiene esta suerte y recorre iguales períodos. De aceptación y triunfo. De duda y descrédito. Y al fin, de ruina completa: otra hipótesis la sustituye.

A la hipótesis dualista se sustituyó la hipótesis unitaria.

Dos flúidos eléctricos se decía ¿cómo son y en qué se diferencian substancialmente, y qué necesidad hay de que sean dos cuando basta con uno?

Y á la hipótesis de dos electricidades ó dos flúidos se sustituyó la hipótesis de un sólo flúido, que con algo de buena voluntad y de condescendencia hasta pudiera ser el mismo éter.

En rigor, la hipótesis de un solo flúido eléctrico era bastante satisfactoria.

Cierta cantidad de flúido único eléctrico, en presencia ó conjunción con cierta cantidad de materia ponderable, podía suponerse que representaba la neutralidad eléctrica: aquel caso en que los fenómenos eléctricos más característicos no

aparecen; era, si se me permite la comparación, la sal neutra en las combinaciones etéreas.

Cuando la cantidad de flúido eléctrico único aumenta sobre este tipo, cuando hay sobre-saturación eléctrica, se dice, que hay electricidad positiva.

Cuando, por el contrario, disminuye el flúido eléctrico, se admite que este caso corresponde al que en la antigua hipótesis dualista se atribuye á la presencia de una electricidad negativa.

Y aquí, el más y el menos, tienen ya un sentido y una explicación matemática, y los fenómenos elementales de la electricidad, sus atracciones y repulsiones, se explican con tanta facilidad como en la hipótesis de los dos flúidos.

Y estos dos flúidos que antes eran un misterio ó una sobrecarga de hipótesis extrañas, tienen una explicación sencillísima: Una cantidad de electricidad, estado neutro; una cantidad superior, electricidad positiva; una cantidad inferior, electricidad negativa.

Realmente un flúido único con aumentos ó disminuciones á partir de un tipo era una explicación mucho más sencilla que la de la vieja hipótesis.

Triunfó, al parecer, la nueva hipótesis que estudiaremos detenidamente en otra ocasión, y que en multitud de obras pueden estudiar mis alumnos; porque no se olvide que hemos de estudiar más adelante la electricidad, y que hoy no hacemos otra cosa que presentar un ejemplo para que se comprenda la importancia, que tienen en la ciencia práctica, ciertas fórmulas abstractas de la ciencia pura

***

Pero no todos los autores entienden del mismo modo la hipótesis del flúido único eléctrico.

Son, en efecto, hipótesís distintas, y sólo citaremos estos ejemplos, los que emplean Mr. Briot y Mr. Poincaré.

El primero admite la materia ponderable y la electricidad; dos elementos de materia ponderable se atraen, dos elementos de electricidad se rechazan, y entre un elemento de materia ponderable y otro de materia eléctrica, supone el autor citado que existe determinada atracción.

La hipótesis de Mr. Poincaré en su obra *Electricidad y óptica* es distinta.

Traducimos literalmente:

«Las fuerzas que actúan entre dos cuerpos electrizados son en número de cuatro: la que se ejerce entre las cargas eléctricas, la repulsión de la materia que constituye los cuerpos, y en fin, las dos atracciones que tienen lugar entre la electricidad que carga uno de los cuerpos y la materia que forma al otro.»

De suerte que en esta hipótesis la materia no atrae á la materia, sino que la rechaza; las atracciones sólo proceden de la acción entre la materia y la electricidad.

Por uno y otro sistema se explican con igual facilidad las atracciones y repulsiones eléctricas; pero en el fondo hay una diferencia fundamental.

La materia en la hipótesis de Mr. Poincaré más se parece á un flúido eléctrico cuyos elementos se rechacen.

La materia ponderable, con sus clásicas atracciones, desaparece, y esta hipótesis casi puede considerarse como una anticipación á las teorías modernas de los electrones positivos y negativos.

Sea como fuere, la hipótesis del flúido eléctrico único ha perdido, en parte, su prestigio, y la hipótesis de los dos flúidos va recobrando su posición privilegiada; quien pierde en esta evolución de las hipótesis, es la materia clásica, que niegan algunas teorías modernas, suponiendo que la materia visible, la que llamamos materia ponderable, la de la vieja mecánica, no es en el fondo más que un complejo de electro-

nes positivos y negativos, una especie de cielo atómico en que los soles son los electrones positivos y los planetas los electrones negativos que giran alrededor de los primeros.

***

Dejando aparte estas cuestiones, que en su día examinaremos con más detenimiento, volvemos á la aplicación de las fórmulas obtenidas en esta conferencia, es decir, de la fórmula de Green y de las que de ellas se deducen, al problema del equilibrio eléctrico: éste será el objeto de la conferencia próxima.

Pero antes, para acomodarnos al uso corriente, definamos una vez más lo que se entiende por campo de una masa eléctrica, y lo que se entiende por flujo de las fuerzas eléctricas que de ella emanan, que será en rigor repetir lo que ya hemos explicado en esta conferencia; pero dándole, en cierto modo, el carácter que tenía en la antigua teoría de la electricidad ó en el período de transición de esta teoría á las de Maxwell y Faraday.

La acción de la masa m sobre un punto cualquiera A del espacio, se representa evidentemente por $\frac{m}{r^2}$ si r es la distancia de dicho punto al centro m, y si además suponemos igual á la unidad el coeficiente numérico, escogiendo para ello el sistema de unidades conveniente.

Para abreviar la explicación, representemos esta fuerza por F, de modo que

$$F = \frac{m}{r^2}.$$

La acción de la masa m sobre el punto A, será, pues, F; pero en la antigua teoría en que el espacio es, y se supone

inerte y vacío, la frase que hemos empleado no es exacta; la acción de la masa m sobre A no existe, es completamente nula: sobre puntos geométricos no hay acción mecánica de ninguna clase. Lo físico no hace presa, si se nos permite la expresión, sino sobre lo físico, no sobre la nada ó sobre abstracciones.

Por eso, en la antigua teoría, debe decirse: Si en el punto A colocásemos una masa igual á la unidad de electricidad positiva, la masa m ejercería sobre este punto, ó mejor dicho, sobre la masa de prueba que en él colocásemos, una fuerza atractiva ó repulsiva, según que m fuese negativa ó positiva, cuyo valor numérico sería el de F; ó abreviadamente, y prescindiendo de los signos, una fuerza F.

Y ésta ya sería una fuerza real.

Si por este punto A hiciéramos pasar una superficie infinitamente pequeña dS, y para cada punto de esta superficie repitiésemos lo que hemos dicho para el punto A, el conjunto de todas estas fuerzas F sobre el elemento superficial en cuestión es lo que se llama flujo de la fuerza F á través de la superficie dS.

Y el por qué de esta denominación ya lo hemos explicado.

Si á través de la superficie dS suponemos que pasa un flúido, por ejemplo, un líquido, y en cada punto la velocidad tiene el mismo valor numérico que F, el conjunto de todos los filetes que pasan con dicha velocidad F formarán un cilindro oblicuo que será el flujo del líquido á través de la superficie en cuestión.

Sustituyendo á la palabra flúido la palabra fuerza, y la velocidad de cada filete por el valor numérico de F, podremos emplear la frase que estamos explicando y dar una explicación matemática á dicha frase.

El volumen de dicho cilindro es el flujo de fuerza; pero este volumen es el producto de la base de S por su altura, y la altura es evidentemente la proyección de una de las generatrices F sobre la normal m al elemento dS.

Si á esta proyección la representamos por F_n, podremos decir que el flujo á través de la superficie dS está representado por

$$dS.F_n.$$

Si en vez de una superficie infinitamente pequeña de S tenemos una superficie cerrada, repitiendo lo explicado para un elemento, tendremos el flujo de fuerza á través de toda la superficie, que será

$$\int_s ds\,.F_n$$

ó bien

$$\int_s ds\,.\frac{m}{r^2}\cos\alpha.$$

Siendo α el ángulo que forma F con la normal n á superficie dS.

Tenemos, pues, definido en términos de la antigua teoría el *campo* de una masa m, y, por lo tanto, de un número cualquiera de masas; la fuerza en un punto cualquiera A, ó si se quiere, el vector de este punto y el flujo á través de cualquier superficie.

Pero entiéndase que en la teoría clásica este campo, este vector y este flujo son meras posibilidades, conceptos abstractos, que para que se conviertan en conceptos reales, es preciso que coloquemos en cada punto una masa igual á la unidad.

En las teorías modernas, como ya veremos y como ya hemos explicado otras veces, y aun veces repetidas, no hay que hacer esto porque todo el espacio está relleno de éter, ó de dieléctricos, ó de masas ponderables más ó menos conductoras, y toda masa eléctrica engendra á su alrededor un

campo real y efectivo del cual no puede prescindirse para resolver esta clase de problemas dentro de la realidad.

Son estos conceptos tan fundamentales, que he creído conveniente repetirlos, corriendo el peligro de que se me tache de excesivamente insistente y aun pesado.

Pero hay un proverbio latino que dice, si yo mal no recuerdo, *repetita docent.*

XXIX. — Noticias sobre algunos moluscos de España.

Por Joaquín González Hidalgo.

Con motivo de la redacción de una pequeña Memoria sobre moluscos de la Guinea española, ya terminada y que publicará la *Real Sociedad Española de Historia natural*, y el examen de otras muchas especies recogidas vivas en Cádiz por el joven Ingeniero de Minas Sr. Gavala, he creído conveniente dar algunas noticias sobre las variaciones de la *Purpura hæmastoma* y nuevas localidades de la *Lima inflata* y *Ciprœa achatidea*, como ampliación á lo ya conocido sobre dichas especies.

I. Purpura hæmastoma Linné.

Systema naturæ, edic. XII, pág. 1202.—1767.

Esta *Purpura* es tan variable en su tamaño, en su forma general, en su grosor y en las modificaciones de su escultura, que no es extraño hayan sido publicadas algunas de sus variedades como especies distintas. Pero éstas no pueden conservarse en la nomenclatura cuando se examinan y comparan entre sí muchos individuos recogidos en diferentes mares y en distintas localidades. A pesar de sus variaciones, todos ellos conservan idénticos los caracteres de la abertura de la concha, tanto en su forma como en su color, y en apoyo de lo que antes se menciona, creemos de alguna utilidad exponer aquí el resultado de un estudio hecho de las figuras de los autores y de los ejemplares de nuestra colección.

Linné describió la especie del modo siguiente: *Testa sub-*

muricata, labro intus striato, columella planiuscula, fauce fulva. Oc. europæo. Testa ovata, rudis, cincta duplici fascia nodosa anfractuum. Faux crocea, labrum intus crenulatum et striatum.

Esta descripción sólo conviene á una de las variedades, la cual debe considerarse como la forma tipo; pero es necesaria una descripción que las comprenda á todas de un modo general, señalando después las diferencias que las distinguen y refiriendo á cada una de ellas las figuras que mejor las representan. Esto es lo que hacemos á continuación, adicionando á varias de ellas las localidades *exactas* de los ejemplares que han servido para nuestro estudio. Grande sería el número de estas últimas que pudieran indicarse, porque la *Purpura hæmastoma* es una especie común y se encuentra en muchos sitios, de los cuales se halla mencionada en diversas obras y catálogos locales, donde puede verlo el lector.

DESCRIPCIÓN

Las diversas variedades de la *Purpura hæmastoma* presentan una forma oval-cónica, con un ángulo obtuso en la parte superior de la última vuelta, el cual, cuando es más saliente y lleva además grandes tubérculos, aumenta la anchura de la concha en el centro, y ésta adquiere una forma casi romboidal. La espira es más ó menos saliente y consta de seis vueltas algo convexas, siéndolo bastante la última, si bien con una depresión cerca de la sutura y otra en la base cerca del extremo, que es más angosto. La sutura es sencilla unas veces y otras tiene un margen más ó menos grueso.

La escultura de la superficie consiste en estrías y cuatro ó cinco cordones transversales en la última vuelta (por lo común falta el inferior), continuándose el de arriba por las restantes vueltas de espira. Este corresponde al ángulo de la

vuelta y los restantes están por debajo de él, equidistantes entre sí y separado el último por la depresión inferior de una costilla saliente y curva que termina en la escotadura de la abertura. Rara vez se encuentran ejemplares desprovistos de los cordones, y sólo con las estrías transversales.

En la mayor parte de los individuos hay tubérculos en los cordones transversales, ya obtusos y redondeados, ya fuertes y cónicos, ó un poco salientes, ó de gran tamaño y comprimidos, unas veces en el cordón del ángulo, donde siempre son más prominentes, otras en éste y en el segundo, ó en los tres primeros, que es menos frecuente, ó finalmente en los cuatro cordones de la última vuelta, situados entre la sutura, sencilla ó marginada, y la costilla de la base de la concha. Cuando existe un quinto cordón, éste no suele presentar nudos.

La superficie exterior de la concha es de color blanquecino ó gris, á veces con una zona blanca que corresponde al cordón segundo. También se presenta de color castaño con algunas manchas blanquecinas irregulares, y no faltan individuos en que hay líneas obscuras al través ó listas un poco negruzcas en sentido longitudinal.

La abertura es ovalada y la escotadura de la base bastante profunda; la columnilla tiene pequeñas arrugas oblícuas cerca de su extremo inferior y un pliegue transversal próximo á la inserción del borde derecho; éste es poco grueso en el margen, con dientecillos muy pequeños que son la terminación puntiaguda de cordoncitos salientes y transversales que hay en la parte interna, alguna vez más gruesos ó un poco nudosos en su terminación interior. El color del fondo de la abertura es blanco ó sonrosado, y el de la columnilla y la parte interna del borde derecho de un encarnado más ó menos intenso, según los ejemplares, color que alguna vez es casi negro. En muchos individuos tienen esta última coloración los surcos intermedios entre los dientecillos del

margen del borde derecho. Las dimensiones, grosor y peso de la concha son muy variables; hay individuos muy adultos de la Guinea española que sólo tienen 30 milímetros de longitud; otro, de Cádiz, que alcanza la de 103 milímetros, y alguno, como el figurado por Reeve con el nombre de *Purpura gigantea*, que mide 120 milímetros. Muchos ejemplares son de poco peso y delgados con relación á su tamaño, y en cambio otros, como el de Cádiz, acabado de citar, es sumamente grueso y pesa 210 gramos.

Según que los ejemplares presentan unas ú otras de las modificaciones antes indicadas, es diverso su aspecto, y pueden agruparse en distintas variedades, parte de las cuales han sido consideradas por los autores como especies, con los nombres de *Cónsul*, *gigantea*, *unifascialis*, *Rudolphi* (no de Lamarck) y *biserialis* (no de Blainville).

Sólo resta, pues, enumerar las variaciones de la *Purpura hæmastoma*, con breve indicación de sus diferencias y las figuras de los autores que corresponden á cada una de ellas.

VARIEDADES

a. Testa ultimo anfractu transversim striato, cingulis nullis vel obsoletis (denominada *mutica* ó *calva* por algunos).

Lister, Hist. Conch. lám. 988, fig. 48.
Kuster, en Chemn. Conch. Cab. 2.ª edic. lám. 22. a. fig. 1.
Dunker, Ind. moll. Guineam, lám. 3, figs. 12 y 13.
Kobelt, Iconog. europ. meeresconch. lám. 7, fig. 4.

b. Testa ultimo anfractu transversim striato et cingulato, cingulis muticis.

Dautzenberg, Moll. Roussillon, lám. 10, figs. 1 y 2.

HAB. Isla de Cabo Verde.

c. Testa ultimo anfractu cingulo supero tuberculis transversim elongatis, angustis, instructo, cæteris obsoletis.

Kobelt, Iconogr. europ. meeresconch. lám. 5, fig. 1 y lám. 7, fig. 3.

d. Testa brevior, lata, ultimo anfractu superne magis angulato, ad angulum tuberculis magnis compressis instructo. (Purpura Consul de los autores.)

Chemnitz, Conch. Cab. lám. 160, figs. 1516 y 1517.
Kuster en Chemn. 2.ª edic. Purpura, lám. 16, figs. 1 y 2.
Kiener, Spec. gen. Purpura, lám. 16, fig. 48.
Reeve, Conch. icon. Purpura, fig. 4.
Chenu, Man. Conch. I, fig. 804.
Figuier, La vie des anim. Moll. fig. 313.

e. Testa maxima, spira acuminata, apertura lata, cingulo supero tuberculis obtusis ornato cæteris nullis. *Purpura gigantea* de Reeve.)

Reeve, Conch. icon. Purpura, fig. 17.

Longitud 120, lat. 80 milímetros, según la figura de Reeve. Esta variedad es la de mayor tamaño, y probablemente vive en Cádiz, porque mi amigo Sr. Gavala, al ver la figura de Reeve, recuerda haber encontrado un ejemplar parecido, que no guardó por el mal estado de conservación en que se hallaba, y creyendo era la misma variedad que la designada después con la letra K.

f. (Forma tipo de Linné). Testa ovato-conica, ultimo anfractu cingulis duobus superis tuberculis obtusis vel acutiusculis instructis. (*Purpura Rudolphi* Kuster non Lamarck.)

Gualtieri, Ind. test. lám 51, fig. a (mala).
Adanson, Voy. Senegal. lám. 7, fig. 1.
Schuber y *Wagner* en Chemn. Conch. Cab. lám. 233, figs. 4085 y 4086.

Blainville, Faun franç. Moll. lám. 6, fig. 2.
Kiener, Spec. gen. Purpura, lám. 32, fig. 78 y lám. 33, fig. 79.
Reeve, Conch. icon. Purpura, fig. 21.
Hidalgo, Mol. mar. España, lám. 27, figs. 1 y 2.
Dautzenberg, Moll. Roussillon, lám. 9. figs. 4 y 5.
— Atlas de poche, fig. 36.
Granger, Moll. France, lám. 7, fig. 6.
Kuster en Chemn. Conch. Cab. 2.ª edic. Purpura. lám. 21, fig. 1.
— loc. cit, lám. 21, fig. 2. *Purpura Rudolphi* non Lamarck.
Kobelt, Iconogr. europ. meeresconch, lám. 7, figuras 1 y 2.

HAB. Guetaria, Coruña, Islas Sisargas, Cádiz y Barcelona en *España*, Cabo de San Juan en la *Guinea española* y Río Janeiro en el *Brasil*.

g. Testa brevior, crassa, albida vel grisea, ultimo anfractu cingulis duobus superis minute nodosis.

Martini, Conch. Cab. lám. 101, figs. 964 y 965.
Kuster en Chemn. Conch. Cab. Purpura, lám. 30, figs. 13 y 14.

h. Testa ultimo anfractu cingulo supero (et interdum secundo) tuberculis obtusis instructo, fascia alba in cingulo secundo.

(*Purpura unifasciali* de los autores).

Encyclop. meth, lám. 397, fig. 6.
Kiener, Spec. gen. Purpura, lám. 33, fig. 79. b.
Reeve, Conch. icon. Purpura, fig. 64.

HAB. Río Janeiro en el *Brasil*. Uno de los ejemplares de la var. *f* (tipo) de Barcelona, tiene ya indicada la faja blanca en el segundo cordón transversal.

i. Testa var. *f* similis, sed fusco longitudinaliter strigata et transversim lineata.

Reeve, Conch. icon. fig. 67. *Purpura biserialis*, no de Blainville.

j. Testa minor, ultimo anfractu cingulis duobus superis tuberculis validis, acutis, instructis.

Muy pequeña (30 milímetros), pero ya adulta, con los tubérculos fuertes y cónicos.

HAB. Cabo de San Juan en la *Guinea española.*

k. Testa ultimo anfractu magis angulato, cingulis duobus superis valde nodosis, œtate magna, crassa, ponderosa, cingulo supero tuberculis maximis, compressis, secundo minoribus, rotundatis, ornata.

Martini, Conch. Cab. lám. 101, fig. 966.
Wood, Index testac. lám. 22, fig. 57.
Chemnitz, Conch. Cab. tomo XI, pág. 80, lám. 187, figs. 1796 y 1797. Long. 98, lat. 84 milímetros.
Kuster en Chemn. Conch. Cab. 2.ª edic. lám. 19, figs. 3 y 4, las mismas figuras de la 1.ª edición. *Purpura gigantea,* no de Reeve.

HAB. Desterro en el *Brasil* (Coll. del Museo), Cádiz en *España* (Gavala!). Dimens. del mayor ejemplar. Long. 103, lat. 85 milímetros, Isla del Corregidor en *Filipinas.*

l. Testa var *f* similis, sed cingulis 1, 2, 3 tuberculis obtusis, vel acutiusculis instructis.

HAB. Mahón en las *Baleares,* Valencia en *España.*

m. Testa ultimo anfractu quadricingulato, cingulis omnibus tuberculis obtusis vel acutiusculis instructis.

Blainville, Especes de Pourpre, lám. 12, fig. 1.
Kiener, Spec. gen. Purpura, lám. 32, fig. 78 b.
Orbigny, Moll. Canaries, lám. 6, figs. 39 y 40.
Fredol, Le monde de la mer, figura de la pág. 344.

Berge, Conchylienbuch, lám. 32, fig. 15.
Locard, Coquill. mar. France, fig. 73.
Jeffreys, Brit. Conchol. lám. 102, fig. 5.
Kobelt, Illustr. Conch. lám. 14, fig. 1.
Sowerby, Ind. Brit. Shells, 2.ª edic. lám. 26, fig. 28.

HAB. Islas Dragonera, Ibiza, Conejera y Formentera, Palma, Mahón y Fornells, en las *Baleares*; Barcelona, Islas Columbretes, Valencia, Alicante, Tabarca, Santa Pola, Cartagena, Cabo de Gata, Málaga y Santander, en *España;* Melilla, en *Africa;* islas Canarias; islas de Cabo Verde.

II. LIMA EXCAVATA Fabricius.

Fabricius en Schroeter, Naturg. II, pág. 117.—*Ostrea excavata.*
Chemnitz, Conch. Cab. tomo VII, pág. 355, lám. 68, fig. 654.
Reeve, Conch. icon. Lima, fig. 2.
Sars (G. O.), Mollusca Norvegiæ, pág. 24, lám. 3, fig. 1.
Sowerby, Thes. Conch. Lima, núm. 8, lám. 21, figs. 8 y 9.
Locard, Moll. Travailleur et Talisman, tomo II, página 409.

HAB. Santander (Norte de España) á 16 kilómetros de la costa, en el sitio denominado El Pájaro, por los pescadores, frente á la punta Somomera.

Fué hallado un ejemplar vivo á 250 brazas, en fondos coralígenos, y forma parte de la colección de la estación biológica de Santander.

Esta especie de Lima, la mayor del género y publicada en 1780, vive á gran profundidad en la parte Norte del Océano atlántico, frente á Noruega, cerca de las islas Lofoten,

Faroe &. Se creía propia de dicha región, pero posteriormente fueron dragados algunos fragmentos frescos, de la concha, al Norte del Cabo de San Vicente, en Portugal, por la expedición del Porcupine, y últimamente fueron encontrados buenos ejemplares, algunos con el animal, al Oeste del Sudán, en la costa occidental de Africa, por las expediciones del Travailleur y del Talismán. Se ve, pues, que esta especie del Norte se propaga hacia el Sur, hecho bien confirmado ya por el individuo encontrado completo y vivo en Santander, estación intermedia entre las antes citadas. El ejemplar de esta localidad traído á Madrid para mi examen por el Director de la estación biológica, D. José Rioja, tiene 11 centímetros en su mayor dimensión y conviene exactamente con la figura de Reeve y las descripciones de los autores.

III. Cypræ achatidea Gray.

Gray en Sowerby, Conch. Illustr. Cypræ, fig. 179.
Hidalgo, Monogr. Cypræa, págs. 182 y 243.
Hidalgo, Mol. de España, lám. 10, figs. 8 y 9,

Hab. Aunque poco abundante, esta especie vive en España en el Mediterráneo y en el Atlántico, pues de este último mar sólo se había señalado en las islas de Cabo Verde, según consta en la pág. 182 de mi monografía del género *Cypræa*.

Las localidades españolas del Mediterráneo de que tengo ejemplar, son: isla del Aire, junto á Menorca (Prieto!), Rosas (Coronado!), Valencia (Boscá!), Santa Pola, cerca de Alicante (Herrera!), Málaga (Martínez!), y las del Atlántico, Cádiz (Gavala!) y Santander (Rioja!).

Vive á unas 30 brazas de profundidad en fondos coralígenos: en Cádiz ha sido recogida en el sitio denominado la Caballa, conviniendo dos hermosos ejemplares vivos de 39 y 42 milímetros de longitud con el tipo de la especie (dos

zonas azulado-negruzcas transversales en el centro, y dorso cubierto de las pequeñas manchas que caracterizan á esta Cypræa). En Santander sólo encontraron los pescadores en sus redes un ejemplar vivo de 28 milímetros, que corresponde á mi variedad 5, figurada en *Kobelt*, Iconogr. europ. meeresconch., lám. 108, figs. 12 y 13.

XXX. — Estudio analítico de los elementos de retroceso de las curvas alabeadas.

Por Miguel Vegas.

1. Tanto una curva como un haz de rectas ó de planos, puede considerarse engendrado por el movimiento de uno de sus elementos; movimiento que puede efectuarse en un sentido constante, y entonces el *elemento* móvil se dice que es *ordinario* en todas estas posiciones, ó puede este elemento cambiar de sentido en su movimiento al llegar á una posición determinada; en cuyo caso, en esta posición el *elemento* se dice que es de *retroceso.*

Según esto, pueden presentarse en una curva alabeada los casos siguientes: 1.°, punto tangente y plano osculador, los tres ordinarios; 2.°, punto de retroceso con tangente y plano osculador ordinarios; 3.°, tangente de retroceso con punto y plano osculador ordinarios; 4.°, plano osculador de retroceso con punto y tangente ordinarios; 5.°, punto y tangente de retroceso con plano osculador ordinario; 6.°, punto y plano osculador de retroceso con tangente ordinaria; 7.°, tangente y plano osculador de retroceso con punto ordinario; y 8.°, punto, tangente y plano osculador, todos de retroceso.

Para comprender estas definiciones, vamos á explicar lo que se entiende al decir que un elemento se mueve en un sentido constante, ó que cambia el sentido de su movimiento; concepto que se ve con claridad cuando se trata de una serie rectilínea ó de un haz de rectas ó de planos de primer orden, pero que no aparece igualmente claro en los demás casos.

Se dice que permanece constante ó que cambia al sentido del movimiento de un

punto que recorre un arco de curva ABC, según que subsista constante ó cambia el movimiento del plano que le proyecta desde una recta m exterior á la superficie tangencial de dicho arco de curva.

plano que recorre una porción de un haz, según que subsista constante ó cambia el movimiento de su punto de encuentro con una recta m exterior á la superficie desarrollable envolvente de dicha porción de haz.

2. Si en un sistema de coordenadas de puntos el plano límite no es tangente al arco ABC en el punto B, una por lo menos de las aristas del tetraedro de referencia situadas en dicho plano, se cruza con la tangente á la curva en el citado punto B; y, por tanto, esta arista podrá tomarse como eje de proyección al arco ABC.

Por tanto, si la arista del tetraedro que se toma como eje de proyección, es la de intersección del plano límite con el YZ (la del infinito de este plano en coordenadas cartesianas), y designamos por x_1, y_1 y z_1 las coordenadas del punto B, este punto es ordinario cuando son reales los valores de y y de z, correspondientes á las abscisas $x_1 - h$ y $x_1 + h$; y es de retroceso cuando las variables y y z toman dos valores próximos á y_1 y z_1 para $x = x_1 - h$, y ninguno para $x = x_1 + h$, ó al contrario. Y lo correlativo puede decirse de un plano de un haz de planos en coordenadas tangenciales.

Cuando el plano límite del sistema de coordenadas es tangente á la curva en el punto B, basta aplicar lo anterior para $x = o$ á las ecuaciones obtenidas, sustituyendo en las de la curva x, y y z por $\frac{1}{x}$, $\frac{y}{x}$ y $\frac{z}{x}$, pues esto equivale á pasar

del tetraedro dado á otro en que se cambia el plano límite por el YZ, y al contrario (II-15.) (*).

3. Para determinar analíticamente la naturaleza del plano oscular de una curva ABC en el punto B, en un sistema de coordenadas de puntos, observemos que si el plano límite del sistema no es tangente á la curva en dicho punto, puede cortarse el haz de planos osculadores de la curva $A\,B\,C$ por una de las aristas del tetraedo de referencia, situada en el citado plano límite, y entonces el punto de encuentro del plano osculador mólvil con esta recta se mueve en el mismo sentido cuando el punto de contacto recorre los arcos $A\,B$ y $B\,C$ si el plano osculador en el punto B es ordinario; y dichos movimientos son de sentidos contrarios cuando este plano osculador es de retroceso; y, por tanto, los movimientos correspondientes á los planos osculadores de los arcos $B\,A$ y $B\,C$ son del mismo ó de opuestos sentidos según el plano osculador en el punto B es de retroceso ú ordinario.

Ahora bien, si la arista del tetraedro de referencia, antes citado, es la representada por las ecuaciones $z=o$, $t=o$, como la ecuación del plano osculador en el punto B es (II, 371).

$$X\,(x-x_1)+Y\,(y-y_1)+Z\,(z-z_1)=o$$

ó

$$X\,x+Y\,y+Z\,z-(X\,x_1+Y\,y_1+Z\,z_1)\,t=o$$

en coodernadas homogéneas, estando dados los coeficientes por las igualdades

$$X=dy_1\,d^2_{z_1}-dz_1\,d^2_{y_1}\,,\;Y=dz_1\,d^2_{x_1}-dx_1\,d^2_{z_1}$$

y

$$Z=dx_1\,d^2_{y_1}-dy_1\,d^2_{x_1}\,,$$

(*) Las citas que se hacen en este trabajo se refieren á mi *Tratado de Geometría Analítica*, indicando por número I ó II el tomo 1.º ó 2.º de este Tratado.

las coordenadas x_2 é y_2 del punto B, de intersección de este plano con dicha arista, son $x_2 = 1$ é $y_2 = -\frac{X}{Y}$; y, por tanto, al incremento h de x_1 corresponde á y_2, el incremento

$$\Delta y_2 = h \frac{dy_2}{dx_1} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2_{y_2}}{dx_1^2} + \ldots\ldots$$

Si el punto B es ordinario, el incremento que experimenta y_2 es real cuando la variable x varía de x_1 á $x_1 - h$ y también cuando varía de x_1 á $x_1 + h$, y por tanto, Δy_2 debe conservar su signo cuando cambia el de h, si el plano osculador en el punto B es de retroceso; y debe cambiar de signo con h si dicho plano es ordinario. Luego si $\frac{d^p y_2}{dx_1^p}$ es la primera derivada que no es nula, el citado plano será ordinario ó de retroceso según que el número p sea impar ó par.

Si el punto B es de retroceso, Δy_2 tendrá dos valores para un valor infinitamente pequeño, positivo de h, y ninguno para un valor negativo ó al contrario, y estos dos valores de Δy_2 son del mismo signo ó de signos contrarios, según que el plano osculador en el citado punto sea de retroceso ú ordinario. Luego si $\frac{d^p y_1}{dx_1^p}$ es la primera derivada que tiene valores distintos para los dos arcos de curva, el plano osculador de que se trata es de retroceso ú ordinario, según que estos valores sean del mismo signo ó de signos contrarios.

4. Se dice que permanece constante ó que cambia el sentido del movimiento de una recta que recorre la superficie tangencial abc de un arco de curva ABC, según que subsiste constante ó cambia el sentido del movimiento del punto de encuentro de dicha recta con un plano P que no corta á dicho arco. plano proyectante de dicha recta desde un punto P_1 no situado en ningún plano osculador correspondiente á dicho arco

Estas dos definiciones son idénticas en el fondo, puesto que si tomamos el punto P_1 en el plano P, el sentido en que es recorrido el haz de rectas de vértice P_1 y plano P indica á la vez el sentido en que es recorrida la sección plana $P\,(abc)$ y el haz radiado de planos $P_1\,abc$ [I. 489].

Si se proyecta una curva ABC desde un punto P_1, no situado en ninguno de sus planos osculadores, la generatriz correspondiente á un punto B de dicha curva, y el plano tangente al cono proyectante en la citada generatriz, son de la misma naturaleza que dicho punto B y que la tangente b que le corresponde.

Si se corta un haz de planos por un plano P exterior á la arista de retroceso de la superficie envolvente, un rayo cualquiera de la sección y su punto de contacto con la curva envolvente respectiva, son de la misma naturaleza que el plano correspondiente del haz de planos, y que la generatriz de contacto respectiva.

Pues, si por el punto P_1 se traza una recta m que no corte á ninguna tangente del arco ABC, por ella no pasará ningún plano tangente del cono $P_1 . ABC$; y, por tanto, el sentido del movimiento del haz de planos $m . ABC$ determina á la vez la naturaleza del punto de la curva y de la generatriz correspondiente del cono proyectante. Según esto, si el plano límite de un sistema de coordenadas binarias cualquiera, no es tangente á la curva ABC en el punto B, uno de los vértices del tetraedro de referencia situado en dicho plano cumple las condiciones del punto P_1 antes citado; y, por tanto, la naturaleza del punto B y de la tangente que le corresponde, se obtiene hallando la naturaleza de la generatriz y del plano tangente del cono que proyecta la curva dada desde dicho vértice. Cuando este punto es el punto de encuentro del plano límite citado con el eje OZ, la determinación de los puntos y tangentes singulares de la

curva alabeada se reduce á la de los elementos singulares de la superficie cónica, que representa la ecuación obtenida eliminando la variable z entre las dos ecuaciones de la curva.

Si el plano límite del sistema de coordenadas adoptado es tangente á la curva ABC en el punto B, se efectúa la transformación indicada al final del párrafo 2.

Madrid, 25 de Febrero de 1910.

XXXI. — Le Sous-azoture de carbone $C^4 N^2$.

PAR CH. MOUREU ET J. CH. BONGRAND

Il y aura bientôt un siècle — c'est exactement en 1815 — que Gay-Lussac découvrit le cyanogène. Depuis cette époque, on n'a pas encore, à notre connaissance, obtenu d'autre composé défini qui soit exclusivement formé de carbone et d'azote. Nous avons isolé un corps de cette nature, qui répond à la formule C^4N^2. Le cyanogène C^2N^2 étant *l'azoture de carbone*, nous appellerons la nouvelle substance *sous-azoture de carbone.*

Cette nomenclature est analogue à celle qui sert à désigner les oxydes du carbone. Voici ce parallélisme;

CO^2. — Bioxyde de cabone (anhydride carbonique).	
CO. — Oxyde de carbone.....	$C^2 N^2$ azoture de carbone (cyanogène).
$C^3 O^2$. — Sous-oxyde de carbone.....	$C^4 N^2$ sous-azoture de carbone.

Nous avons préparé le sous-azoture de carbone en soustrayant 2 molécules d'eau à la butine-diamide

$$CONH^2 - C \equiv C - CONH^2.$$

Sa structure et sa fonction chimiques découlent de ce mode d'obtention: c'est le butine dinitrile $N \equiv C - C \equiv C - C \equiv N$ ou dicyanacétylène, qu'on peut envisager aussi comme étant un cyanure de carbone $C^2 (CN)^2$.

PROPRIÉTÉS. — Le sous-azoture de carbone fond à 20°5-21° en un liquide incolore, qui se solidifie par le moindre refroidissement, en gros cristaux blancs. En le chauffant très légèrement, on peut le sublimer sur une paroi froide; il se présente alors en fines aiguilles blanches. Il bout á 76° sous

la pression de 753^{mm}. Par son odeur, ainsi que par les propriétés violemment irritantes de sa vapeur, il rappelle le cyanogène.

Très aisément combustible, le contact d'un corps en ignition l'allume instantanément. Sa vapeur prend même feu spontanément à l'air vers la temperature de 125°, propriété analogue à celle bien connue du sulfure de carbone CS^2, dont le point d'inflammation à l'air est voisin de 150°. La flamme qu'il presente à la combustion est pourprée, rappelant par là encore le cyanogène.

Sa densité $d^{25°}_{4°}$ est 0,9708. Nous avons déterminé, pour la raie D du sodium et les 3 raies α, β, et γ du spectre de l'hydrogène, son indice de réfraction à la même temperature 25°, sa réfraction moléculaire et sa dispersion moléculaire. Réfraction et dispersion sont notablement supérieurs à celles que l'on calcule pour la formule:

$$N \equiv C - C \equiv C - C \equiv N,$$

en attribuant à l'incrément de la liaison acétylénique les valeurs que l'un de nous à récemment indiqueés (1). Voici ces differentes données:

Indice.	Réfraction moléculaire. Observée.	Calculée.	Exaltation.
$N^{25°}_{\alpha} = 1,46021...$	$M_{\alpha} = 21,461$	$C_{\alpha} = 18,299$	$M_{\alpha} - C_{\alpha} = 3,162$ (soit 17,3 °/₀)
$N^{25°}_{D} = 1,46471...$	$M_{D} = 21,641$	$C_{D} = 18,435$	$M_{D} - C_{D} = 3,206$ (soit 17,4 °/₀)
$N^{25°}_{\beta} = 1,47610...$	$M_{\beta} = 22,095$		
$N^{25°}_{\gamma} = 1,48593...$	$M_{\gamma} = 22,484$	$C_{\gamma} = 18,791$	$M_{\gamma} - C_{\gamma} = 3,693$ (soit 19,6 °/₀)

Dispersion moléculaire.

Observée.	Calculée.	Exaltation.
$M_{\gamma} - M_{\alpha} = 1,023$	$C_{\gamma} - C_{\alpha} = 0,492$	$(M_{\gamma} - M_{\alpha}) - (C_{\gamma} - C_{\alpha}) = 0,531$ (soit 107,9 °/₀)

(1) *Ch. Moureu*, Réfraction moleculaire et dispersion moleculaire des composés à fonction acétylénique *(Annales de Chimie et de Physique)*, 8.ª serie, t. VII, Avril, 1906.

Ces exaltations, analogues et en général même supérieures aux plus fortes exaltations qui aient été recontrées jusqu'ici(1), sont dues évidemment à la structure très spéciale de la molécule, où l'on voit trois triples liaisons $N \equiv C$, $C \equiv C$, $C \equiv N$ se succéder sans discontinuité.

Analyse élémentaire.—De réelles difficultés ont du être vaincues. D'une part, en effet, le corps présente, dès la température ambiante, une forte tension de vapeur, et il fallait, d'autre part, prouver qu'il ne contient pas d'hydrogène.

Nous avons employé, pour le carbone et l'azote, les procédés classiques (combustion par l'oxyde de cuivre), en observant certaines précautions, d'une part; et, d'un autre côté, M. M. Breteau et Leroux ont bien voulu doser eux-mêmes le carbone dans notre produit suivant la méthode si élégante qu'ils ont instituée (combustion par l'oxygène, en présence du platine).

A. Emploi de l'oxyde de cuivre.—1.° Le dosage de l'azote a été relativement facile. La substance, préalablement liquéfiée et chauffée vers 25°, est introduite, à la manière habituelle, dans une petite ampoule effilée, qui a été également chauffée au préalable, en vue d'éviter la solidification du produit dans la partie capillaire avant son arrivée dans le reservoir. On rassemble toute la substance dans l'ampoule, et on la refroidit soigneusement (fig. 1ere). Le verre étant bien essuyé, on fait la tare; du poids trouvé, on retranche celui de l'ampoule vide, ce qui donne le poids de la matière introduite. On bouche aussitot l'ampoule en plongeant un instant l'extrémité supérieure *b* dans de la paraffine fondue (vérifiée exempte d'azote). L'ampoule est alors coucheé sur une nacelle de platine, et le système est disposé dans le tube à combustion, a pointe de l'ampoule étant dirigée vers l'extrémité en re-

Fig. 1ere

(1) Loc. cit.

lation avec l'appareil à recueillir l'azote. Après avoir chassé l'air du tube, soit par la trompe à vide, soit au moyen d'un courant prolongée de gaz CO^2, on chauffe graduellement l'oxyde de cuivre d'avant en arrière. Bientot le bouchon de paraffine de l'ampoule fond, et la vapeur du corps peut se répandre librement sur l'oxyde de cuivre chauffé au rouge pour y être brûlée. On termine l'opération comme à l'ordinaire.

Le volume d'azote trouvé doit subir une petite diminution, correspondant à l'air de l'ampoule. A cet effet, l'ampoule, avant qu'on y introduitsît la substance, était pesée pleine d'eau, ce qui donnait son volume; connaisant le poids de la substance et sa densité, on en déduisait son volume, et en suite celui de l'air demeurant finalement dans l'ampoule; les $\frac{4}{5^e}$ de cet air (azote) devaient être retranchés du volume du gaz recueilli dans l'appareil à azote.

2.° Pour le dosage du carbone, la substance était introduite dans une ampoule de forme spéciale A' (fig. 2eme), effilée

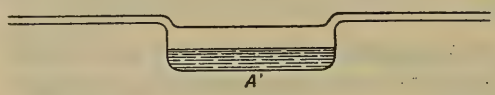


Figura 2eme

et ouverte à ses deux extrémités; cette opération, ainsi que la pesée, était effectuée en observant les précautions indiquées ci-dessus pour l'azote. L'ampoule, disposée sur une nacelle de platine, est portée dans le tube à combustion, dont l'avant a été chauffé préalablement au rouge; à l'arrière de la nace lle, on place un tortillon d'oxyde de cuivre, qu'on chauffe très modérément. On fait aussitot passer très lentement l'oxygène soigneusement desséché, et on termine l'opération à la manière habituelle.

B. Méthode Breteau et Leroux. — Nous ne pouvons que

renvoyer, pour les détails, aux mémoires spéciaux publiés dans ces derniéres années par les auteurs. *(Comptes rendus; Bull. Soc. Chim.; Journ. de Pharm. et de Chimie.)*

Voici les résultats des analyses:

	Substance.	CO^2.	C p. 100.	H^2O.	H p. 100.	N humide.	N p. 100.
I (Breteau et Leroux)..	$0^g,2203$	$0^g,5129$	63,49	$0^g,0052$	0,26		
II (oxyde de cuivre)...	0 ,3005	0 ,6954	63,11	0 ,0152	0,56		
III...	0 ,1407					$45^{cm^3},06$ (19°-758 mm)	36,55
IV.....	0 ,0905					$28^{cm^3},4$ (17°-761 mm)	36,31

	Calculé pour $(C^2N)^2$
C pour 100.....	63,15
N pour 100.....	36,84

Les résultats, comme on voit, sont très satisfaisants. Les petites quantités d'eau peseés sont manifestement imputables aux erreurs d'expérience.

Densité de vapeur. — La méthode de V. Meyer nous a donné, dans la vapeur de toluène (110°), les chiffres 2,89 et 2,78, dépassant sensiblement la valeur 2.629 exigée par la formule C^4N^2. Nous avons pensé que la distance des points d'ébullition du toluène et du sous-azoture de carbone (110° — 76° = 34°) était insuffisante.

D'un autre côté, le fait que le corps prend feu à l'air vers 130° nous interdisait d'opérer à une température notablement supérieure à 110°. Nous avons eu recours, en conséquence, à la méthode d'Hofmann. Six expériences, exécutées à des températures allant de 35° à 184°, nous ont donné les résultats suivants:

TEMPERATURE	Densité.
56° (vapeur d'acétone).....	2,604
80 (» de benzène).....	2,531
100 (» d'eau).....	2,516
110 (» de toluène).....	2,543
135 (» de xylène).....	2,560
184 (» d'aniline).....	2'574

Densité calculée pour $C^4 N^2$..... 2,629.

A propos du point d'ébullition du sous-azoture de carbone.

Le sous-azoture de carbone bout à 76°. Le point d'ébullition du dinitrile saturé correspondant (butanedinitrile, nitrile succinique) est 266°. Il y a, entre les deux composés, un écart de 190°:

		Eb.	Différence.
1	$NC-C\equiv C-CN$.....	+ 76°	..... 190°
	$NC-CH^2-CH^2-CN$.....	+ 266°	

Cette diférence est considérable; elle ne se retrouve pas, en général, entre des composés acétyléniques et les corps saturés correspondants. Restant dans les corps à fonction nitrile, faisons quelques comparaisons:

		Eb.	Différence.
2	$C^5H^{11}-CH^2-CH^2-CN$.....	+ 195°	..... nulle
	$C^5H^{11}-C\equiv C-CN$.....	+ 195°	
3	$C^6H^{13}-CH^2-CH^2-CN$.....	+ 215°	..... 2°
	$C^6H^{13}-C\equiv C-CN$.....	+ 213°	
4	$C^6H^5-CH^2-CH^2-CN$.....	+ 261°	..... 32°
	$C^6H^5-C\equiv C-CN$.....	+ 229°	

L'écart est nul ou insignificant dans les couples 2 et 3; il est sensible dans le couple 4, tout en y étant incomparablement moindre que dans le couple 1.

Pourquoi donc le point d'ébullition du butinedinitrile (sous-azoture de carbone) est il si inférieur (de 190°) à celui du butanedinitrile? C'est qu'entre ces deux corps existe une différence capitale: tandis que le second posséde dans sa molécule 3 sortes d'atomes: du carbone, de l'hydrogène, et de l'azote, le premier n'est formé que de deux éléments: le carbone et l'azote. Quelques rapprochements vont montrer le bien fondé de cette explication:

		Eb.	Différence.
5	$CH^3 - CH^3$	— 85°	167°
	$CH^3 - CN$	+ 82°	107°
	$CN - CN$	— 25°	
6	$CN - CN$	— 25°	244°
	$CN - CH^2 - CN$	+ 219°	47°
	$CN - CH^2 - CH^2 - CN$	+ 266°	

Ainsi, considérant d'abord le groupe 5, nous voyons que la substitution de CN à CH^3 dans l'éthane $CH^3 — CH^3$, ce qui donne l'éthane-nitrile ou acétonitrile $CH^3 — CN$, éléve le point d'ébullition de 167°, d'une part; et d'autre part, le remplacement du deuxième CH^3 par un autre CN, ce qui donne l'éthane dinitrile ou cyanogène $CN — CN$, loin d'élever encore le point d'ébullition, l'abaisse, au contraire, de 107°. Qu'est ce à dire, sinon que le cyanogène $C^2 N^2$, formé exclusivement de carbone et d'azote, est, en réalité, un corps tout autre que l'acetonitrile $C^2 H^3 N$, dont la molécule posséde, en outre, de l'hydrogène?

Examinons le groupe 6, où nous avons inscrit, à la suite du cyanogène (le plus simple des dinitriles), ses deux homologues immédiatement supérieurs. Pour le propanedinitrile $CN — CH^2 — CN$ (nitrile malonique) et le butanedinitrile $CN — CH^2 — CH^2 — CN$ (nitrile succinique), l'un et l'autre formés de 3 éléments (C, N, H), la différence des

points d'ébullition (47°), quoique relativement élevée, reste dans les limites des différences qu'on rencontre-vers les premiers termes des séries homologues (on sait que, dans les séries, le régime normal des écarts des points d'ébullition ne commence véritablement qu'à partir du 6.e ou 7.ème terme). Tout au contraire, entre l'éthanedinitrile $CN - CN$ (cyanogène) et le propanedinitrile $CN - CH^2 - CN$ (nitrile malonique), nous trouvons un écart de 244°, très notablement supérieur au précédent. La raison en est que, si le propanedinitrile et le butanedinitrile sont deux homologues, le propane dinitrile n'est pas un homologue véritable du cyanogène, dont la molécule, beaucoup plus simple que la sienne, en est très différente, puisqu'elle ne comprend que deux sortes d'atomes: du carbone et de l'azote; tandis que le propanedinitrile, comme le butanedinitrile, renferme, en outre, de l'hydrogène.

Donnons un dernier exemple, choisi dans une série toute différente:

		Eb.	Différence.
7	$CH^3 - CH^2 - CH^3$	— 45°	94°
	$CH^3 - CH^2 - CHO$	+ 49°	42°
	$O = C = C = C = O$	+ 7°	

On voit que la substitution d'un atome d'oxygène à H^2 dans un groupe CH^3 du propane $CH^3 - CH^2 - CH^3$, ce qui donne l'aldéhyde propylique $CH^3 - CH^2 - CHO$, à élevé le point d'ébullition de 94°. Or, le troisième terme du groupe, d'où l'hydrogène est totalement absent, et qui comprend 2 atomes d'oxygène (c'est le sous-oxyde de carbone, récemment découvert par Diels), loin de bouillir plus haut (et il devrait bouillir notablement plus haut) que l'aldéhyde propylique, bout à 42° plus bas. C'est que sa molécule, au lieu de 3 sortes d'atomes (C, H, O), n'a que du carbone et de l'oxygène.

Ainsi, deux corps, par ailleurs aussi voisins et analogues qu'on voudra, mais dont l'un n'est formé que de deux éléments, tandis que trois sortes d'atomes constituent la molécule du second, sont fondamentalement différents; leur énergie interne et leurs propriétés sont très differentes. Par là se trouve suffisamment justifiée, à notre sens, l'écart notable (190°) entre les points d'ebullition du sousazoture de carbone (+ 76°) et du dinitrile saturé correspondant (+ 266°).

Il n'est pas douteux que d'autres propriétés, physiques ou chimiques, ne donnent lieu, en ce qui concerne le sousazoture de carbone, à des remarques semblables.

XXXII. — Teoría elemental de los péndulos horizontales.

Por Eduardo Mier.

En los instrumentos empleados actualmente para estudiar los terremotos se trata de aprovechar la inercia de masas pendulares, que unas veces pueden girar en torno de un punto de suspensión ó de un eje horizontal, debajo de los cuales se halla la masa; otras alrededor de ejes casi verticales, y algunas á un lado ú otro de un punto ó de ejes de apoyo sobre los que insiste la masa pendular.

Esos tres grupos de péndulos se distinguen en sismología con los adjetivos de verticales, horizontales é invertidos, no muy apropiados á la realidad, y el presente trabajo tiene por único fin exponer, breve y elementalmente, la teoría de los segundos, sin más pretensión que la de dar una idea algo clara de su modo de funcionar.

Imagínese para ello un péndulo ordinario, vertical, con su hilo ó varilla, su masa y su punto de suspensión. En estas condiciones el péndulo puede oscilar libremente en cualquiera de los planos verticales, en número infinito, que se puede concebir en el espacio, pasando por el péndulo en reposo, en cada uno de los cuales la masa trazará arcos de mayor ó menor amplitud, pero todos ellos del mismo radio, determinado por la longitud del hilo ó varilla.

Si el punto de suspensión se reemplaza por un eje horizontal y la masa se halla unida á una varilla rígida, aquel número infinito de planos quedará reducido á uno solo, vertical, normal al eje de giro, en el cual podrá describir la masa ar-

cos más ó menos grandes de la circunferencia cuyo radio es la longitud del péndulo.

Y si á ese eje de giro se le hace perder su horizontalidad, claro es que el plano de la circunferencia citado, normal á él, perderá á su vez la verticalidad y se inclinará en el espacio, existiendo siempre en ella un diámetro, que será horizontal, y otro á este último perpendicular, que marcará la línea de máxima pendiente del plano de oscilación, y cuyos extremos corresponderán al punto más alto y al más bajo de la circunferencia que puede recorrer la masa al girar en torno de su eje inclinado.

Obsérvese que esa circunferencia está inclinada con relación al plano horizontal el mismo ángulo formado en el espacio por el eje de giro del péndulo y la vertical, perpendiculares respectivamente á aquellos planos, y que, en virtud de esto, si el último águlo le designamos por i, este mismo valor i tendrá el que forme el diámetro de máxima pendiente con el horizonte.

Este ángulo del diámetro de máxima pendiente con su proyección horizontal puede tomar todos los valores posibles desde O, cuando la circunferencia sea horizontal y el eje de giro perfectamente vertical, por lo tanto, hasta 90°, en el cual caso se obtendrá la posición del péndulo vertical, con su plano y circunferencia de oscilación verticales y el eje horizontal.

Para esta última posición se sabe que si al péndulo se le separa de su posición vertical haciéndole recorrer á uno de los lados un arco s, la amplitud de la oscilación $a = 2s$, es simétrica con relación á la vertical del eje de giro; se sabe también que la velocidad v con que llega la masa m del péndulo de peso p al punto más bajo del arco a, ó sea el extremo inferior de aquel diámetro que se llamó de máxima pendiente, está dada por la ecuación de las fuerzas vivas

$$\frac{1}{2} m v^2 = p h,$$

representando por h la flecha del arco a, ó altura de caída, y que, en general, la velocidad v_1 en un punto cualquiera de la trayectoria puede deducirse de la igualdad

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = p h_1,$$

indicando h_1 la altura de caída correspondiente al punto considerado.

En otros términos, despejando v_1 de $\frac{1}{2} m v_1^2 = m g h_1$,

$$v_1 = \sqrt{2 g h_1}$$

dará las distintas velocidades de caída por el arco $s = \frac{1}{2} a$, iguales á las que tiene la masa al ir ascendiendo por el otro arco, simétrico respecto del diámetro vertical, y en cualquier punto de la trayectoria se obtendrá la velocidad correspondiente sin más que dar á h_1 el valor que corresponde, en la flecha del arco a, á la distancia entre la intersección de aquel diámetro con la cuerda horizontal, correspondiente á los puntos más altos del arco a y la proyección sobre ese mismo diámetro del punto considerado.

Esa velocidad, nula en los extremos del arco ($h_1 = o$; $v_1 = o$), adquiere su máximo valor $v = \sqrt{2gh}$ en el extremo del diámetro vertical; y creciendo al bajar la masa ó disminuyendo al subir, en la misma proporción, pasa por todos los valores comprendidos entre aquellos dos.

También conviene recordar que, para amplitudes pequeñas, se demuestra que la duración de una oscilación simple, ó tiempo empleado por el péndulo en ir de la una á la otra de sus posiciones extremas, es, con suficiente aproximación:

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

designando por l la longitud del péndulo ó radio de la circunferencia de que se ha hablado.

Si ahora se supone que el péndulo está en reposo y trazada en el espacio la horizontal, perpendicular al plano de oscilación, que pasa por el extremo inferior del diámetro vertical de la circunferencia de giro, y que ese ángulo de 90^0 que ambas líneas forman, disminuye, quedando inmóvil aquella horizontal y moviéndose el diámetro de máxima pendiente, sin salirse del plano vertical por ambas rectas determinado desde un principio, se irán obteniendo las infinitas posiciones que puede tomar uno de los llamados péndulos horizontales.

La imagen de este movimiento fácilmente se concibe sin más que suponer la circunferencia vertical y que el plano que la contiene va girando en torno de su intersección con otro horizontal que pase por el extremo inferior del diámetro vertical de aquélla, variando, por lo tanto, las proyecciones de esa circunferencia móvil sobre este último plano desde una recta, igual al diámetro, hasta la misma circunferencia, cuando ésta llegue al plano horizontal, no sin pasar por todas las elipses posibles, cuyo mayor eje sea la proyección, siempre en su verdadera magnitud, del diámetro horizontal, y cuyo eje menor sea la del diámetro de máxima pendiente, dado por el producto $2\ l \cos i$, si como se dijo i designa el ángulo de los dos planos que se consideren, igual al que en el espacio forman el eje de giro del péndulo y la vertical, á ellos perpendiculares.

La cuerda correspondiente á los extremos del arco a, ya mencionado, como horizontal que es, claro resulta que aparecerá también proyectada en su verdadera dimensión, y que á su flecha h le corresponderán los valores $h \cos i$, quedando toda aquella cuerda y sus extremos, por lo tanto, á una altura sobre el plano horizontal dada por h sen i.

Si para una situación de la circunferencia móvil, determinada por el valor de i, se separa el péndulo de la posición

de reposo, que tiene, según el diámetro de máxima pendiente, como antes se hizo con el péndulo vertical, y se le abandona en un extremo del arco a, claro es que al caer hacia aquella posición de máxima pendiente ó de reposo, puede aplicarse la ecuación de las fuerzas vivas y que á ella llegará animado de la velocidad dada por

$$\frac{1}{2} m v'^2 \, (v'^2) = ph \operatorname{sen} i = mgh \operatorname{sen} i,$$

de donde

$$v' = \sqrt{2\,g\,h \operatorname{sen} i}$$

y en general, para una posición definida, como antes por el valor de h_1; y designando por v_2 la velocidad, se tendrá que

$$v_2 = \sqrt{2\,g\,h_1 \operatorname{sen} i}.$$

y que las relaciones de las velocidades del péndulo vertical y del horizontal están, para los mismos valores de los arcos considerados, en la relación

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2\,g\,h_1}}{\sqrt{2\,g\,h_1 \operatorname{sen} i}} \text{ ó sea } \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\operatorname{sen} i}.$$

Esta constante relación entre ambas velocidades, necesariamente implica que, si V_2 y V_1 expresan las velocidades medias,

$$\frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\operatorname{sen} i}.$$

Además, si T_2 y T_1 son las duraciones de las oscilaciones simples, en el péndulo horizontal y en el vertical, como el trayecto recorrido es el mismo arco a:

$$T_2 \,.\, V_2 = a = T_1 \,.\, V_1$$

y, por lo tanto,

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{V_2}{V_1} = \sqrt{\text{sen } i}$$

ó en otra forma:

$$T_2 = \frac{T_1}{\sqrt{\text{sen } i}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g \,.\, \text{sen } i}} = \pi \sqrt{\frac{\frac{l}{\text{sen } i}}{g}}$$

que claramente muestra que la oscilación de un péndulo horizontal de longitud l, dura el mismo tiempo que la de otro vertical de longitud $\frac{l}{\text{sen } i}$.

Como i puede pasar por todos los valores posibles entre 90° y 0°, y por lo tanto, sen i entre 1 y 0, se comprenderá la enorme ventaja de usar péndulos horizontales cuando se trate de obtener períodos de oscilación muy grandes, ya que teóricamente es posible hacerles variar entre los que corresponden á un péndulo de longitud infinita, cuando el eje de giro es vertical ($i = 0$; sen $i = 0$; $\frac{l}{\text{sen } i} = \infty$), y al mismo péndulo colocado verticalmente ($i = 90°$; sen $i = 1$; $\frac{l}{\text{sen } i} = l$), es decir, entre ∞ y $\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$. Por ejemplo, un péndulo horizontal de 1 m. de longitud, cuyo eje esté inclinado 1°, respecto de la vertical, tendrá un período de oscilación equivalente al de otro vertical de $\frac{1^m}{\text{sen } 1°} = \frac{1^m}{0{,}01745} = 57^m{,}31$.

La introducción en esta teoría del concepto del diámetro de máxima pendiente, facilita en extremo poder ver con claridad cómo funcionan los péndulos horizontales, en los que aquella línea reemplaza la vertical que pasa por el eje ó punto de suspensión de los péndulos ordinarios.

En estos últimos, hallándose completamente fijo en el espacio el eje de suspensión, el separar la masa de la vertical trae consigo oscilaciones, que terminan cuando definitivamente queda en esa vertical; y en los horizontales sucede lo propio, cuando se separa la masa del diámetro de máxima pendiente.

Esta línea de máxima pendiente se halla siempre bien de finida, y es la intersección del plano de la circunferencia de giro de la masa con el determinado por el eje del péndulo y la vertical que pasa por el centro de aquella circunferencia.

Mientras el eje de giro y esa vertical se muevan en el mismo plano, aumentando ó disminuyendo el ángulo que formen, podrá variar la longitud del péndulo vertical equivalente con esos cambios de *i*, y podrá subir ó bajar la masa pendular en el referido plano; pero de este último jamás sale el diámetro de máxima pendiente, y, por lo tanto, el péndulo no oscilará en torno de su eje.

Por lo contrario, si una de esas dos líneas sale de su plano primitivo: si, por ejemplo, la vertical experimenta una desviación, el diámetro de máxima pendiente también la recibirá, y en busca de esa posición de equilibrio estable emprenderá el péndulo sus oscilaciones, como los verticales hacen cuando la vertical se desvía y rescatan aquella posición perdida.

Y así como los péndulos verticales cuando, sin alterarse la dirección de la gravedad, un terremoto desvía horizontalmente el eje de suspensión, corriéndole paralelamente á sí mismo, dejan en un principio retrasada la masa pendular por efecto de la inercia, y esta masa adquiere movimiento oscilatorio, de análogo modo, si en el espacio se traslada paralelamente á sí mismo el ángulo formado con la vertical por el eje de un péndulo horizontal, por efecto de un terremoto, la misma traslación experimenta la línea de máxima pendiente, y en virtud de ello la masa pendular se retrasa y luego oscila, como en los péndulos verticales acontecía.

De ese modo, sin necesidad de recurrir tan sólo á desviaciones de la vertical, cuya existencia aun no ha podido comprobarse con certeza siempre en los terremotos, puede explicarse el modo de funcionar de los péndulos horizontales cuando se verifican esos fenómenos, y parece que de ello se adquiera más claro concepto que cuando se funda su teoría exclusivamente en los efectos de aquellas desviaciones, de problemática existencia, hasta hoy, en muchos casos.

XXXIII. — Contribución al estudio de las aminas cíclicas.

Por F. Lavilla Llorens.

Estudiando atentamente la producción de los compuestos resultantes de hacer actuar sobre las aminas cíclicas agentes de oxidación de muy diversa naturaleza, y en circunstancias muy variadas, hemos encontrado que en la mayoría de ellas origínanse, en determinadas condiciones, líquidos ó precipitados coloreados, utilizables como caracteres de dichas aminas cíclicas.

Los cuerpos oxidantes que hemos utilizado con mejor éxito, después de varios ensayos, y que conceptuamos más adecuados para este fin, entre otras razones por adaptarse á la condición de sensibilidad y actuar con mayor rapidez que otros, son: el permanganato potásico, el ferricianuro potásico y los persulfatos sódico y amónico, dando la preferencia al primer reactivo por haber observado en él una acción manifiestamente más enérgica, aun dada la superior actividad oxidante atribuída á los últimos.

De la anilina se han dado á conocer sus reacciones con oxidantes; mas no de las principales aminas cíclicas, ni las condiciones en las cuales se realizan más fácilmente.

Las aminas utilizadas al efecto en nuestras investigaciones, han sido la anilina, toluidinas orto, meta y para; xilidinas 1.2.4; 1.3.4; 1.4.5, y las naftilaminas α y β.

La anilina, y en general todas las aminas, originan mediante oxidación permangánica, productos resultantes de un grado de oxidación más ó menos completa, que son de naturaleza quinónica en algunos casos, y también azoicos,

diazoicos é hidrazoicos, acompañados del consiguíente precipitado pardo de óxido de manganeso, sin presentar coloraciones ostensibles. Pero la condición de hallarse la amina libre y ser sometida en tal forma á la acción del reactivo, no determina, como decimos, reacciones coloreadas, y, por consiguiente, de tanta complicación.

Para la producción de coloraciones con las aminas cíclicas y agentes de oxidación hemos encontrado, y por ello proponemos operar preferentemente en estas condiciones, que dichos cuerpos se hallen en forma de sales y en solución ácida; tales circunstancias parecen más necesarias porque de este modo se halla, sin duda, protegido el grupo amidógeno que aquéllas contienen, por lo cual no reacciona el oxidante sobre él con tanta facilidad y puede efectuarse en un complejo ciclo de reacciones la producción de leucobases que originarán los colores característicos.

Las reacciones secundarias, que de seguro prodúcense en semejantes acciones, se manifiestan y pueden observarse por el cambio de coloraciones, más fácilmente visible, obtenido operando con líquidos de gran diluición y pequeñas cantidades de oxidante.

Evidentemente es de suma conveniencia el medio ácido, porque en líquidos neutros ó alcalinos las reacciones son distintas, y de preferencia tienden las aminas á transformarse en compuestos azoicos ó diazoicos; sin embargo, en medio alcalino, como más adelante veremos, y con determinados oxidantes, también se consigue algún resultado, pero no reviste carácter tan general.

Establecida la condición primordial de operar en medio ácido, nos propusimos determinar el grado de concentración necesario para alcanzar la producción de cuerpos coloreados, habiendo observado ser suficiente una acidez muy débil, aun tratándose de ácidos poco enérgicos, como el ácido bórico ó los orgánicos. No es, sin embargo, completamente ajena á las condiciones de la reacción en la mayoría de los casos,

conforme veremos, la concentración al grado de acidez tratándose del ácido clorhídrico y aun de los demás; pero ya sólo influye en la velocidad de la reacción, y escasamente en la variación del matiz final. Si tratamos de operar en presencia del ácido sulfuroso ú otro fuertemente reductor, actúa sobre el permanganato y no se produce la reacción.

La oxidación electrolítica, con débil densidad de corriente, permite también observar en su principio cambios análogos de color en soluciones ácidas con ácidos minerales.

El modo operatorio consiste en transformar la amina en sal por la acción del ácido, dejando éste en exceso y adicionando después el permanganato potásico ú oxidante que deseemos utilizar; desde el primer instante, en el caso del primer reactivo, obsérvanse cambios de coloración que no tardan en ser definitivos, á no tratarse de soluciones extraordinariamente diluídas.

Siendo el permanganato potásico oxidante activísimo, se comprende su manera de reaccionar rápida, á diferencia del ferricianuro potásico, y también de los persulfatos potásico y amónico, de acción muy lenta en la mayoría de los casos, hasta el punto de ser necesarias varias horas, con líquidos diluídos ó pequeña cantidad de reactivo, bastando algunas gotas de solución de permangato al dos por mil para un resultado rápido, por lo cual le concedemos preferente empleo.

Cuando ensayamos soluciones de alguna concentración, debe tenerse en cuenta que no solamente se produce coloración, sino también abundante precipitado de matiz más obscuro, que llega á ser casi negro pasado algún tiempo, y con mayor facilidad si vertemos exceso de reactivo.

Se comprenderá fácilmente que las coloraciones pueden aparecer ligeramente modificadas empleando el ferricianuro, muy especialmente por el color de éste, como también si utilizásemos exceso de permanganato, variaciones que deberán tenerse muy presentes al determinar los espectros de absorción de dichas soluciones.

A continuación exponemos el resumen de las coloraciones obtenidas en las condiciones que antes se citan.

Anilina.—Al adicionar el permanganato potásico al líquido ácido, se observan primeramente coloraciones pardas, más ó menos rojizas, con tinte violáceo, que viran al azul característico, que después de mucho tiempo adquiere tono algo verdoso, debilitándose su intensidad de tal modo que llega casi á desaparecer; este fenómeno se produce, en general, igualmente con las demás aminas. La observación de los cambios es apreciada con mayor facilidad cuando se trata de soluciones diluídas, y añadiendo con precaución el reactivo.

El persulfato potásico ó amónico, de acción más lenta en todos los casos, como hemos dicho, comienza por manifestar la coloración azul en la superficie, siendo de tono más franco que el anterior y recuerda el de las soluciones de añil.

Entre los derivados de la anilina hemos ensayado la monometil-anilina que origina idénticas coloraciones que ella.

Toluidina-orto. Coloración azul de matiz algo distinto al de la anilina, en igualdad de condiciones. Tratándose de la anilina hemos observado que no tiene gran influencia en la tinta final que el líquido sea más ó menos ácido con el clorhídrico; pero al operar con las toluidinas y con casi todas las demás aminas, es de tal modo importante la presencia de diversas cantidades de ácido que llamamos la atención acerca de semejante hecho. Las coloraciones con la toluidina-orto pueden presentarse muy distintas, según las condiciones operatorias, hasta tal punto, que con idénticos reactivos obtenemos colores que varían desde el amarillo pardo, acaramelado, al azul verdoso, semejante al observado con la anilina. La circunstancia que influye más directamente es la mayor ó menor acidez del líquido, del tal modo que al aumentarla evitamos la formación del color azul, favoreciendo la del pardo.

Que el grado de acidez ó energía del ácido tiene influen-

cia decisiva, lo hemos comprobado operando, primeramente, con soluciones en las que era cada vez menor, llegando un momento en el que francamente se manifiesta el color azul, que vira al verdoso pasado algún tiempo. Sustituyendo el ácido clorhídrico por otro más débil, como el acético, aparecen siempre coloraciones azules, sea cual fuere el grado de concentración ácida.

Los fenómenos relatados determinan las condiciones más adecuadas para observar las reacciones que nos ocupan, cuales son: medio débilmente ácido por el clorhídrico, sin lo cual la acción oxidante se manifiesta de tal modo enérgica que los productos originados son casi totalmente distintos.

Como hemos dicho anteriormente que la anilina no acusa grandes variaciones de color, aun con líquidos fuertemente ácidos con el clorhídrico, pensamos que sería posible determinar la presencia de dicha base en la toluidina, sin más que operar con exceso de ácido y observando si al final aparece verdoso; en efecto, adicionando anilina á la toluidina pura, por nosotros empleada, se percibe dicha coloración, si bien no es un medio de investigación de gran sensibilidad.

Toluidina-meta. Color primeramente rojizo que vira al azul.

Toluidina-para. Coloración final roja.

Xilidina 1. 2. 4. Color rojo débilmente violáceo.

Xilidina 1.3.4. Color rojo, más violáceo que el anterior.

Xilidina 1.4.5. Color rojo.

Naftilamina α. Coloración azul.

Naftilamina β. Color pardo verdoso, muy poco intenso, aun con soluciones algo concentradas.

Hemos dicho al principio de esta Nota que para obtener coloraciones con las aminas cíclicas era la condición más ventajosa el operar en medio ácido; efectivamente, si hacemos actuar el permanganato sobre las aminas cíclicas en líquido alcalinizado por los hidróxidos potásico, sódico, el amoníaco ó carbonatos alcalinos, la acción oxidante es muy

distinta del caso anterior, manifestándose en todas las ocasiones coloración verde, debida á la reducción del permanganato, á la vez que hay precipitado de óxido de manganeso.

Ensayos practicados con el ferricianuro potásico nos permiten dar á conocer la reacción de las aminas cíclicas con este reactivo en líquido alcalino; en todos los casos referentes á las aminas anteriormente citadas aparecen, según la diluición, precipitados abundantes ó ligeros enturbiamientos de color rojo anaranjado más ó menos intensos, y que, pasado algún tiempo, se obscurecen fuertemente, pero con más rapidez en presencia de exceso de reactivo. La reacción es muy sensible.

Como aplicación de alguna de las reacciones anteriormente estudiadas, creemos útil proponer una, referente al reconocimiento del cloro libre en una masa gaseosa: basta para ello humedecer una tira de papel de filtro en solución clorhídrica ó sulfúrica de anilina ó toluidina-orto é introducirla en la atmósfera donde se sospecha la presencia del cloro; al punto adquiere el papel tinte pardo que vira al verdoso, y azul al cabo de muy poco tiempo, aun cuando se sustraiga á la acción del gas que tratamos de reconocer. La reacción practicada de este modo alcanza gran sensibilidad.

Las otras aminas ó dan resultados negativos, ó las coloraciones, cuando se producen, son muy poco perceptibles, además de su escasa sensibilidad.

XXXIV.—Viaje de estudio á la Guinea española.

Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales.

Por Gustavo Pittaluga

(Continuación).

Las observaciones emprendidas acerca del *Trypanosoma gambiense* consistieron principalmente:

a) En el estudio del parásito vivo y móvil en la sangre periférica de los enfermos, examinado con preparaciones directas en fresco.

b) En el examen detenido de preparaciones teñidas.

c) En inoculaciones experimentales llevadas á cabo en conejos, cobayas, un cabrito y dos monos.

d) En el estudio histológico de las moscas del género *Glossina* recogidas en Fernando Póo y en el continente en las zonas más invadidas por la enfermedad.

Voy á dar cuenta de estas observaciones, exceptuadas las de la última serie, que se refieren al estudio histológico de las Glossinas, puesto que ha sido emprendido dicho estudio hace poco, y los resultados que se obtengan serán comunicados en colaboración con el ayudante del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII, D. Luis R. Illera.

Morfología del parásito en la sangre periférica de los enfermos.— Durante estos últimos años, á partir de 1903, las investigaciones, numerosísimas, llevadas á cabo en las colonias alemanas, francesas, inglesas, portuguesas de Africa han proporcionado material abundante y datos y nociones

definitivas acerca del *Trypanosoma gambiense*. Como es natural, yo me limitaré, pues, á comunicar ahora los resultados de nuestras personales observaciones que aporten algún hecho nuevo, ó que en algo merezcan ser conocidos.

Para los caracteres generales del Parásito, que se hallan descritos en mis precedentes Memorias: *Sobre los caracteres morfológicos y la clasificación de los tripanosomas* y *Estudios acerca de los dípteros y de los parásitos que transmiten*, etc., publicados en 1905 por la REVISTA DE LA REAL ACADEMIA DE CIENCIAS, el lector podrá consultar, además, las obras fundamentales de LAVERAN y MESNIL (1), de DOFLEIN, de PROWAZEK, de MINCHIN.

Técnica.— El examen hematológico, directo en fresco, recogiendo la sangre entre cubre-objeto y porta-objeto, permite, á veces, con los animales de experimentación, observar en un solo preparado numerosos parásitos; pero en los enfermos tripanosomiásicos el resultado es muchas veces negativo; el número de Tripanosomas casi siempre muy escaso. Para asegurarse de la existencia de los parásitos, en particular cuando se persigue con una investigación metódica definir los períodos de latencia de los Tripanosomas en la sangre periférica, es oportuno emplear el método de ROSS-RUGE para la recolección de la sangre, método que, como es sabido, consiste en extender sobre el porta cantidades bastante considerables de sangre, de suerte que se forme una espesa capa, que, sin fijación previa ninguna, apenas secada, se somete á lavado prolongado en agua destilada abundante, en un amplio cristalizador, logrando de esta suerte disolver y eliminar del todo la hemoglobina. Quedan las sombras de los estromas globulares que, solas, constituyen el fondo de la preparación, la cual, sometida luego á coloración sencilla, con azul carbonatado, ó aun á la de LEISHMANN, permitirá apreciar sobre el fondo pálido, apenas teñido, de los hematies

(1) *Trypanosomes et Trypanosomiases.*—París, Masson. ed. 1904.

privados de hemoglobina, los leucocitos y las eventuales formas parasitarias.

Apresurémonos á declarar que este método, eminentemente clínico, y desde luego sugerido por Ross para la apreciación rápida y segura de la existencia de parásitos ya englobulares *(Plasmodium, Laverania, Babesia)* ya libres *(Trypanosoma, Spirochaete, Microfilarias*, etc.), carece de cualquier aplicación para un estudio citológico, para un detallado examen morfológico de estos parásitos. En nuestras manos ha dado excelentes resultados para reunir buen número de embriones de Filaria en un preparado, y aun en este caso permite realmente obtener buenos efectos de diferenciación tintorial y poner de relieve con determinados colorantes (de los cuales en su tiempo hablaremos) la estructura de dichos embriones. Pero, en cambio, se ha demostrado del todo inadecuado para el examen de los Tripanosomas, á pesar de la afirmación de Ross, de que «*in this method the parasites... are just as visible as in the thin film owing to the fact that the haemoglobin, the opaque element of the blood, not being fixed, has been washed out during the process of staining with aqueous stains*» (1).

---

(1) Estas palabras son exactamente referidas de la Nota publicada por Ronald Ross con el título *The thick-film process for the detection of organisms in the blod* en «The Thompson Yates and Johnston Laboratories Report», vol. V, part. I, 1903, pág. 117. Una Nota precedente había sido comunicada por el mismo Ross acerca del método indicado, en *The Lancet*, Enero 10 de 1903; microfotografías de preparados hechos con el método indicado fueron publicadas en *The Journal of Tropical Medicine* del 2 de Febrero 1903. Una comprobación, con ligeras modificaciones del procedimiento, fué publicada por Ruge en Marzo del mismo año en el *Deutsche Medizin. Wochensch.*, página 205. Más tarde (Junio 20 de 1903), Bell y Lainz *(Lancet*, fecha indicada), aplicaron el método á la investigación del B. pestoso en la sangre. Finalmente, nuevas modificaciones é indicaciones del método fueron comunicadas en una Nota de Ross, Salvin-Moore y Walker (A new Microscopical Diagnostic Method and some simple methods of staining liquid blood) en *The Lancet*, 27 Julio 1907, página 219).

En efecto, aun cuando la eliminación de la hemoglobina permite obtener, en una capa muy espesa de sangre, una coloración casi nula del fondo, sin embargo los parásitos—especialmente los tripanosomas—resultan encerrados entre los sobrepuestos restos de los estromas globulares, sombreados por sus bordes persistentes, y en estas condiciones la coloración de ROMANOWSKY se obtiene difícilmente en toda su eficacia y con todo su resalte (1). La modificación de RUGE, que fija la preparación con una solución de Formol 2 por 100, y 1 por 100 de ácido acético (que no impide la disolución de la hemoglobina) no tiene otra ventaja más que la de impedir el posible arrastre de la capa de sangre durante el lavado. En cambio, á veces altera en algo la forma, aspecto y disposición de los parásitos. Haciendo el lavado con paciencia y con ciertos cuidados, siempre hemos obtenido la disolución de la hemoglobina sin que la capa de sangre se perdiera.

Para el estudio citológico, para el detenido examen de las formas parasitarias, es menester recurrir á las preparaciones extendidas en capa delgada, con el método típico, de cubre á cubre. Sin duda alguna, cuando no se opera con sangre procedente de animales de experimentación abundantemente infectados, y especialmente cuando se trata de enfermos con *Trypanosoma gambiense*, suele acontecer que en toda una preparación no se encuentre más que uno ó dos ejemplares del parásito; á veces, en muchas preparaciones, ninguno.

El método sugerido por LE DANTEC y otros, de someter

---

(1) Las soluciones colorantes sugeridas por ROSS en el trabajo indicado. y que consisten en: *A*) solución de 10 gramos azul de Metil. medic.; 5 gramos carbonato sódico; 1.000 gramos agua. *B*) solución Eosina 1 gramo en 1.000 gramos agua; han sido empleadas por nosotros con éxito, siempre que la solución de azul se deje envejecer ó se someta á la acción del calor hasta producción del Azur, que se reconoce por el aspecto rojizo, violáceo, á veces purpurino de la solución.

la sangre—mezclada previamente con algunas gotas de una solución de citrato sódico—á la centrifugación, recogiendo luego y examinando el sedimento y haciendo con éste las preparaciones, es útil en muchos casos; pero sin duda alguna altera la forma de los Tripanosomas, los cuales aparecen apiñados con excesivo número de leucocitos, y generalmente con el flagelo replegado sobre el cuerpo protoplásmico, sin que se puedan apreciar debidamente los detalles de su estructura.

Las preparaciones secas fueron teñidas, según el objeto de la investigación, ya con el azul carbonatado según MANSON, ya con el método de KOCH, ya en la mayoría de los casos, con los métodos típicos de LEISHMANN ó de GIEMSA para la coloración de ROMANOWSKY. Preparados de comprobación fueron hechos á veces con el método de MANNABERG, con HEMATOXILINA-EOSINA y con otros que se indicarán en su lugar.

La frecuencia del *Trypanosoma gambiense* en la sangre periférica de los enfermos es muy escasa.

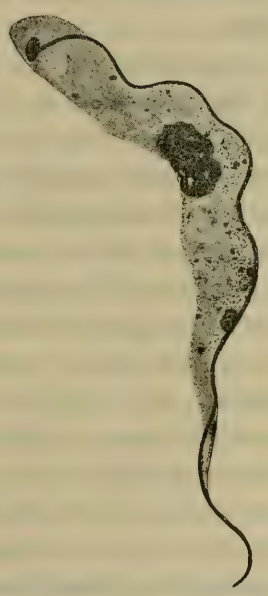
Sin embargo, debo hacer aqui una primera observación. Se afirma, por lo general, que en el último período de la tripanosomiasis humana, cuando los síntomas á cargo del sistema nervioso central dominan el cuadro sindrómico, los parásitos desaparecen del todo de la sangre periférica, ó por lo menos no se logra demostrarlos con el examen hematológico microscópico. Hemos visto casos en que esto se ha confirmado *(Camachindo, Oké)*; pero hemos visto también otros casos, como el del soldado indígena Nbá, característico (falleció el 11 de Agosto en Elobey y fué diagnosticado por nosotros el 24 de Julio), y el de Río Benito, en los cuales el examen directo de la sangre reveló la presencia del parásito, y se hallaron numerosos ejemplares del *Trypanosoma* en una sola preparación, en fresco.

El Trypanosoma hallado por nosotros en los casos examinados y ya referidos presenta los caracteres siguientes:

Dimensiones comprendidas entre 18 y 29 μ de largo; 1 $^1/_2$

y 3 $^1/_2$ μ de ancho (con la membrana ondulante). Cuerpo refringente, con algunas finas granulaciones citoplásmicas. Flagelo relativamente corto, á veces acompañado casi totalmente, hasta el extremo límite de su longitud, por una delgada masa protoplásmica, de tal suerte que la parte libre desaparece. Núcleo esférico, ó ligeramente ovoideo, situado muy cerca de la mitad del cuerpo protoplásmico; centrosoma ó blefaroplasto ó kinetonúcleo puntiforme, ligeramente ovoideo ó alargado, á dos μ de la extremidad anterior, generalmente redondeada.

La figura semi-esquemática que acompaña esta nota da idea clara del aspecto de este *Trypanosoma.*



Analicemos ahora con mayor detenimiento cada uno de estos caracteres, estableciendo las necesarias comparaciones, por un lado con los comunes Trypanosomas de los mamíferos y con el aspecto típico de *Trypanosoma gambiense* descrito por los precedentes autores, por otro lado con aquellas formas que en nuestras preparaciones, ya procedentes directamente de los negros tripanosomiásicos, ya de los animales de experimentación inoculados, presentan aspectos peculiares ó variaciones y divergencias del tipo morfológico dignas de atención.

Ante todo, es menester entenderse acerca de ciertos conceptos que recurren con frecuencia en el estudio de estas formas. LAVERAN y MESNIL (*), y con ellos los autores fran-

(*) *Trypanosomes et Trypanosomiases,* París, Masson ed., 1904.

ceses en general, consideran como extremidad *anterior* de los Tripanosomas aquella que corresponde á la parte libre del flagelo, esto es, la extremidad opuesta á la del centrosoma ó blefaroplasto. Esta interpretación es, en nuestro entender, errónea. Ya no cabe duda acerca de las afinidades y de la filiación filogénica entre *Trypanosoma* y *Herpetomonas;* y en las formas del tipo *Herpetomonas*, ya pertenezcan á especies fijas, ya pertenezcan á períodos de desarrollo de Tripanosomas, como acontece en los cultivos, en las intensas multiplicaciones esquizogónicas por partición múltiple radiada *(Tr. lewisi*, etc.), el flagelo libre abandona el citoplasma por la misma extremidad en cuya proximidad se halla emplazado el centrosoma. Esta es la extremidad anterior.

¿Es posible cambiar el concepto de *anterior* ó *posterior*, fundándose tan sólo en las analogías funcionales, esto es, fijándose tan sólo en la dirección del movimiento de traslación? Nosotros creemos firmemente que no. En un tipo morfológico la extremidad anterior y la extremidad posterior se determinan por argumentos de *homología*, no sólo de analogía. Es verdad que, generalmente, los Tripanosomas observados en la sangre fresca del huésped vertebrado (mamíferos), entre ellos *Trypanosoma gambiense* del hombre, se mueven en la dirección marcada por el flagelo libre; pero ni este fenómeno es absolutamente constante, ni el concepto funcional bastaría para caracterizar la extremidad anterior del cuerpo. Tanto valdría en los Cefalópodos considerar como anterior la dirección del movimiento en las rápidas huídas determinadas por las contracciones del cuerpo y en el *Astacus fluviatilis* el movimiento retrógrado y en los Cangrejos el lateral. No. Los Trypanosomas se mueven en dirección posterior, y la extremidad anterior del cuerpo es la que encierra el centro cinético, el blefaroplasto. El movimiento ondulatorio de la membrana tiene su origen en una ondulación del flagelo libre, y por esto la impulsión es desde la extre-

midad del flagelo hacia el blefaroplasto; pero la dirección de la traslación del cuerpo no es argumento suficiente para alterar los conceptos de homología, tanto más cuando se trata al propio tiempo de cuerpos homodinámicos, comparando los Tripanosomas con las formas afines de flagelo anterior.

Llamaremos, pues, extremidad anterior la que encierra el corpúsculo basilar del flagelo (blefaroplasto) y extremidad posterior de los Trypanosomas la de que parte el flagelo libre.

En cuanto á la denominación del corpúsculo cromático basilar, parece conveniente avenirse á la indicada por WOODCOCK (1) y por MINCHIN (2), y adoptada por los alemanes, llamando *Kinetonúcleo* dicho cuerpo, y *Trofonúcleoel* núcleo propiamente dicho. Sin embargo, las dos expresiones no son enteramente correspondientes; esto es, el *Kinetonúcleo* de Minchim no corresponde exactamente, desde el punto de vista morfológico, al blefaroplasto ó centrosoma. El Kinetonúcleo es una formación especial que dirige en los períodos de actividad carioplástica la disposición y partición del flagelo (borde de la membrana), pero no se identifica del todo, no se confunde con el corpúsculo basilar que se halla á la extremidad anterior (en nuestro sentido) del flagelo mismo.

En nuestras preparaciones hállanse formas de división longitudinal de *Trypanosoma gambiense* (de algunas de ellas el Dr. Rodríguez Illera ha hecho buenas microfotografías). En ellas el Kinetonúcleo aparece, sí, claramente partido en dos masas cariosómicas, pero contrariamente á cuanto indican la mayor parte de los autores, entre ellos Laveran y Mesnil, etc., la separación de las dos masas cromáticas neoformadas es muy tardía en comparación con el proceso ya

---

(1) *The Haemoflagellates.*—A Rewiew, etc.—*Quart. Journ. of Microsc. Sciences,* 1906, L. p. 151-231, por H. M. WOODCOCK.

(2) Investigations on the Development of Trypanosomes in Tsetse Flies and others Diptera. – *Quart. Journ of Micr. Sc.* LII, 1908, p. 159-260.

muy adelantado, de división de las membranas y del flagelo. Flagelos y bordes de la membrana ondulante aparecen en efecto ya totalmente partídos como si se tratara de dos tripanosomas completos, reunidos tan sólo por un estrecho, delgado resto de citoplasma común, en el cual se aprecian claramente dos trofonúcleos también separados.

En cambio, los dos bordes de la membrena ondulante se acercan, convergen hacia la extremidad anterior, y casi se reunen confundiéndose en las dos masas cromáticas muy cercanas la una á la otra.

Durante el proceso de división esquizogónica de los Tripanosomas en la sangre periférica han sido observados por HARTMANN, PROWAZECK, MINCHIN y otros, fenómenos referibles á un verdadero proceso de autogamía. Acerca de estos fenómenos han escrito páginas luminosas, en estos últimos tiempos, en los «Archiv fur Protisten Kunde», HARTOG (1) y HARTMANN (2). Merece que nos detengamos en un breve examen de la cuestión, relacionándola con los hechos por nosotros observados.

(Continuará.)

(Laboratorio de Parasitología del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII.)

(1) *Arch. F. Protistenk*, XVIII, 1.°, 1909.
(2) Idem íd., XVII, 2.

XXXV.—Estudio estereoquímico comparativo de los cuerpos, oxi-exano-2-5 y Dimetilfurfurano-1-4.

Por Angel del Campo y Cerdán.

Durante los estudios que recientemente hube de hacer con motivo de la publicación de mis anteriores artículos referentes á Estereoquímica (*), adquirí el convencimiento de que un detenido examen podía conducir á encontrar la explicación de algunos hechos, considerados hasta ahora por los químicos, ya como inexplicables por la citada teoría, ya en abierta contradicción con ella.

Y es que, á mi juicio, para poder aplicar la Estereoquímica á la interpretación de determinados fenómenos, es preciso huir del carácter elemental con que frecuentemente se la estudia, pues de lo contrario se encuentran las mismas divergencias entre la teoría y los hechos que cuando se trata de encajar en una hipótesis determinada un cierto fenómeno en cuyo estudio no han sido tenidos en cuenta todos los factores capaces de ejercer en él alguna influencia.

Uno de los casos en que se verifica algo de lo dicho, y de cuya explicación he de ocuparme en la presente nota, es el que se refiere al hecho práctico de que el *oxi-exano-2-5* es menos estable que el *dimetilfurfurano-1-4*.

Químicos tan autorizados como *Behal* afirman (**), basándose únicamente en medidas de distancias entre átomos de carbono *etánica* ó *eténicamente* enlazados, que el hecho en cuestión carece de explicación satisfactoria.

(*) *De Re Estereoquímica*, Ann. Soc. Esp. Fís. y Quim., Abril, 1909, y Marzo, 1910.

(**) *Traité de Chimie Organique d'apres les Theories Modernes*, 2.ª edición, tomo 2.º, págs. 592-593.

Yo creo, sin embargo, haber llegado á una conclusión opuesta considerando más complejo el problema, y no perdiendo de vista los siguientes principios de capital importancia en Estereoquímica:

1.° Los sistemas atómicos, capaces de accionar entre sí, se atraen según la recta que une sus centros de gravedad, con la cual deben coincidir las respectivas líneas de fuerza.

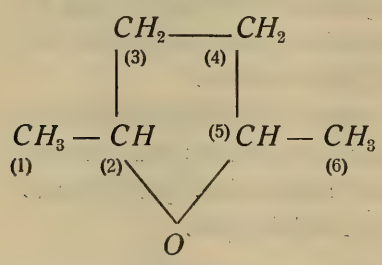
2.° La posición del centro de gravedad de un sistema no es, en general, la misma cuando está formado por un sólo átomo que cuando está constituído por varios, y la importancia de esta variación está bien probada con los trabajos de *Guye*.

3.° La mayor *estabilidad* de un compuesto corresponde á la posición *favorecida*, ó sea aquélla en que la *tensión* de sus líneas de fuerza es *mínima*.

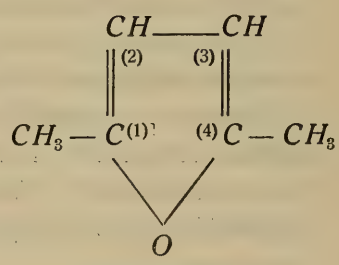
4.° Esta *tensión* se mide por el ángulo que forma la dirección que tiene cada una de las citadas líneas en el compuesto, con la que tendría si no existiera causa alguna *deformadora* en la molécula.

*
* *

Dicho esto, recordaré que las fórmulas esquemáticas planas que se atribuyen á los dos cuerpos de que me voy á ocupar, son los siguientes:



Oxi-exano-2-5.



Dimetilfurfurano-1-4.

Para su estudio estereoquímico, se puede admitir en ambos cuerpos la existencia de un núcleo cíclico, y los grupos

CH_3 considerarlos como formando parte del átomo de carbono del núcleo, al cual están unidos.

La gran simetría de ambos esquemas, con respecto á una recta que, pasando por el vértice O del pentágono, fuera perpendicular al lado opuesto, permite, además, reducir el estudio á dos átomos de carbono en cada uno; así, pues, estudiaré los átomos (5) y (4) del *oxi-exano* y los (4) y (3) del *dimetilfurfurano*.

Estudio del oxi-exano-2-5.

Atomo de carbono núm. (5).

Es indudablemente, este átomo, el más difícil de estudiar de los cuatro.

Podemos representarlo por la figura 1.ª, donde aparecen una multitud de líneas necesarias para el razonamiento y los cálculos; supongamos que el átomo de carbono número (5) ocupa el punto O, y sea $ACED$ el tetraedro regular *direc-*

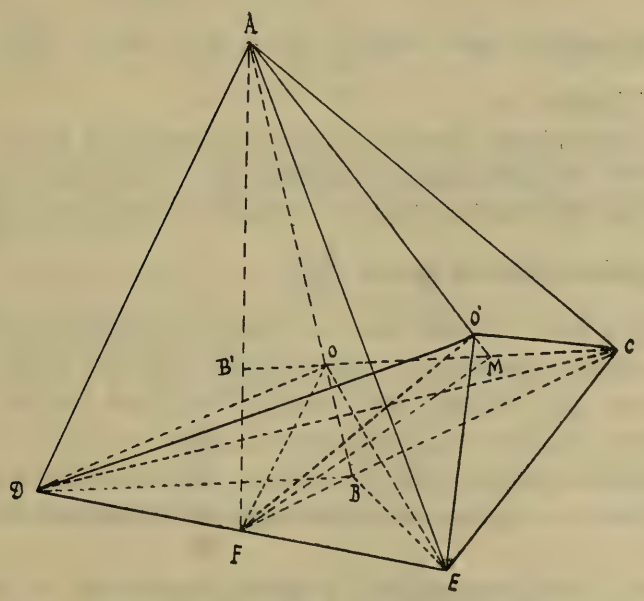


Figura 1.ª

tor (*) que pasa por los *extremos* de las líneas de fuerza OA, OC, OD, OE; en el vértice A podemos suponer la masa de un átomo de H, y el vértice C, el centro de gravedad del grupo CH_3, puesto que el esquema ha de representar al grupo molecular, $> CH — CH_3$.

Tenemos, por tanto, que en O actúa una masa igual á 12 (peso atómico del C.); en A, una masa igual á 1 (peso atómico del H), y en C, una masa igual á 15 (peso molecular del grupo CH_3). Por consiguiente, el centro de gravedad del grupo $> CH - CH_3$, no estará en O, y su posición es muy fácil de fijar, según los más elementales principios de la Mecánica.

En efecto; componiendo primero las fuerzas que actúan en O y C (12 y 15 respectivamente), tendremos que su resultante, que valdrá 27, estará aplicada al punto M de la recta CO; y este punto distará de O una magnitud igual á $\frac{15}{27}$ de la magnitud CO; la magnitud $CO = DO = AO = OE$ la tomaremos como unidad, por lo tanto $MO = \frac{15}{27} = 0{,}555555$. [α]

Componiendo ahora las fuerzas que actúan en M y en A (27 y 1 respectivamente), resultará que su resultante, que valdrá 28, estará aplicada en el punto O' de la recta AM á una distancia de M igual á $\frac{AM}{28}$.

Este punto O' será, pues, el centro de gravedad del grupo molecular estudiado, y como consecuencia las líneas de fuerza que actuarán para unirse á los grupos vecinos, no serán OA, OD, OC, y OE, sino $O'A$, $O'C$, $O'D$, y $O'E$; la simple inspección visual de la figura, da á conocer cómo han variado los ángulos que forman entre si, y bueno será recor-

(*) *De Re Estereoquímica.*—A. Campo. Anales de Soc. de Fis. y Quím., Marzo, 1910, pág. 133.

dar que en el caso del centro de gravedad en O, valen 109° 28′ 16″.4. [α′]

El valor de los nuevos ángulos puede ser encontrado con ayuda de la Trigonometría, y á continuación expongo el camino que yo he seguido para conseguirlo, sin pretender que sea el único, ni el mejor, pues atento tan sólo al fin que perseguía, no me he detenido en meditaciones de orden matemático y he utilizado el primer procedimiento que se me ocurrió.

***

Angulo $DO'E$.—Este ángulo es evidentemente doble del $FO'E$ y éste puede deducirse resolviendo el triángulo rectángulo $O'FE$, en el cual conviene conocer los catetos FE y FO'.

Cálculo de FE.—Empezaremos por calcular FB:

En el triángulo rectángulo BAF, se tiene que,

$$FB = AB \times \text{tg } FAB$$

$$AB = \frac{4}{3} \text{ (Puesto que } OA = 1 \text{ y } OB = \frac{1}{3} OA) \quad [\alpha'']$$

$$FAB = FAC - OAC = 54° \, 44' \, 8'',2 - 35° \, 15' \, 51'',8 =$$
$$= 19° \, 29' \, 16'',4 \qquad [1]$$

El valor de FAC se deduce por ser la mitad del suplemento del AFC, que según nos enseña la Geometría es igual á 70° 31′ 43″,6.

El valor de OAC, es la mitad del suplemento de AOC, que vale, según sabemos, 109° 28′ 16″,4. [α′]

Luego $FB = 0{,}471841$. [2]

Ahora, en el triángulo rectángulo FBE, se verifica

$$FE = FB \times \text{tg. } EBF$$

FB — lo acabamos de calcular.

$$EBF, = \frac{1}{2} DBE = \frac{1}{2} 120° = 60°.$$

Resulta, pues,

$$FE = 0{,}817254..... \qquad [3]$$

Cálculo de FO'.—Esta recta puede deducirse del triángulo $FO'M$, en el cual podemos conocer FM, resolviendo antes el triángulo rectángulo $FB'M$; el lado MO', por ser, según antes dijimos, igual á $\frac{MA}{28}$, y poder deducir MA del triángulo MOA; y el ángulo FMO' por ser igual á la suma del FMB' y el OMA de cada uno de los triángulos auxiliares citados, que están evidentemente en el plano FAC de simetría del tetraedro.

Triángulo $FB'M$.—En este triángulo conocemos $B'F = FB$ ya calculado [2]; $B'M = B'O + OM$;

pero $$B'O = OB = \frac{1}{3} \text{ V. } [\alpha'']$$

y $$OM = 0{,}555555 \text{ V. } [\alpha]$$

luego $$B'M = 0{,}888888..... \qquad [4].$$

Ahora bien, $B'F = B'M \times \text{tg. } B'MF$,

de donde $$B'MF = 27^\circ\, 56'\, 21''..... \qquad [5]$$

En el mismo triángulo se verifica que

$$B'F = FM \times \text{sen. } B'MF,$$

de donde $$FM = \frac{B'F \quad \text{V. } [2]}{\text{sen } B'MF \text{ V. } [5]}.$$

Resultando una vez hechos los cálculos, que

$$FM = 1{,}0075..... \qquad [6]$$

Triángulo OAM.—Conocemos en él,

$$OA = 1$$
$$OM = 0{,}555555 \quad \text{V. } [\alpha]$$
$$AOM = AOC = 109^\circ\, 28'\, 16'',4 \quad \text{V. } [\alpha']$$

y se verifica evidentemente,

$$\frac{AMO + OAM}{2} = 90^\circ - \frac{AOM}{2} = 90^\circ - 54^\circ\, 44'\, 8''.2 =$$
$$= 35^\circ\, 15'\, 51''.8 \qquad [7]$$

y también,

$$\operatorname{tg} \frac{AMO - OAM}{2} = \cot \frac{AOM}{2} + \frac{OA - OM}{OA + OM}$$

de donde el cálculo logarítmico deduce que

$$\frac{AMO - OAM}{2} = 11^\circ\, 25'\, 32''.5 \qquad [8]$$

y, por consiguiente,

$$AMO = [7] + [8] = 46^\circ\, 41'\, 24''.3 \qquad [9]$$

y $$OAM = [7] - [8] = 23^\circ\, 50'\, 19''.3 \qquad [10]$$

En el mismo triángulo tiene lugar que

$$\frac{AO}{\operatorname{sen} AMO} = \frac{AM}{\operatorname{sen} AOM}$$

de donde, $$AM = \frac{AO \operatorname{sen} AOM \quad \text{V. } [\alpha]}{\operatorname{sen} AMO \quad \text{V. } [9]}$$

Cuya fórmula, resuelta logarítmicamente, nos da

$$AM = 1'2939 \qquad]11]$$

Como $O'M = \frac{AM}{28}$, resultará

$$O'M = 0{,}0462 \qquad [12]$$

Triángulo FMO'.—Conocemos en él

$FM = 1{,}0075$ V. [6]

$MO' = 0{,}0462$, que acabamos de obtener

$FMO' = FMB' + OMA$;

pero $\quad FMB' = 27^\circ\ 56'\ 21''$, V. $\quad$ [5]

y $\quad OMA = 46^\circ\ 41'\ 24''$ V. $\quad$ [9]

luego $\quad FMO' = 74^\circ\ 37'\ 45''$. $\quad$ [13]

Podemos escribir desde luego

$$\frac{FO'M + O'FM}{2} = 90 - \frac{FMO'}{2} = 52^\circ\ 41'\ 7''.5 \quad [14]$$

y también,

$$\operatorname{tg} \frac{FO'M - O'FM}{2} = \cot \frac{FMO'}{2} \times \frac{FM - MO'}{FM + MO'}$$

cuya fórmula, después de sustituir valores, aplicar logaritmos y hacer operaciones, nos da

$$\frac{FO'M - O'FM}{2} = 50^\circ\ 7'\ 21''.2 \qquad [15]$$

Por lo tanto, resulta,

$$FO'M = [14] + [15] = 102^\circ\ 48'\ 28''.7 \qquad [16]$$

y $\quad O'FM = [14] - [15] = 2^\circ\ 33'\ 46''.8 \qquad [17]$

Ahora bien, en el mismo triángulo se verifica

$$\frac{FM}{\text{sen}\, FO'M} = \frac{FO'}{\text{sen}\, FMO'}$$

y despejando FO', resultará

$$FO' = \frac{FM \times \text{sen}\, FMO'}{\text{sen}\, FO'M}$$

donde sustituyendo valores y haciendo operaciones, se tiene que

$$FO' = 0{,}9958 \qquad [18]$$

Triángulo O'FE.—Llegamos, por fin, á poseer datos suficientes para calcular $FO'E$; en efecto, el cateto FO' lo acabamos de obtener y el FE nos es conocido también [3]; por lo tanto,

$$\text{tg}\ FO'E = \frac{FE}{FO'}.$$

Cuya fórmula, después de calculada, nos da el siguiente valor:

$$FO'E = 39^\circ\ 23'\ 30''.7 \qquad [19]$$

y, por lo tanto, $2\,FO'E$ ó sea

$$DO'E = 78^\circ\ 45'\ 1''.4 \qquad [20]$$

Angulos A O'E y A O'D.—Estos dos ángulos son iguales y basta, por tanto, calcular uno de ellos: nos fijaremos en el $A\,O'E$.

Su valor puede obtenerse en el triángulo $AO'E$, en el que conocemos AE, que es igual á $2FE$, y $O'A$, puesto que es igual á AM [11] — $O'M$ [12]; el valor del lado $O'E$ se deduce fácilmente en el triángulo $O'FE$; tenemos, pues,

$$AE = 2FE = 1.634508 \qquad [21]$$

$$O'A = AM = O'M = 1.2477 \qquad [22]$$

$$O'B = \frac{FE}{\text{sen}\, FO'E\,[19]} = 1.2882 \qquad [23]$$

Por lo tanto, podremos aplicar la fórmula,

$$\operatorname{tg}\frac{AO'E}{2}=\sqrt{\frac{(p-O'A)(p-O'E)}{p(p-AE)}}$$

siendo $\quad p=\dfrac{AE+O'A+O'E}{2}=2.085204$

que después de resuelta nos da

$$\frac{AO'E}{2}=39^\circ\,57'\,38''$$

y, por tanto, $\quad AO'E=79^\circ\,55'\,16. \qquad [24]$

Angulo A O' C.—En este triángulo nos son conocidos

$$AC=AE\,[21]=1{,}634508$$
$$O'A=[22]\;1{,}2477,$$

y el ángulo comprendido $O'AC$, puesto que

$$O'AC=OAC-DAM=35^\circ 15'\,51'',8\,[1]-23^\circ 50'\,19'',3\,[10],$$

por tanto, $\quad O'AC=11^\circ\,25'\,32'',5 \qquad [25]$

Puédese, pues, escribir

$$\frac{AO'C+ACO'}{2}=90^\circ-\frac{O'AC}{2}=$$
$$=90^\circ-5^\circ\,42'\,46''.2=84^\circ\,17'\,13''.8 \qquad [26]$$

y $\quad \operatorname{tg}\dfrac{AO'C-ACO'}{2}=\cot 5^\circ\,42'\,46''.2\times\dfrac{AC-AO'}{AC+AO'}$

cuya última fórmula, una vez resuelta, nos da

$$\frac{AO'C-ACO'}{2}=53^\circ\,10'\,8'' \qquad [27]$$

y por consiguiente

$$ACO' = [26] - [27] = 31^\circ\, 7'\, 5'',8 \qquad [28]$$

$$AO'C = [26] + [27] = 137^\circ\, 27'\, 21'',8 \qquad [29]$$

Angulos $CO'E$ y $CO'D$.—Siendo ambos iguales, bastará determinar el $CO'E$.

En el triángulo $CO'E$, se conocen

$$EC = AC = AE = [21]\ 1{,}634508$$

$$O'E = [23]\ 1{,}2882$$

y $O'C$ que puede ser calculado en el triángulo $AO'C$ por la fórmula

$$O'C = \frac{AO' \operatorname{sen} O'AC}{\operatorname{sen} ACO'},$$

que nos da, una vez resuelta

$$O'C = 0{,}47825 \qquad [30]$$

El ángulo $CO'E$ puede, por tanto, ser determinado aplicando la fórmula

$$\operatorname{tg} \frac{CO'E}{2} = \sqrt{\frac{(p - O'E)(p - O'C)}{p\,(p - CE)}}$$

siendo $\quad p = \dfrac{O'E + O'C + EC}{2} = 1.700479.$

Sustituyendo valores y aplicando logaritmos, resulta

$$\frac{CO'E}{2} = 70^\circ\, 45'\, 22''$$

y, por lo tanto, $\quad CO'E = 141^\circ\, 20'\, 44''$..... [31]

Conocidos de este modo los ángulos que forman las líneas de fuerza del sistema estudiado, cuando el centro de gravedad del mismo pasa de O á O', resulta muy fácil calcular la desviación que han experimentado de su primitiva posición, y, por lo tanto, la *tensión* existente en el átomo de carbono considerado; resulta, en efecto, que el valor de estos ángulos es, según los cálculos anteriores,

$$\left.\begin{matrix} CO'E \\ CO'D \end{matrix}\right\} = 141^\circ\ 20'\ 44'' \quad [31]$$

$$AO'C = 137^\circ\ 27'\ 21''.8 \ [29]$$

$$\left.\begin{matrix} AO'E \\ AO'D \end{matrix}\right\} = 79^\circ\ 55'\ 16'' \quad [24]$$

$$DO'E = 78^\circ\ 45'\ 1''.4 \ [20]$$

y debiera ser para todos si no existiera deformación alguna de

$$109^\circ\ 28'\ 16'',4\ [\alpha'].$$

Las mitades respectivas de los valores anteriores son:

$$\left.\begin{matrix} \dfrac{CO'E}{2} \\ \dfrac{CO'D}{2} \end{matrix}\right\} = 70^\circ\ 40'\ 22'' \qquad \left.\begin{matrix} \dfrac{AO'E}{2} \\ \dfrac{AO'D}{2} \end{matrix}\right\} = 39^\circ\ 57'\ 38''$$

$$\frac{AO'C}{2} = 68^\circ\ 43'\ 40''.9 \qquad \frac{DO'E}{2} = 39^\circ\ 22'\ 30''.7$$

$$\frac{[\alpha']}{2} = 54^\circ\ 44'\ 8''.2$$

Y las desviaciones de cada línea de fuerza vendrán expresadas por la diferencia entre $\frac{[\alpha']}{2}$ y la mitad del ángulo de que la línea en cuestión forme parte; pero como cada lí-

nea corresponde á tres ángulos distintos, calcularemos el valor medio que le corresponde, y así resultará lo siguiente:

Desviaciones de $O'E$ y $O'D$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{DO'E}{2} = 15^\circ\, 21'\, 37''.5 \\ \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{AO'E}{2} = 14^\circ\, 46'\, 30''.2 \\ \dfrac{CO'E}{2} - \dfrac{[\alpha']}{2} = 15^\circ\, 55'\, 13''.8 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 15^\circ\, 21'\, 7''.1 \qquad [32]$$

Desviación de $O'C$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{CO'E}{2} - \dfrac{[\alpha']}{2} = 15^\circ\, 55'\, 13''.8 \\ \dfrac{DO'C}{2} - \dfrac{[\alpha']}{2} = 15^\circ\, 55'\, 13''.8 \\ \dfrac{AO'C}{2} - \dfrac{[\alpha']}{2} = 13^\circ\, 59'\, 32''.7 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 15^\circ\, 3'\, 20''.1 \qquad [33]$$

Desviación de $O'A$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{CO'A}{2} - \dfrac{[\alpha']}{2} = 13^\circ\, 59'\, 32''.7 \\ \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{AO'E}{2} = 14^\circ\, 46'\, 30''.2 \\ \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{AO'D}{2} = 14^\circ\, 46'\, 30''.2 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 14^\circ\, 30'\, 51'' \qquad [34]$$

Si sumamos ahora los valores de las cuatro desviaciones, obtendremos para expresión de la *tensión* de las líneas de fuerza, en el átomo de carbono núm. (5) del *oxi-exano*-2-5, el valor de

$$60^\circ\, 16'\, 25'',3 \qquad [35]$$

Atomo de carbono núm. (4).

Podemos representar este átomo de carbono por la figura 2.ª, en la que los vértices A y C están ocupados por dos átomos de H.

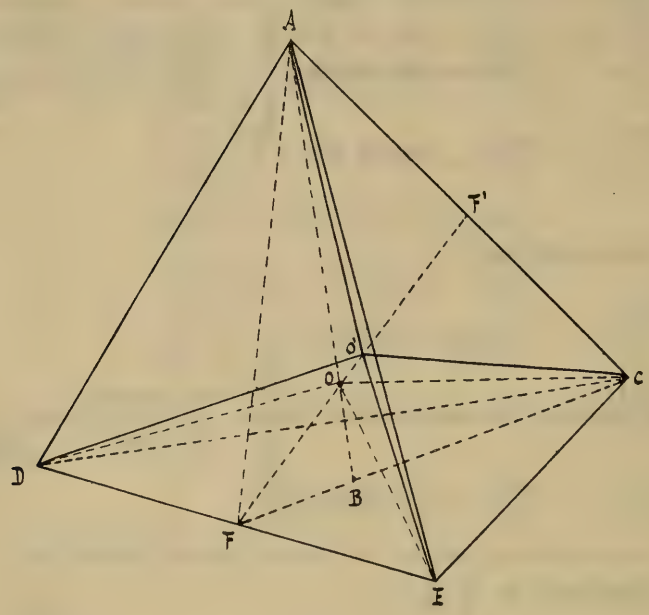


Figura 2.ª

Actúan, por lo tanto, en O una masa $= 12$, y en los vértices A y C masas $= 1$; el centro de gravedad del sistema $> CH_2$, representado por la figura, se encontrará en un punto, tal como O', de la recta FF' perpendicular común á los lados AC y DE del tetraedro director, que, como en el caso anterior, es también el determinado por los extremos de las lineas de fuerza OA, OC, OD y OE.

La distancia OO', será evidentemente igual á

$$\frac{2}{14} \text{ de } OF'. \qquad [36]$$

Determinemos ahora el valor de los ángulos formados por las nuevas líneas de fuerza $O'A$, $O'C$, $O'D$ y $O'E$.

Angulo $DO'E$.—Este ángulo es evidentemente el duplo del $FO'E$; determinemos éste en el triángulo $FO'E$:

Conocemos $FE = 0{,}817254$ v. [3] y el lado FO' es muy fácil de calcular, puesto que es igual á $FO + OO'$ y FO puede deducirse en el triángulo FOB en que nos son conocidas FB y OB v. [2] y [α'']. Haciendo operaciones, resulta,

$$FO = 0{,}577..... \qquad [37]$$

$$OO' = \frac{1}{7} FO = 0{,}0824..... \qquad [38]$$

$$FO' = 0{,}6594..... \qquad [39]$$

y como $\quad \text{Tg. } FO'E = \dfrac{FE}{FO'},$

resulta, $\quad FO'E = 51^\circ\, 6'\, 6''$

y, por lo tanto, $\quad DO'E = 102^\circ\, 12'\, 12''..... \qquad [40]$

Angulo $AO'C$.—Este ángulo es el doble del $AO'F'$; este último puede calcularse en el triángulo $F'AO'$, donde nos son conocidos,

$$AF' = FE \text{ v. } [3]$$

y $O'F' = FF' - FO' = 2FO[37] - FO'[39] = 0{,}4946..... \quad [41]$

Ahora bien, $\quad \text{Tg. } AO'F' = \dfrac{AF'}{O'F'},$

de donde $\quad AO'F' = 58^\circ\, 49'\, 4''$

y, por lo tanto, $\quad AO'C = 117^\circ\, 38'\, 8'..... \qquad [42]$

Angulos $AO'D$, $AO'E$, $CO'D$ y $CO'E$.—Siendo los cuatro iguales, bastará con calcular el $AO'E$; éste puede determinase en el triángulo EAO', donde se conoce el lado AE v. [21], y donde conviene conocer $O'E$ y $O'A$.

El lado $O'E$, se deduce en el triángulo ya conocido $O'FE$, donde se obtiene

$$O'E = 1.0501 \ldots\ldots \qquad [43]$$

El lado $O'A$, se calcula fácilmente en el triángulo $AF'O$, ya estudiado, donde resulta,

$$O'A = 0{,}9552 \ldots\ldots \qquad [44]$$

Resolviendo ahora el triángulo que necesitamos, se obtiene, aplicando fórmulas bien conocidas,

$$AO'E = AO'D = CO'D = 109^\circ\ 6'\ 12'' \ldots\ldots \qquad [45]$$

En resumen, los ángulos que forman las líneas de fuerza en el átomo núm. (4) son:

$$DO'E = 102^\circ\ 12'\ 12'' \qquad [40]$$

$$AO'C = 117^\circ\ 38'\ 8'' \qquad [42]$$

$$\left.\begin{array}{l} AO'E \\ AO'D \\ CO'D \\ CO'E \end{array}\right\} = 109^\circ\ 6'\ 12'' \qquad [45]$$

Todos ellos debieran ser iguales, si el centro de gravedad estuviera en O, á

$$109^\circ\ 28'\ 16'',\ 4, \qquad [\alpha']$$

por lo tanto, podemos calcular la desviación de las líneas de

fuerza, de un modo análogo á como se hizo en el caso del átomo de carbono, núm. (5); tendremos, pues,

$$\frac{DO'E}{2} = 51^\circ\ 6'\ 6''$$

$$\frac{AO'C}{2} = 58^\circ\ 34'\ 4''$$

$$\frac{AO'E}{2} = \frac{AO'D}{2} = \frac{CO'D}{2} = \frac{CO'E}{2} = 54^\circ\ 33'\ 6''$$

$$\frac{[\alpha']}{2} = 54^\circ\ 44'\ 8''.2.$$

Desviación de $O'A$ y $O'C$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{AO'D}{2} = 0^\circ\ 11'\ \ 2''.2 \\ \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{AO'E}{2} = 0^\circ\ 11'\ \ 2''.2 \\ \dfrac{AO'C}{2} - \dfrac{[\alpha']}{2} = 3^\circ\ 49'\ 55''.8 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 1^\circ\ 24'$$

Desviación de $O'D$ y $O'E$.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{DO'E}{2} = 3^\circ\ 38'\ 2''.2 \\ \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{DO'C}{2} = 0^\circ\ 11'\ 2''.2 \\ \dfrac{[\alpha']}{2} - \dfrac{DO'A}{2} = 0^\circ\ 11'\ 2''.2 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 1^\circ\ 20'\ 2''.2$$

Sumando ahora los valores de las 4 desviaciones, obtendremos para expresión de la *tensión* de las líneas de fuerza

en el átomo de carbono núm. (4) del *oxi-exano*-2-5, el valor de

$$5^\circ\ 28'\ 4'',4 \qquad [46]$$

Sumando, á su vez, este valor con el análogo antes obtenido, V. [35] por el átomo de *C.*, núm. (5), resultan 65° 44′ 29″,7; y como esto corresponderá á la mitad de la molécula, tendremos que si se admite que el átomo de *O* no provoca modificación alguna en la dirección de las líneas de fuerza, la desviación total experimentada por éstas en toda la molécula del *oxi-exano*-2-5, alcanzará un valor de

$$131^\circ\ 28'\ 59'',4 \qquad [47]$$

***

Estudio del dimetilfurfurano-1-4.

Atomo de carbono núm. (4).

Tanto este átomo como el núm. (3), pueden ser representados por la misma figura, gracias á la existencia del enlace eténico, que convierte realmente el esquema estereoquímico en un esquema plano.

Convendrá recordar que, según he sostenido en artículos anteriores, la línea de fuerza que actúa como resultante de dos sencillas, en el enlace *eténico*, resulta ser igual á 1,16, suponiendo las componentes iguales á la unidad; y también que el ángulo que esta línea de fuerza forma con cualquiera de las otras dos líneas restantes, mide 125° 15′ 51″,8 [48]

Dicho esto fijémonos ya en la fig. 3.ª como representación del átomo (4).

En el punto *O*, actuará una masa igual á 12 (peso atómico del *C*) y en *A* una masa igual á 15 (peso del CH_3); el centro de gravedad, vendrá á ocupar una posición *O′* cuya distancia del punto *O* (mayor que la representada en la figura) será igual á $\frac{15}{27} = 0{,}555555$. V. [α].

Hace falta, pues, determinar el valor de los ángulos, $DO'F'$, $DO'A$ y $AO'F'$.

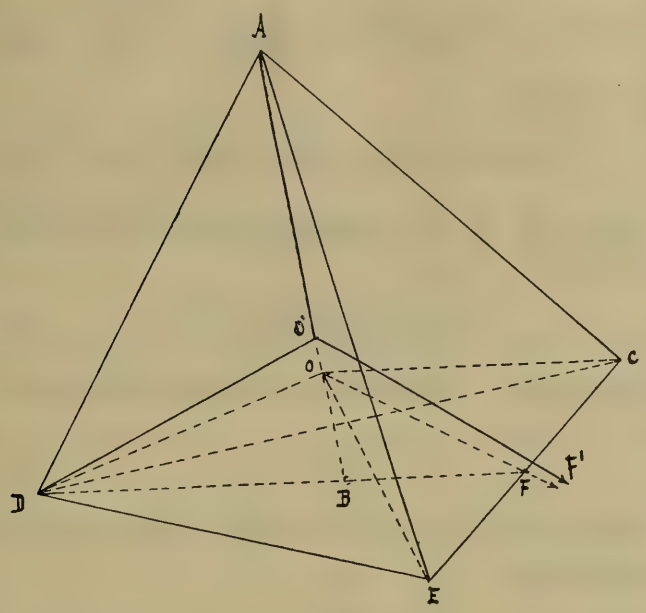


Figura 3.ª

Angulo $DO'F'$.—Este ángulo es evidentemente igual á $DO'B + BO'F'$.

El ángulo $DO'B$ se calcula en el triángulo rectángulo $DO'B$, donde nos son conocidos DB y BO', puesto que

$$DB = 2\,BF \qquad \text{v. [2]}$$

y $$BO' = BO + OO' = \frac{1}{3} + \frac{15}{27} = 0{,}8888;$$

haciendo los càlculos convenientes, resulta

$$DO'B = 46^\circ\ 44'\ 4''\ 5. \qquad [49]$$

El ángulo $BO'F'$, se deduce resolviendo el triángulo (incompleto en la figura), $OO'F'$ en el que conocemos

$OO' = 0{,}55555.....$ „ $OF' = 1{,}16$ (resultante de OE y OC) „

y el ángulo comprendido $O'OF' = [48]\ 125^\circ\ 15'\ 51'',8$.
Efectuando los cálculos llegamos á

$$BO'F' = 37^\circ\ 42'\ 57''\ 1 \qquad [50]$$

luego el ángulo

$$DO'F' = [49] + [50] = 84^\circ\ 27'\ 1''\ 5. \qquad [51]$$

Angulo $AO'D$.—Este ángulo es evidentemente el suplemento del $DO'B$, luego

$$AO'D = 133^\circ\ 15'\ 55''\ 5. \qquad [52]$$

Angulo $AO'F'$.—Este ángulo es el suplemento del $BO'F'$; por tanto,

$$AO'F' = 142^\circ\ 17'\ 2'',9. \qquad [53]$$

Cálculo de las desviaciones.—Resulta de los anteriores datos, lo siguiente:

ANGULOS	VALOR que tienen.	VALOR que debían tener si no hubiera variación en el centro de gravedad.
$DO'F'$....	$84^0\ 27'\ 1'',6$	$125^0\ 15'\ 51'',8$
$\frac{DO'F'}{2}$....	$42^0\ 13'\ 30'',8$	$62^0\ 37'\ 55'',9 - \frac{[48]}{2}$
$DO'A$....	$133^0\ 15'\ 55'',5$	$109^0\ 28'\ 16'',4$
$AO'F'$....	$142^0\ 17'\ 2'',9$	$125^0\ 15'\ 51'',8$

Como la línea $O'A$ no ha sufrido variación alguna, veamos las otras dos.

Desviación de $O'D$:

$$\left.\begin{array}{l} DO'A - [\alpha'] = 23^\circ\ 47'\ 39''.1 \\ \frac{[48]}{2} - \frac{DO'F'}{2} = 20^\circ\ 24'\ 25''.1 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 22^\circ\ 6'\ 2''.2$$

Desviación de $O'F'$:

$$\left.\begin{array}{l} AO'F - [48] = 17^\circ\ 1'\ 11''.1 \\ \dfrac{[48]}{2} - \dfrac{DO'F'}{2} = 20^\circ\ 24'\ 25''.1 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 18^\circ 42' 48''.1$$

Sumando ambas desviaciones, resulta, para expresión de la *tensión* de las líneas de fuerza en el átomo (4) del *dimetilfurfurano*, el valor

$$40^\circ\ 48'\ 50'',3. \qquad [54]$$

Atomo de carbono núm. (3).

Nos sirve la misma figura representativa que antes, sin más que suponer en A una masa igual á 1 (peso del átomo de 4). La distancia OO', será en este caso igual á $\frac{1}{13}$.

Por un camino absolutamente idéntico al seguido en el cálculo del átomo anterior, llegamos ahora á los siguientes valores:

$$DO'B = 66^\circ\ 31'\ 58'' \qquad [55]$$

$$BO'F' = 51^\circ\ 45'\ 3''.1 \qquad [56]$$

$$DO'F' = DO'B + BO'F' = 118^\circ\ 17'\ 1''.1 \qquad [57]$$

$$AO'D = 180 - DO'B = 113^\circ\ 28'\ 2'' \qquad [58]$$

$$AO'F' = 180^\circ - BO'F' = 128^\circ\ 14'\ 56''.9 \qquad [59]$$

Desviaciones:

La línea $O'A$ no ha sufrido ninguna, como en el caso anterior.

Linea $O'D$:

$$\left.\begin{array}{l} AO'D - [\alpha'] = 3^\circ\ 59'\ 45''.6 \\ \dfrac{[48]}{2} - \dfrac{DO'F'}{2} = 3^\circ\ 29'\ 25''.4 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 3^\circ\ 44'\ 35''.5$$

Línea $O'F'$:

$$\left.\begin{array}{l} AO'F' - [48] = 2^\circ\ 59'\ 5''.1 \\ \dfrac{[48]}{2} - \dfrac{DO'F'}{2} = 3^\circ\ 29'\ 25''.4 \end{array}\right\} \text{Valor medio} = 3^\circ\ 14'\ 15''.2$$

Sumados ambos valores, nos resulta para *tensión* de las líneas de fuerza del átomo (3) del *dimetilfurfurano* un valor de

$$6^\circ\ 58'\ 50'',7. \qquad [60]$$

Sumando ahora este valor con el análogo obtenido por el átomo (4) V. [54], resultará 47° 47′ 41″; y como este número corresponde á la mitad de la molécula, al admitir, como anteriormente hicimos, que el átomo de *O* no produce ninguna nueva flexión en las líneas de fuerza, tendremos que la desviación total de estas líneas en la molécula completa del *dimetilfurfurano 1-4*, se eleva á

$$95^\circ\ 35'\ 22''. \qquad [55]$$

***

Comparando ahora el valor [55] con el [47], veremos que, mientras en la molécula del *dimetilfurfurano-1-4* hay una tensión de sus líneas en fuerza correspondiente á una desviación total de 95° 35′ 22″, en la molécula del *oxi-exano-2-5*, hay una tensión correspondiente á un desvío total de 131° 28′ 59″,4; y la diferencia es tal, que no puede ser atribuída á errores de cálculo.

Ahora bien, es fundamental en esta teoría que la *mayor estabilidad* corresponde á la *mínima tensión;* luego es *forzoso* admitir que el *dimetilfurfurano-1-4 es más estable* que el *oxi-exano-2-5*, conclusión que está de *riguroso acuerdo* con los hechos.

Por lo tanto, la estabilidad relativa de los cuerpos estudiados, lejos de ser inexplicable por la teoría Estereoquímica, ó de estar en contradicción con ella, resulta *racional* y *lógicamente* explicada por la misma; y con esta interpretación, que creo haber sido el primero en conseguir, queda probado lo que pretendía demostrar.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXVIII.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia séptima.. 489

XXIX.—Noticias sobre algunos moluscos de España, por *Joaquín González Hidalgo*..... 515

XXX.—Estudio analítico de los elementos de retroceso de las curvas alabeadas, por *Miguel Vegas*..... 525

XXXI.—Le Sous-azoture de carbone $C^4 N^2$, par *Ch. Moureu et J. Ch. Bongrand*..... 531

XXXII.—Teoría elemental de los péndulos horizontales, por *Eduardo Mier*..... 540

XXXIII.—Contribución al estudio de las aminas cíclicas, por *F. Lavilla Llorens*..... 548

XXXIV.—Viaje de estudio á la Guinea española. Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por *Gustavo Pittaluga* (continuación)... 554

XXXV.—Estudio estereoquímico comparativo de los cuerpos, oxi-exano-2-5 y Dimetilfurfurano-1-4, por *Angel del Campo y Cerdán*..... 563

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 9

(Marzo de 1910)

FEB 1926
National Museum.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

Informes sobre tres Memorias presentadas á la Academia, con opción á premio, en el Concurso de 1904.

PONENTE: J. M. DE MADARIAGA.

Memoria señalada con el lema: «Para adquirir perfecta idea de un fenómeno, será necesario estudiarlo cualitativa y cuantitativamente».

Tiene esta Memoria 119 páginas escritas con máquina, en pliego entero, divididas en 6 capítulos, y forma, además, parte de ella un atlas de 27 láminas con 142 figuras dibujadas en papel tela. Su composición, considerada en conjunto, no es suficientemente esmerada, desde el punto de vista gramatical, aun sin contar el empleo de muchos neologismos no admitidos en nuestro idioma, y, acaso por estar escrita con máquina, los cálculos que en ella se consignan tienen inexactitudes de forma que dificultan la lectura.

El primer capítulo, que el autor titula «Teoría de los alternadores monofásicos», y que más bien es una teoría incompleta de las corrientes alternas, está desarrollado en 19 páginas.

En él, y al considerar el caso de una espira que se mueve en un campo magnético uniforme, pág. 6, escribe el autor, bajo una forma, por cierto no rigurosamente exacta, la serie de Fourier, lo que en tal caso y antes de tener en cuenta la auto-inducción es innecesario, puesto que la fuerza electromotriz es, entonces, una función sinusoidal sencilla del tiempo. Y es tanto más de notar esto cuanto que después, cuando realmente tendría buena aplicación esta serie, al considerar las armónicas que en la curva de la fuerza electromotriz pueden introducir diferentes causas, no se emplea la fórmula

de Fourier ni se analizan estas causas y los efectos perjudiciales que pueden producir, ni se da, por lo mismo, el remedio para atenuar los últimos.

Al calcular la potencia, pág. 11, que puede hallarse inmediatamente desarrollando la integral $\int_0^{\frac{T}{2}} eidt$, se sigue un camino más largo dando valores particulares al tiempo, y llegando á deducir, pág. 12, del valor

$$i + i' = I_m \, 2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} (\omega t - \varphi),$$

suma de las corrientes correspondientes á los instantes

$$t = 0 \text{ y } t = \frac{T}{4},$$

que la curva representativa de la potencia correspondiente á la auto-inducción es una sinusoide de período mitad del de la intensidad de la corriente. Aun cuando esta curva tenga efectivamente una frecuencia doble de la de la fuerza electromotriz y la corriente principales, no se ve clara la deducción que el autor apunta, y, por otra parte, es incorrecta la notación *Lidt,* que en la figura 4 aparece al lado de la curva aludida, puesto que la expresión anterior, producto de un flujo de fuerza por un tiempo, no puede representar la potencia.

Hay falta de exactitud al escribir, pág. 13, que la expresión $I_e^2 = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} i^2 dt$ significa que el cuadrado de la intensidad eficaz I_e^2 es igual á la suma de los cuadrados de la intensidad real i^2, pues ni dice esto la fórmula que queda escrita, ni el cuadrado de la intensidad eficaz es la suma que se indica, sino el valor medio del cuadrado de la intensidad real.

Tampoco es exacto que el valor medio de la fuerza electromotriz sea $2\pi \times E_m$, sino $\frac{E_m}{2\pi}$, siendo E_m el valor máximo; y hay falta de consecuencia cuando, poco después, para hallar el valor de la intensidad media, que está bien escrito, dice el autor que basta integrar entre φ y $\varphi + \frac{T}{2}$, y lo hace entre **0** y $\frac{T}{2}$, aunque el resultado final sea el mismo.

Considérase en las páginas 15 y 16 el efecto que en un circuito de corriente alterna produce una capacidad intercalada en serie en el mismo, y no se ajusta la redacción á la realidad de los hechos cuando se dice que, en tal caso, «al llegar la fuerza electromotriz á su valor máximo y empezar el período decreciente, el condensador se descarga y en el circuito cambia el sentido de la corriente»: puesto que este cambio se debe producir en cada semiperíodo, cuando se anulan la fuerza electromotriz ó la corriente, para cada una de ellas respectivamente, y no cuando adquiere la primera su máximo valor.

Locución no usada generalmente, y poco adecuada para el efecto que se quiere designar, es la de *desembrague* que el autor emplea en la pág. 18 para significar la *diferencia de fase* ó *adelanto* que la capacidad produce en el circuito, efecto contrario al de la auto-inducción que determina un retraso de la corriente con la relación á la fuerza electromotriz debida al campo magnético inductor.

Sensible es que habiéndose detenido el autor en otros cálculos más sencillos, no lo haya hecho al resolver la ecuación diferencial relativa al caso general de un circuito con auto-inducción y capacidad.

La figura 8 á que se hace referencia en la pág. 21, al exponer según el método vectorial la teoría gráfica de las corrientes alternas, está incorrectamente dibujada. El triángulo rectángulo debe tener recto el ángulo **N** y no el **M**, porque la

fuerza electromotriz de auto-inducción está en cuadratura con la efectiva, y no con la producida por el campo inductor.

Más completo resultaría el estudio á que se refiere este primer capítulo si el autor hubiese considerado el caso de la capacidad en derivación, de interés en la aplicación de los alternadores á la distribución de la energía, y no habría holgado tampoco una exposición del método simbólico de representación por complejas imaginarias, de las magnitudes sinusoidales, tan fecundo en recursos para el cálculo de las mismas.

En el capítulo 2.°, y en el espacio de 25 páginas, trata esta Memoria de los «Alternadores industriales monofásicos». Al considerar las pérdidas de energía en estas máquinas, se escribe en la pág. 39, que «además de la pérdida de energía que la *selfinducción* introduce...», lenguaje incorrecto, pues ya se sabe que la auto-inducción no produce pérdida de energía, aunque sea un obstáculo para que el alternador desarrolle toda la potencia de que sería capaz si no existiese aquel fenómeno.

Muy parco aparece el autor al tratar de los alternadores de excitación compuesta, que no hace más que mencionar en la pág. 44, y el asunto es de interés y ofrece materia suficiente para algunas páginas.

Parecen tomadas del libro de Mr. G. Kapp, «Las máquinas dinamo-eléctricas de corriente contínua y alterna», las fórmulas que emplea en la citada pág. 44 para calcular la auto-inducción del inducido; pero cree el que subscribe que el empleo de estas fórmulas debiera justificarse para llevar al ánimo del lector la seguridad de su exactitud, y ni se hace esto, ni se alude á ninguno de los demás procedimientos que se aplican con tal objeto.

El capítulo 3.° trata de los alternadores polifásicos, y en la página 51, al sentar el principio fundamental de los mismos, se dice: «La fuerza electromotriz total que podría enviarse á un circuito exterior al concurrir todas las espiras á un mis-

mo colector, vendría dada por...» Ni es apropiada la expresión empleada, porque no se envía ni se puede enviar al circuito exterior una fuerza electromotriz, ni sería pertinente al fin que se propone aquí el autor hacer concurrir á un mismo colector todas las espiras, que con tal disposición estarían en derivación ó en paralelo, lo que, aunque su suma fuese cero, no serviría para deducir la supresión de la mitad de los conductores, que puede, en general, hacerse en un sistema polifásico.

Mal escrito aparece en la pág. 52 el valor de las corrientes, pues en vez de

$$i_n = I \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{T}{n} (n - t) - \varphi \right.,$$

debe decir

$$i_n = I \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{T}{n} (n - t) - \varphi \right).$$

Tampoco puede escribirse, como se hace al definir el «alternador elemental difásico», pág. 52, que

$$E_2 = E_m \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{T}{2} \right) = E_m \cos \omega t,$$

porque el primer miembro, si se sustituye **T** por su valor $\frac{2\pi}{\omega}$, se convierte en $E_m \operatorname{sen} (\omega t + \pi) = - E_m \operatorname{sen} \omega t$, y no á $E_m \cos \omega t$. El autor debió escribir

$$E_2 = E_m \operatorname{sen} \left(\omega t + \frac{\pi}{2} \right), \text{ ó } E_m \operatorname{sen} \omega \left(t + \frac{T}{4} \right) = E_m \cos \omega t,$$

que es lo exacto, para poder introducir en el cálculo el segundo elemento de un sistema difásico.

En las páginas 53 y 56 de este mismo capítulo 3.° se con-

signa erróneamente que los valores eficaces de la fuerza electromotriz y de la corriente son funciones periódicas del tiempo, al escribir para ellos $E_{e_1} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}$ sen $\omega\, t$ ..... y $I_{e_1} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$ sen $(\omega\, t - \varphi)$. Bien sabido es que los valores eficaces de la fuerza electro-motriz y de la corriente, son respectivamente $\frac{Em}{\sqrt{2}}$ y $\frac{Im}{\sqrt{2}}$, que sólo se definen por sus efectos térmicos ó electrodinámicos, independientes del tiempo.

Las figuras de los diversos modos de devanado de los alternadores polifásicos están copiadas en su mayor parte del libro del profesor S. Thompson «Polyphase Electric Currents and Motors». Sin duda habría sido complemento conveniente el haber dibujado las conexiones entre los diferentes carretes, no indicadas en varias de aquéllas, para haber hecho más comprensibles los esquemas del autor inglés.

En el capítulo 4.°, que abarca 11 páginas, se describe algunos tipos ó modelos de alternadores; y el 5.° trata, en 16 páginas, de lo que el autor llama *acoplamiento* de estas máquinas, es decir, de sus modos de unión en serie ó en paralelo, punto sin duda difícil de la técnica eléctrica, y que no está desarrollado en la Memoria que examino con acierto suficiente. Se dice en la página 87, y haciendo referencia á la figura 130, que en el caso de la unión en serie la sinusoide **B** está adelantada ó en avance con respecto á la **A**, y basta examinar la figura dicha para convencerse de lo contrario: resulta de aquí una confusión que perturba los razonamientos posteriores, obligando á sacar consecuencias contrarias á las premisas establecidas; y así se dice, al tratar de la unión en paralelo (pág. 90), que el alternador retrasado trabaja menos, lo cual, en general, no es exacto, y si aquí lo es, depende de que el retraso debe apre-

ciarse, entonces, con relación á la oposición completa de las fuerzas electromotrices, circunstancia no aclarada en la Memoria. Afírmase en la pág. 91 que si «las fuerzas electromotrices de los alternadores *acoplados* (dice el autor) fueran diferentes, la fuerza electro-motriz resultante tendría una frecuencia de orden superior», afirmación completamente gratuita y que el autor no podría demostrar en el caso que considera de tener ambas máquinas el período de igual duración. El estudio analítico de este interesante problema, que se inicia en las páginas 91 á 98, según el método de Mr. Boucherot, no es completo, y en él se prescinde de varias causas que en la unión en paralelo producen movimientos pendulares de los alternadores agrupados, que habría sido necesario analizar.

En el capítulo 6.°, y en el espacio de **6** páginas, se traza la marcha para proyectar un alternador, inspirándose en el libro de Mr. Kapp «Construcciones electromecánicas».

Representa, en suma, la Memoria de que acabo de dar cuenta, un trabajo imposible de llevar á cabo sin conocimientos extensos en la técnica eléctrica, y contiene puntos de vista dignos de atención, aunque, á juicio del que subscribe, no haya logrado su autor desarrollar el tema propuesto por la Academia con todo el acierto que exige la concesión de alguna de las recompensas anunciadas en el concurso.

Memoria señalada con el lema: «Labor».

Tres cuadernos, que en junto contienen **362** cuartillas manuscritas, y un atlas con **121** figuras dibujadas en papel tela y distribuídas en cinco grandes láminas, forman esta Memoria. Refiérese el primer cuaderno á la teoría de las corrientes alternas, que desarrolla el autor en **71** páginas: en el segundo se estudian, en **174** páginas, los alternadores industriales y su unión ó agrupamiento; y en el tercero se formula el pro-

yecto de un alternador, y se describe algunas de estas máquinas. Contiene, además, este tercer cuaderno un apéndice, con el desarrollo de los cálculos solamente indicados en la primera parte.

El ponente que subscribe tiene que exponer á la consideración de la Sección, que le confió el encargo de examinar esta Memoria, algunos reparos, que se refieren, unos, á incorrecciones en la forma; otros, más substanciales, á conceptos no exactamente expresados.

Defínese en la página **8** el período de una función sinusoidal, diciendo que es «el conjunto de todas las variaciones de esta función...» Y sería lo exacto decir que es el intervalo de tiempo en el que estas variaciones se producen...

Frecuentemente, y con escaso rigor (páginas 3 y 4, por ejemplo), se emplea la expresión fuerza electromotriz *aplicada* para designar la *desarrollada* por el campo magnético inductor.

Al tratar de encontrar el valor de la fuerza electromotriz media (pág. 12), se consigna para designarla la expresión $E_m = \int_0^m E_0 \text{ sen } \omega t d\omega t$, y aunque el valor á que se llega desarrollando esta integral es exacto, habría sido más correcto escribir $E_m = \frac{1}{\left(\frac{T}{2}\right)} \int_0^{\frac{T}{2}} E_0 \text{ sen } \omega t dt$. Lo mismo puede decirse del valor medio de la intensidad.

Incorrecciones semejantes, que rebajan el mérito de este trabajo, pueden señalarse en diferentes partes del mismo. En la pág. **15**, por ejemplo, se debió escribir v (diferencia de potencial instantánea) $= E_0 \text{ sen } \omega t - \frac{E_0}{R} \text{ sen } \omega t \times r$, siendo R la resistencia total, y r la del inducido del alternador, y no, como se hace, $v = E_0 \text{ sen } \omega t - \frac{E_0}{R} \text{ sen } \omega t$.

Con notoria falta de exactitud se aplica a expresión *trabajo medio* para designar la *potencia de un alternador* (página 16), puesto que la potencia es variable con el tiempo, y, por lo mismo, tiene un valor medio, y no son sinónimos en Mecánica los vocablos *trabajo* y *potencia*.

Y al tocar este punto, y con vista de la fig. 16, hay que señalar un error, no ya de forma, sino de concepto. La potencia, en el caso que considera el autor, es siempre positiva, y no puede, por consiguiente, representarse por una curva que tiene ondas negativas, como se dibuja y anota en la dicha fig. 16; curva que, por otra parte, y aun corrigiendo el defecto señalado, no tendría la forma que se indica, porque se demuestra que es sinusoidal cuando se refiere á los ejes coordenados que aparecen en la lámina, y una verdadera sinusoide si se hace un cambio apropiado de eje de las abscisas.

Las notaciones $\frac{E_0 \cos\varphi}{\sqrt{2}}$ y $\frac{2E_0 \cos\varphi}{\pi}$, que en las páginas 28 y 29 se apuntan para valores de la fuerza electromotriz eficaz y de la media, no son exactas, pues á ambas sobra el factor **cos** φ, que, al hablar, algunas páginas después, de la fórmula que da el valor de la potencia (media), llama el autor *coeficiente de reducción*, aunque el nombre generalmente empleado para designarle no es ese, sino el de *factor de potencia*.

Al tratar de la potencia máxima (pág. 37) se dice que al disminuir la resistencia aumenta la intensidad, lo cual es exacto, y con esto—se añade—la auto-inducción, lo cual puede no serlo, puesto que el coeficiente L de auto-inducción es la relación del flujo magnético propio á la corriente que lo produce, y puede, si la variación de la corriente es importante, disminuir la permeabilidad magnética.

La fórmula $L = p \times \frac{q^2}{R}$, que el autor deduce (pág. 42) para calcular el coeficiente de auto-inducción del inducido de

un alternador, podrá servir para tal objeto, aunque no será de tan fácil aplicación como se indica, ya que al variar la corriente varía también la permeabilidad, que en la indicada fórmula entra en el valor de **R**, que ahora representa resistencia magnética, y la apreciación de esta variación no es tan sencilla en la práctica como parece darse á entender en la Memoria. Y por cierto que el autor indica á continuación, para el mismo fin, un procedimiento experimental diferente, pero en cuya aplicación figura también la letra **R**, que ya no debe significar resistencia magnética, sino eléctrica, y hubiera sido conveniente señalar la distinta significación que al mismo símbolo se da en uno y otro caso, para evitar posibles confusiones al lector. Supone el autor, á este propósito, en la página 43, que el problema sería de fácil solución sin más que aplicar la fórmula $V_0 = L\omega I_0 + I_0 R$, y olvida que la suma en esta fórmula indicada no es suma algebraica sino geométrica ó de composición de vectores, cuya fase no es conocida, puesto que el ángulo φ que la determina es función de **L**, que se trata de calcular. Por esto, no hay más remedio, en general, que acudir á un procedimiento que, aunque aproximado, como el de Ben-Eschenburg, lo es suficientemente para resolver en la práctica la dificultad.

En la pág. 88 (2.ª parte, cap. VI) hay falta de exactitud, y confusión en el empleo de las expresiones **VI** y **VI** cos φ; pues pudo decirse, con más rigor y claridad de los allí empleados, que la potencia será **VI** cos φ, si **V** es la diferencia de potencial eficaz, y **VI**, si por **V** se representa el valor eficaz de la fuerza electromotriz efectiva, lo que, por otra parte, no se acostumbra en la práctica.

Al tratar en el cap. VII, pág. 95, de la clasificación de los alternadores y citar los de tambor, hoy casi exclusivamente empleados por las ventajas que ofrecen, dice, con razón, que en ellos hay que colocar los hilos (conductores) paralelamente al eje, «y con esto—añade—es muy difícil el poder evitar el empleo de un núcleo de hierro en el inducido». No es

fácil deducir lo que el autor haya querido indicar en la frase que queda copiada, que, seguramente, no fué lo que ella literalmente dice, puesto que lejos de ser un inconveniente, como parece darse á entender, es una ventaja y una necesidad el empleo del núcleo de hierro, sin el cual la permeabilidad magnética sería muy pequeña, y el gasto de excitación y las dimensiones de las máquinas resultarían enormes.

Alguna aclaración á lo que dice Kapp, y casi literalmente transcribe el autor, acerca de las ventajas de los alternadores llamados heteropolares sobre los homopolares, habría sido conveniente, á fin de hacer resaltar la exactitud de la demostración que da el célebre electricista.

Expuesta á confusión es la designación que en esta Memoria se hace al tratar de los inducidos *dentados* y de *agujeros en la periferia del inducido,* pues el autor, al parecer, emplea el primer nombre para los que tienen los carretes del inducido devanados en núcleos salientes, hoy muy poco ó nada usados, siendo asi que aquel calificativo, el de *dentados* que él llama de *huecos,* se aplica hoy á un gran número de inducidos de alternadores que tienen sus conductores en ranuras practicadas en la periferia, lo que, á cambio de algunos inconvenientes, tiene la ventaja de poder disminuir la corriente de excitación y evitar ó atenuar considerablemente las corrientes de Foncault en los conductores de la armadura, circunstancia que ocurre también en los inducidos de agujeros ó perforados, y sobre la que pudo llamarse la atención en la Memoria, indicando, además, el efecto que tales ranuras producen en la curva de la fuerza electromotriz, por lo que se refiere á las armónicas de órdenes diferentes á que dan origen, y los procedimientos que deben seguirse para corregir los inconvenientes que éstas producen.

Más comprensible resultaría, á no dudarlo, la representación de los devanados que aparecen, no más que indicados como en el libro de Mr. Kapp, en varias figuras como las

46 y 47, p. e., si se hubiese dibujado las conexiones entre los carretes

Al tratar de los alternadores polifásicos, capítulo VIII, página 139, da el autor de esta Memoria una demostración elegante para hacer ver cómo puede reducirse á tres el número de conductores de un sistema trifásico en triángulo; y termina este capítulo exponiendo el principio de las conmutatrices, aunque sin citar el nombre de estas máquinas.

En el capítulo IX se expone el cálculo de la fuerza electromotriz desarrollada por diferentes alternadores, que el autor llama, con escasa propiedad, «aplicada», y en este cálculo sigue á Mr. Kapp casi literalmente, sin que haya que poner á lo escrito reparo alguno.

Falta claridad en la pág. 187 al comparar la fuerza electromotriz de una máquina de corriente continua con la de un alternador, ya que en la primera no tiene significación el elemento *frecuencia* que el autor hace figurar en la fórmula

$$E = \frac{f}{100} N\psi.$$

La determinación experimental de la curva que representa la fuerza electromotriz por los métodos de Joubert y Gerard, está descrita en el corto espacio de las páginas 183 á 186, muy brevemente, como se comprende, sin que el autor aluda, como parecía natural, dado el interés de este asunto, ni al llamado ondógrafo de Hospitalier, ni á los aparatos de Blondel, Duddel y Abrahan, empleados con este objeto.

Vuelve á tratar de la potencia de los alternadores el capítulo X, y aparecen nuevamente conceptos, confusos unos, y equivocados otros, sobre este punto. Dícese, por ejemplo, que la fuerza electromotriz **E** es la suma de **V**, diferencia de potencial, y de las fuerzas electromotrices dé auto-inducción y de capacidad del inducido, y no se tiene en cuenta al hacer aquélla que es suma geométrica y no algebraica, porque las magnitudes que forman sus términos son vectores de fase distinta.

En la pág. 193, y después de llegar á la expresión de la potencia $VI\sqrt{3}$ de un alternador trifásico, dice: «Si hubiésemos medido **V** á circuito cerrado, la potencia sería el valor que acabamos de hallar; pero si la medimos á circuito abierto, tendríamos que afectar el producto del coeficiente de reducción cos φ para tener en cuenta la reacción del inducido y la pérdida correspondiente á la resistencia óhmica del mismo». Verdaderamente difícil resulta la interpretación de este párrafo, en el cual aparecen confusas las ideas é involucrados conceptos que son perfectamente deslindables.

En los capítulos XI y XII se estudia la acción magnética del inducido y las curvas llamadas *características* de los alternadores, y en ambos el autor de la Memoria sigue casi literalmente á Mr. Kapp.

En el capítulo XIII trata del agrupamiento de los alternadores, y, aparte de la incorrección de marcar polos + y — en la fig. 99 que se refiere á un alternador y no debe tenerlos, el estudio es poco completo, puesto que no se analizan en él las influencías variadas de carácter ya eléctrico, ya mecánico, que intervienen en el fenómeno, relativas á la desviación angular y á los pares ya aceleradores, ya amortiguadores que producen y modifican los movimientos pendulares de los alternadores unidos en paralelo.

En la tercera parte se expone, siguiendo á Mr. Kapp, la marcha para formular un proyecto de alternador, y se describe algunas de estas máquinas más frecuentemente empleadas, terminando con el apéndice á que hice alusión anteriormente.

La exposición que acabo de hacer podrá demostrar á la Sección que esta Memoria representa una labor de importancia, y supone en su autor extensos conocimientos en la técnica eléctrica, si bien su atención, distraída, sin duda, en algunos momentos, dejó deslizar incorrecciones, que, amenguando el mérito de la Memoria, privan al que subscribe de la satisfacción de proponer que se otorgue al

autor de aquélla ninguna de las recompensas anunciadas en el Concurso.

Memoria señalada con el lema: «Electrón».

Consta esta Memoria, que por encargo de la Sección de Ciencias Físicas he examinado, de 157 cuartillas manuscritas y 78 figuras claramente dibujadas y repartidas en diferentes láminas. Está dividida en cinco partes: trata la primera de la «Teoría general de las corrientes alternas» y comprende **51** páginas; la **2.ª**, de la «Teoría fundamental de los alternadores», y se halla expuesta en 52 cuartillas; ocúpase la **3.ª**, en **23** páginas, en la «Clasificación y descripción de los principales tipos de alternadores»; la **4.ª**, en el «Agrupamiento» de estas máquinas, asunto que el autor desarrolla en **17** páginas, y en la **5.ª** se estudia el «Modo de proyectar un alternador».

Nada tiene que oponer el que subscribe á la primera parte; que está tratada con acierto, porque no considera que sea defecto substancial el empleo no justificado de algunos neologismos que se han ido introduciendo en muchos escritos sobre electricidad, como *impedancia* (resistencia aparente), *reluctancia* (resistencia magnética), *corrientes vatiada* y *desvatiada* (corrientes energética y anenergética), que, por otra parte, son fáciles de corregir.

Lástima es que el autor, que demuestra conocer la materia, no se detenga (pag. 27) á resolver la ecuación diferencial relativa al caso en que el circuito contiene auto-inducción y capacidad, no porque la resolución ofrezca dificultad, aunque sí habría facilitado la lectura de la Memoria, sino porque habiéndolo hecho, por vía de nota (pág. 12), para el caso más sencillo de un circuito con sólo auto-inducción, habría demostrado ser consecuente, de haber salvado la omisión que señalo en este caso, un poco más complicado. Es también

sensible que no haya hecho uso en sus demostraciones del método de representación de las magnitudes sinusoidales por cantidades complejas imaginarias, hoy tan en uso por las grandes facilidades que ofrece para el cálculo.

Hácese aplicación de la teoría expuesta, á la de los alternadores, en la segunda parte de esta Memoria; y, después de considerar el caso de ser funciones sinusoidales la fuerza electromotriz y la corriente, se estudia el más general y frecuente de venir estas magnitudes eléctricas representadas por funciones periódicas más complejas, haciendo aplicación, para ello, del teorema de Fourier que permite descomponer aquéllas en armónicas de diferentes órdenes, generalmente para los alternadores, de orden impar. Aunque acaso habría podido proceder el autor con más orden en la exposición de esta materia, estudiando primeramente las armónicas dc la fuerza electromotriz en circuito abierto, y después las que provienen de la reacción de armadura, el asunto está bastante bien tratado. El que suscribe encuentra, no obstante, que debía haberse detallado la demostración, que se deja para el lector, de la existencia de armónicas de orden tercero y superiores á éste, producidas par la influencia del flujo magnético giratorio, uno de los dos componentes en que, según el teorema de Leblanc, puede dividirse el de reacción del inducido. Cree también que debía el autor haber completado su estudio sobre las armónicas que nacen de la existencia de dientes y ranuras en el inducido, considerando algunos casos particulares y muy frecuentes en la práctica, como el de muchos alternadores trifásicos (de dos ranuras por polo y fase), en los que desaparecen las armónicas de orden múltiplo de tres, como, aparte la demostración analítica, lo confirma el examen de las curvas obtenidas con el oscilógrafo. Como era natural, el autor expone á continuación algunos de los medíos empleados para hacer desaparecer estas armónicas, ó, al menos, para disminuir sus efectos perjudiciales.

Pasa en seguida á tratar de la caída de tensión, y, después de analizar las distintas causas que intervienen en su producción, establece el cálculo que permite determinar su importancia, siguiendo el método de Ben-Eschemburg, que explica con claridad, y que es, por su sencillez, de fácil aplicación en la práctica. Expone también el más riguroso de Mr. Potier, y trata de la influencia que en la caída ó pérdida de tensión tienen las corrientes de Foncault, circunstancia que pudo aprovechar, aunque no lo hace, para hallar la expresión analítica de esta influencia.

Habla, con tal motivo, de los amortiguadores de Leblanc, que, prescindiendo de su importancia para facilitar la unión en paralelo de los alternadores, la tienen también marcada, para disminuir la pérdida de voltaje, y obran en sentido favorable para disminuir la reacción del inducido.

Muy brevemente trata de la auto-excitación y regulación ó compensación (compoundage) de los alternadores, apuntando no más los sistemas de Heyland, Ganz y de Hutin y Leblanc.

Hablando después de la potencia de un alternador monofásico, determina el valor máximo de aquélla, según las condiciones del circuito de utilización.

Trata, á continuación, de los alternadores polifásicos, y aquí también hay que señalar en algunos puntos un exceso de concisión. Cierto que la suma de las fuerzas electromotrices es nula, $\sum E = 0$; pero el ponerlo de manifiesto, aunque la demostración sea muy elemental, habría sido, en concepto del que subscribe, conveniente.

Nada puede objetarse á la clasificación y descripción de los principales tipos de alternadores, aunque pudo prescindirse de la de algunos modelos ya anticuados, compensándola con el mayor detalle de otros más modernos.

Estudia el autor en el capítulo III de esta Memoria la unión ó agrupamiento de los alternadores, problema interesantísimo de la técnica eléctrica, y no exento de dificultades,

fijándose principalmente, como era debido, en la unión en paralelo ó en derivación. Expone la influencia beneficiosa de las corrientes sincronizadoras, y es de lamentar que no penetre más resueltamente en el fondo del asunto, tratándole con toda la extensión y detalle que merece.

El que subscribe no participa de la opinión del autor de esta Memoria, que en la pág. 136 dice que «por consideraciones de Mecánica racional, *importunas aquí*, se demuestra que la fuerza **F**, que representa la corriente sincronizadora, está ligada al período **T** de la oscilación propia del alternador, por la fórmula $F = \frac{4\pi^2 I}{r.T^2}$, en la que **I** es el momento de inercia del órgano móvil, y **r** el brazo de palanca de **F**, respecto al eje de la máquina». Cree, por el contrario, que estas consideraciones de Mecánica á que se alude habrían sido pertinentes, y que hubieran permitido al autor, que revela tener condiciones para ello, tratar extremos muy importantes relacionados con esta materia, como el cálculo de la desviación angular, producida por las oscilaciones ó movivimiento pendular de los alternadores, siguiendo, por ejemplo, el método de Mr. Boucherot, y estudiar, como el asunto lo reclama, todas las condiciones mecánicas de los grupos electrógenos unidos en paralelo, diferentes, naturalmente, según los motores empleados.

A esta deficiencia en el estudio analítico corresponde la del estudio gráfico hecho á continuación, que habría sido más completo si el autor se hubiese inspirado en los de Görges, Hefter ó De Renzis.

En la quinta y última parte de esta Memoria se indica la marcha que puede seguirse para proyectar un alternador, aunque no se hace de ello aplicación á un caso concreto, como habría sido de desear.

Como la Sección puede juzgar por el análisis que acabo de hacer, la Memoria *Electrón* no contiene errores de concepto, y demuestra, de parte de su autor, conocimiento claro

del asunto que con acierto trata, aunque en diferentes puntos lo haga con exceso de concisión. Esta última circunstancia, que al detalle señalo en las páginas anteriores, me inclina á proponer á la Sección que se conceda *Mención honorífica* al autor de esta Memoria; que, de no mediar aquélla, habría merecido, en concepto del que subscribe, recompensa más alta.

XXXV.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

Por José Echegaray.

Conferencia octava.

Señores:

Hemos estudiado en las conferencias precedentes la célebre y fecunda fórmula de Green, que ya hemos dicho que es una fórmula de transformación de integrales triples, de vectores, en integrales dobles ó de superficie.

Hemos estudiado diferentes casos, según que el vector general W es de tres escalares, de dos ó de uno.

De la fórmula correspoudiente á este último caso, vimos que podían deducirse la fórmula de Poisson y la fórmula de Laplace, si bien la demostración concreta y rigurosa de la primera la dejamos para más adelante, porque exige el estudio de las primeras y segundas derivadas de W.

Y habíamos anunciado también que, hablando en términos generales, y como en síntesis, las fórmulas de Laplace, de Poisson, y aun la misma fórmula de Green, comprendían y dominaban en cierto modo los problemas de la electricidad estática, así como veremos en este mismo curso que la fórmula de Stokes caracteriza los problemas de la electricidad dinámica.

Y hacemos esta observación porque es bueno y es fecundo reconcentrar en cuanto sea posible los fenómenos de un

orden de la naturaleza en una fórmula matemática que les dé unidad racional.

Esta es una idea por hoy un tanto vaga, pero que ya la precisaremos.

* * *

Y como hemos dicho, que aunque el título general del presente curso es éste: Cuestiones de Análisis, no por eso hemos de abandonar las aplicaciones. Y así terminado el estudio de la fórmula de Green, y de las que de ella se deducen, á una de sus principales aplicaciones vamos á dedicar unas cuantas conferencias.

Vamos á aplicar, pues, dichas fórmulas á la Electro-estática.

No vamos á estudiar esta rama de la Física Matemática por ahora.

El estudio ordenado, metódico y sistemático de la Electro-estática, ya por el método clásico y por las teorias que á él se refieren, ya por los métodos modernos que en cierto modo se inician por la teoría de Maxwell, será objeto de otro curso completo, si á él llegamos.

Por hoy, nuestro objeto es más limitado y más modesto: dar un avance de la teoría del equilibrio eléctrico; una noción general, una idea de la naturaleza de este problema y del método ó de los métodos de solución que se han aplicado.

No esperen, pues, mis alumnos ni un estudio completo ni una solución completa, que reservamos en lo posible para más adelante.

Lo que vamos á exponer es, en cierto modo, un esquema de dicha rama de la Física Matemática.

* * *

Noción abreviada de la Electro-estática.—El nombre lo dice: La Electro-estática es aquella rama de la Física Matemática que se ocupa en el estudio del equilibrio de la electricidad ó de los sistemas eléctricos, mejor dicho.

En rigor, no sabemos lo que es la electricidad, pero suponemos que es un flúido, es decir, materia dotada de ciertas propiedades características.

Esta es una hipótesis, y este flúido que imaginamos es algo así como un simbolo, que sustenta y abarca determinados fenómenos de la Naturaleza, que en Física experimental se conocen con el nombre de fenómenos eléctricos.

La Física experimental, la que se funda en la observación y la experiencia, la que determina en cada fenómeno ciertas notas características, por decirlo de esta manera, á que da el nombre de parámetros, y los convierte en números y busca en ellos relaciones analíticas, ha agrupado determinada clase de fenómenos por considerar que tienen entre sí íntima relación, y les ha dado el nombre de fenómenos eléctricos y ha creado la electricidad experimental.

La Física matemática, dado su carácter propio, que explicábamos en el primer año de estas conferencias, su anhelo de elevarse á la unidad, su afán de convertir todos los fenómenos naturales en fenómenos de mecánica, ha forjado una hipótesis, y ha dicho: Todos los fenómenos eléctricos no son más que modificaciones, apariencias, determinaciones particulares de un flúido hipotético, á que doy el nombre de electricidad; ya antes, desde que la ciencia teórica quiso desprenderse de la ciencia práctica, había creado otra substancia, en rigor hipotética, á que había dado el nombre de materia.

Con esta diferencia, que la materia la vemos ó creemos verla, y acertemos ó estemos en el error, para nosotros la materia es la realidad más firme; y á la materia le aplicamos las fórmulas de la mecánica y el cálculo matemático, y for-

mamos esa gran construcción que se llama astronomía, y aquí en nuestro mundo, muchas ramas de la Física.

Teníamos la materia y la mecánica, para explicar matemáticamente el equilibrio y el movimiento de los cuerpos ponderables.

Pues con la electricidad, la Física matemática quiso hacer otro tanto: La electricidad y la mecánica, para explicar todos los accidentes del flúido y todos los fenómenos eléctricos.

El dibujo, por decirlo de este modo, es el mismo en ambos casos: la materia, como substancia, como fondo; la Mecánica clásica para explicar el equilibrio y el movimiento de las masas.

Y en la nueva ciencia de los fenómenos eléctricos, la electricidad como fondo, como substancia material, que aunque no sabemos lo que es, la experiencia nos sugiere la idea de que unas veces está como en equilibrio, que otras veces pasa de un lugar á otro del espacio. Un condensador está cargado de electricidad, y la electricidad en el condensador parece que está sin moverse. Y otras veces el fenómeno eléctrico cambia de sitio, como en el rayo, como en la descarga, como en la corriente. Pues habrá una ciencia del equilibrio eléctrico, que podremos llamar Electro-estática, y otra ciencia, ó mejor dicho, otra rama de la ciencia de la electricidad, que por analogía podremos designar con el nombre de Electrodinámica.

Y siguiendo el paralelíslmo con los fenómenos de la materia ponderable, podremos tener la idea de aplicar á este equilibrio y á este movimiento, de determinados fenómenos, las leyes de la mecánica; pero en esta nueva esfera de hechos eléctricos nos encontramos con una nueva complicación.

Porque fijemos bien las ideas.

En los fenómenos de la materia ponderable sólo tenemos masas y fuerzas que, aplicadas á dichas masas, ó las mantienen en equilibrio ó las comunican determinadas velocidades.

Hemos de contar también con el espacio, es cierto; pero

el espacio de la vieja mecánica, por regla general, está vacío, es la extensión abstracta, es el espacio geométrico.

De modo que, volvemos á repetirlo, en la ciencia que estudia los fenómenos de la materia ponderable, tenemos estos tres elementos:

1.° Masas.

2.° Fuerzas.

3.° El espacio geométrico.

Y las leyes de la Mecánica estudian los fenómenos del movimiento de aquellas masas, bajo la acción de aquellas fuerzas en dicho espacio geométrico.

*
* *

Pero en los fenómenos eléctricos, y una cosa análoga pudiéramos repetir para los fenómenos magnéticos, si bien encontramos tres elementos análogos:

1.° El flúido eléctrico, como flúido único ó como doble flúido positivo y negativo, según la hipótesis de que se parta.

2.° Fuerzas eléctricas que sobre la anterior substancia hipotética actúan.

3.° El espacio en que estos fenómenos han de desarrollarse; si bien esto constituye, repetimos, un paralelismo casi perfecto con los elementos que hemos señalado en la vieja mecánica, nos encontramos, y esto lo hemos explicado muchas veces, con que el elemento *espacio* ha cambiado de naturaleza: ya no es el espacio inerte, abstracto, el espacio geométrico en el cual pasa algo, pero al cual no le pasa nada, sino que por el contrario es un espacio activo, es decir, que toma parte importantísima en todos los fenómenos eléctricos: en suma es el éter.

El éter que se nos impone como una realidad, pero que á estas fechas no sabemos lo que es, ni qué constitución tiene,

ni de qué propiedades goza, como no demos por buenas las que para explicar tales ó cuales fenómenos le atribuyamos.

Los fenómenos, pues, de la nueva Física Matemática y de la nueva Física Experimental, se comprende desde luego, que han de tener una complicación inmensamente mayor que la de aquellos fenómenos que sólo afectaban á la materia, á la fuerza y al movimiento, según los comprendia la vieja hipótesis mecánica.

*
* *

Y, sin embargo, siguiendo el paralelismo y obedeciendo á leyes de analogía, que la imaginación y la lógica imponen al entendimiento humano, la nueva ciencia, la de la electricidad (y el magnetismo), se empezó á construir por los mismos procedimientos, que habían servido para construir la ciencia de la materia ponderable.

Tenemos, se decía, la substancia ó flúido eléctrico, las fuerzas atractivas ó repulsivas entre los elementos de dicho flúido y el espacio cuajado de éter.

Pues apliquemos á estos tres elementos las leyes de la Mecánica, y obtendremos las leyes del equilibrio eléctrico y de su movimiento.

Esto se dice fácilmente, y la imaginación nos engaña, sin que nosotros resistamos el engaño; pero esto es inadmisible ante la lógica pura, y es inadmisible ante la realidad.

Porque podemos decir fácilmente: *apliquemos la mecánica á la electricidad y al éter.*

Pero la crítica y el sentido común nos salen al encuentro, preguntándonos: ¿Qué mecánica es esa cuyos principios van á aplicarse á la electricidad y al éter?

¿La Mecánica clásica, la de las masas, la de la inercia, la de las fuerzas á distancia, la independiente del estado anterior?

Pues esto no es legítimo en manera alguna, porque esa mecánica fué creada, y valga la palabra, para las masas dotadas de inercia; pero no para la electricidad y el éter, que por el pronto en nada se parecen á las masas ponderables.

Aplicar la Mecánica clásica á los fenómenos de la electricidad, es algo enorme y estupendo; y suponiendo que alguna vez se obtengan resultados exactos, aun así diremos que es un atrevimiento formidable.

Si las fórmulas de la Dinámica clásica son de este tlpo

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

en que m representa la masa ponderable de un móvil, es, volvemos á repetirlo, atrevimiento formidable escribir las ecuaciones del movimiento de una cantidad etérea ó eléctrica de este modo:

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$

en que μ signifique una cantidad de electricidad ó éter.

Podrá acaso la experiencia justificar este atrevimiento como primera aproximación de los fenómenos eléctricos; pero no por eso dejará de ser grandemente atrevida la hipótesis en que semejante paralelismo se apoye.

Y, sin embargo, esto se ha hecho en la maravillosa teoría de la luz.

Y hoy mismo se habla de energía cinética del éter, cuando es lo cierto que la energía cinética, mientras de nuevo no se la defina y justifique, no es otra cosa en la vieja mecánica que la fuerza viva, y la fuerza viva no existe cuando la masa m se desvanece como masa dotada de inercia.

Y, sin embargo, hoy mismo se está haciendo y diciendo esto por grandes matemáticos y físicos. Y de este modo se determina por algnnos la relación $\frac{e}{m}$ en los rayos catódicos,

Más aún: gran número de teorías de la nueva Física matemática se deducen de las célebres ecuaciones de Lagrange, que son las ecuaciones más generales de la dinámica clásica, y esto, á su vez, es enorme, porque tales ecuaciones jamás se han demostrado para la ciencia de la electricidad, sino para la Mecánica clásica de las masas ponderables.

En suma, se pretende aplicar la Mecánica clásica á una esfera de fenómenos (los eléctricos) para los que no fué creada, y, por lo tanto, no fué demostrada su aplicación legítima para ellos.

¿Cómo puede causarnos extrañeza la impotencia que demuestran muchas fórmulas de la Mecánica clásica respecto á los fenómenos eléctricos, ni cómo puede rechazarse la crítica que con este motivo se formule, ni cómo, por último, causarnos admiración la enemiga que contra la hipótesis mecánica demuestran la mayor parte de los físicos?

No; lo que hasta ahora se ha entendido por hipótesis mecánica no puede aplicarse en buena ley á los fenómenos eléctricos y magnéticos.

¿Pero es esto rechazar en absoluto la hipótesis mecánica; no podrá ampliarse ó transformarse esta hipótesis, sin dejar de ser mecánica, de modo que aplicada á tales fenómenos sea tan cómoda, y tan fecunda, y tan simbólica, pudiéramos decir, como lo ha sido la hipótesis mecánica clásica en la pasada centuria?

Y la verdad es que la anterior interrogación está contestada por los hechos.

La labor inmensa y admirable que de algunos años acá grandes maestros están realizando en la Física matemática moderna, el número abrumador de hipótesis, teorías, memorias y libros relativos á electricidad y magnetismo, no son en el fondo más que la elaboración poderosa de una nueva mecánica, de la cual la antigua sea caso particular y tan general que pueda aplicarse lo mismo á las masas ponderables que á la electricidad, al magnetismo y al éter.

Pero en todas estas teorías y en todas estas hipótesis palpita la hipótesis mecánica ó varias hipótesis mecánicas; en todas aparece la fuerza, el trabajo, la energía, la velocidad, la energía potencial y la cinética, aunque alguno de estos conceptos deban ser reformados ó transformados ó definidos de nuevo.

Donde hay cambio, y rapidez en el cambio, y sucesión de cambios, y causas que lo producen, y en toda esta agitación expresiones invariantes, ó llámense energías, subsiste la mecánica, y las hipótesis que á tales resultados conduzcan serán hipótesis mecánicas.

De las afirmaciones que preceden sólo debemos exceptuar la orientación, de la que pudiéramos llamar escuela conceptualista, y en parte de la escuela energética; pero de una y otra orientación ya hablaremos en momento más oportuno.

***

Acabamos de decir que ha sido atrevimiento enorme la aplicación de la Mecánica clásica á los fenómenos eléctricos y magnéticos, porque la vieja mecánica no fué creada para ellos, y, sin embargo, aun de esta afirmación rotunda algo debemos rebajar.

Es atrevimiento estupendo, en efecto, aplicar la dinámica clásica á la Electro-dinámica, es decir, al movimiento de las masas eléctricas y magnéticas de los iones y de los electrones, atrevimiento que sólo puede justificarse por el éxito; pero, en cambio, es más natural y, por lo tanto, menos atrevido, aplicar hasta cierto punto y mediante algunas hipótesis auxiliares, los principios de la estática clásica á la electro-estática, sobre todo á la electro-estática bajo su primera forma, como explicaremos en breve.

El concepto de fuerza no repugna á las nuevas teorías

eléctricas, y con él ha de contar la nueva mecánica, de que antes hablábamos, aun cuando, como hemos dicho muchas veces, en la Física moderna el concepto dominante sea el de energía.

Pero energía que no se mida por kilográmetros y que, por lo tanto, no cuente con el concepto de fuerza, hoy por hoy, no tiene sentido en la ciencia positiva.

Afirmamos esto por nuestra cuenta, sin perjuicio de lo que el porvenir vaya afirmando ó negando, que las afirmaciones absolutas de la razón humana, por lo menos, son peligrosas; pero sea como fuere, el concepto de fuerza, repetimos, y la composición y descomposición de fuerzas y, por lo tanto, su equilibrio, pueden aplicarse con ventaja y fecundidad y sin gran remordimiento á los equilibrios eléctricos y magnéticos, sobre todo, volvamos á repetirlo, bajo la forma primera de la electricidad estática.

Porque, al fin y al cabo, el concepto de fuerza lo mismo se aplica á dos puntos ponderables que se atraen, que á dos elementos eléctricos ó á dos polos magnéticos, y en la Ciencia positiva, la fuerza, se mide del mismo modo en todas partes.

Admitamos por hoy este postulado, sin perjuicio de discutirlo en otra ocasión.

Y volviendo ahora al objeto principal de esta conferencia, sentemos los principios generales de la Electro-estática para hacer aplicación á ellos de las fórmulas antes obtenidas.

*
* *

Hemos indicado ya que en la Electro-estática hay dos maneras, si se nos permite este modo de expresarnos, ó digamos también, que enel desarrollo de esta ciencia hay que considerar la forma clásica y la forma moderna, diferenciándose substancialmente una de otra, como ya hemos explicado

con repetición, que en la Electro-estática clásica se considera al espacio vacío é inerte: el espacio es puramente geométrico y no interviene por actividades propias en el equilibrio de las masas eléctricas.

En cambio, en la Electro-estática moderna, la de Maxwell y Faraday, como el espacio está relleno de éter, hay que contar con él en todos los problemas del equilibrio.

Empecemos por la primera de estas hipótesis.

*
* *

Sucinta idea de la Electro-estática clásica.—Se trata de un problema de equilibrio entre elementos del flúido eléctrico, del mismo modo que en la Estática ordinaria se trata del equilibrio de un sistema de puntos materiales ó de masas grandes ó pequeñas.

En rigor, en uno y en otro caso, tenemos elementos materiales de substancias hipotéticas, porque tan hipotética es la materia ordinaria como el flúido eléctrico, aunque con la primera estemos, si vale la palabra, infinitamente más familiarizados que con la segunda.

Materia ponderable es lo que nos rodea; de materia ponderable está hecho nuestro cuerpo; en cada instante, en cada momento, en todos nuestros actos, vemos, tocamos, nos rozamos, si vale la palabra, con el mundo material; es de nuestro trato más íntimo y más constante, hasta tal punto, que para nosotros la materia ponderable llega á ser el símbolo más firme y más inquebrantable de la realidad.

En cambio, con la electricidad nuestras relaciones son más excepcionales.

O al menos así lo creemos; quiero decir con esto que de la materia ponderable tenemos conciencia continua, y del

flúido eléctrico, aunque nos bañe y nos penetre, de sus acciones, excepcionalmente tenemos conciencia.

Acaso todo esto es pura ilusión.

Si ciertas teorías modernas son exactas, la materia ponderable es una especie de conglomerado eléctrico; no existe como substancia propia, sino como apariencia, y todo cuanto tocamos y vemos es flúido eléctrico, con disfraces más ó menos caprichosos.

Pero sea de ello lo que fuere, y volviendo al punto de partida, entre la Estática de la materia ponderable, que es la de la Mecánica ordinaria, y la Estática de las masas eléctricas, el problema se plantea de la misma manera.

Se dan masas ponderables ó eléctricas, están aquéllas sujetas á ciertas fuerzas, y éstas están sujetas á ciertas fuerzas también, y la Estática pretende determinar las condiciones de equilibrio de uno ú otro sistema.

Pues la condición de equilibrio es única para ambos casos.

Que en cada punto material, sea punto de materia ponderable ó sea punto de materia eléctrica, la resultante de todas las fuerzas que actúan sea igual á cero; que es como decir, que las tres componentes de estas resultantes sean nulas, ó en la moderna terminología, que el polígono vectorial de las fuerzas sea cerrado, ó bien que la suma vectorial sea nula, con lo cual tenemos una ecuación en vez de tres.

Esta es la ley general de la electricidad estática.

Y aquí no varía la Mecánica clásica al ser aplicada al flúido eléctrico.

Por eso dijimos, que si era gran atrevimiento aplicar las leyes de la Mecánica ordinaria á los movimientos del flúido eléctrico, es decir, á la Electrodinámica, era natural y era legítimo aplicar las leyes de la Estática clásica al equilibrio del flúido eléctrico.

Lo que puede variar y varía ciertamente, al pasar de uno

á otro sistema, es lo que se llaman *enlaces*, palabra que hoy se emplea frecuentemente, que se aplica con cierta vaguedad á los sistemas eléctricos, y que está tomada por analogía y extensión de los sistemas materiales ordinarios.

En los sistemas materiales, los enlaces son materiales también: ruedas, engranajes, palancas; hilos inextensibles, cadenas, toda una maquinaria material en que los *enlaces* participan de la naturaleza de las masas que enlazan, porque también tienen masas é inercia.

Otras veces se dice: tal punto ha de quedar sobre una línea, ó tal otro punto material ha de quedar sobre una superficie ó ha de quedar encerrado en un recinto.

Pero todos estos *enlaces* materiales se definen, se determinan, y en el equilibrio del sistema se pueden tener en cuenta sin dificultad de ningún género, al menos sin dificultad teórica.

Pero desde que salimos de la vieja Mecánica y entramos en la mecánica de los nuevos flúidos, si bien algunas veces hablaremos de enlaces, estos enlaces serán ocultos, invisibles, misteriosos, y por qué no hemos de decir la palabra propia, mal definidos ó no definidos ni bien ni mal.

Muchas veces estos enlaces son hipótesis disfrazadas para sortear dificultades graves; pero sobre esta cuestión no debemos anticipar las ideas, basta, por el momento, con que las hagamos sospechar de nuestros lectores.

*
* *

Y entremos ya en el problema del equilibrio del flúido eléctrico.

En último resultado, tenemos un sistema de puntos en los cuales imaginamos elementos, masas, pudiéramos decir, pero excluyendo la idea de inercia de este flúido especial á que

hemos llamado flúido eléctrico; entre estos puntos, fuerzas, y también pudiéramos agregar fuerzas exteriores, mas en este sucinto resumen prescindamos de ellas. Estas fuerzas serán fuerzas eléctricas de atracción entre elementos eléctricos de nombre contrario, de repulsión entre elementos eléctricos del mismo nombre.

En rigor, el problema es como si fuera de Mecánica clásica.

¿Son puntos que han de permanecer sobre una línea ó sobre una superficie, y entre ellos hay puntos fijos? Pues problemas como estos los resuelve la Mecánica clásica á cada momento.

Pero lo que aquí varía es lo que llamábamos los enlaces, y esto es lo que da carácter especialísimo al problema de equilibrio que estamos considerando.

Como no hemos de tratar la cuestión en general, porque esto queda para cuando estudiemos la Electro-estática con toda extensión, presentemos un ejemplo que dará el tipo de esta clase de problemas.

Suponemos el espacio vacío é inerte, y en él podrá haber:

1.° Masas eléctricas infinitamente pequeñas ó finitas en puntos fijos.

2.° Masas eléctricas fijas á lo largo de curvas.

3.° Masas eléctricas fijas también sobre una superficie.

4.° Masas eléctricas fijas en los diferentes puntos de un volumen.

5.° Cuerpos conductores en estado neutro, unidos ó no á tierra; ó conductores con cierta carga.

Este sería el caso más general; pero á fin de simplificar, sólo supondremos puntos eléctricos fijos sin especificar si están aislados ó en forma contínua sobre líneas, superficies ó volúmenes.

Y para simplificar también supondremos un sólo cuerpo conductor, sin carga eléctrica previa y aislado en el espacio.

De suerte que el caso particular que vamos á considerar es el que marca la figura 21.

a representa una masa eléctrica fija. Representamos una como ejemplo; puede haber cuantas se quieran.

b representa una curva en cuyos diferentes puntos hay masas eléctricas, fijas también. Y este mismo tipo puede repetirse.

c representa una superficie sobre la cual se haya distribuí-

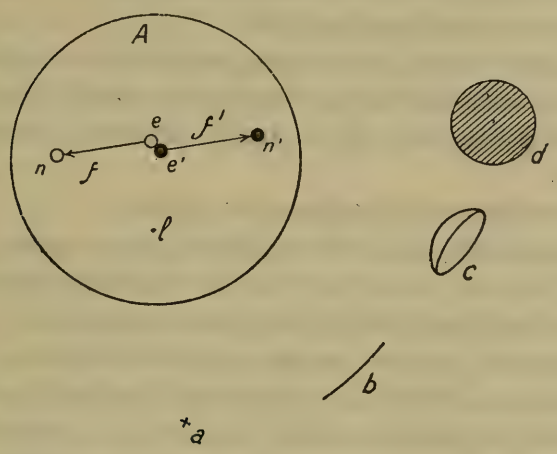


Figura 21.

do, según cierta ley, una masa eléctrica. Y quien dice de una superficie, puede decir de otras muchas.

d designa un volumen en cuyos diferentes puntos podemos imaginar masas eléctricas fijas, como en los casos anteriores. Y puede haber tantos sólidos como éste.

Por último, *A* representa un cuerpo conductor, y lo que de él digamos pudiéramos decir de otro cualquiera.

En suma, el tipo que presentamos como ejemplo comprende masas eléctricas fijas, ya aisladas, ya distribuídas sobre líneas, superficies ó volúmenes, y además cuerpos conductores.

Pero todavía no está definido el sistema, ni, sobre todo, los enlaces, dando á esta palabra el sentido general que antes indicábamos.

Entre las masas fijas y los cuerpos conductores se extiende el espacio, y hemos dicho que en la antigua Electro-estática el espacio es neutro, inerte, es puramente un espacio geométrico.

Pero ahora debemos confesar que al hablar de su inercia, y al suponer que es puro espacío geométrico, hemos exagerado nuestro propio pensamiento.

Porque el espacio en las antiguas teorías es verdad que nunca es activo; pero en rigor no es puro espacio geométrico, porque es casi siempre un espacio aislador de resistencia infinita.

Y bien pronto explicaremos esta palabra.

Del equilibrio de las masas eléctricas del sistema *a, b, c, d* no hay para qué ocuparse, porque las suponemos fijas y para ellas no hay que establecer ecuaciones de equilibrio.

No sucede lo mismo con los cuerpos conductores.

El sistema eléctrico *a, b, c, d* ejercerá sobre cada punto del conductor *A*, por ejemplo sobre el punto ($e\,e'$), cierta fuerza; y tendremos para dicho punto lo que antes llamábamos un vector; será el vector eléctrico del sistema *a, b, c, d*.

Pero en el punto ($e\,e'$) la electricidad se encuentra en estado neutro, es decir, que podemos imaginar dos masas eléctricas de signos contrarios e y e', una positiva y otra negativa, y en cantidades iguales, según explicábamos en otra conferencia.

Decíamos antes que el sistema *a, b, c, d* determina un vector en el punto ($e\,e'$), y mejor dijéramos que determina dos, uno f para el elemento de electricidad positiva e, y otro f' para el elemento de electricidad negativa e', ambos iguales y contrarios.

Estas dos fuerzas descomponen el flúido neutro ($e\,e'$), separan sus dos elementos, se llevan, por decirlo de este modo,

el elemento n en un sentido y el elemento n' en sentido contrario.

Y lo que hemos dicho para el punto ($e\ e'$) del cuerpo conductor pudiéramos decir para todos los demás elementos del mismo; por eso el problema del equilibrio eléctrico en la antigua Electro-estática, es un problema de equilibrio de electricidad en los conductores, porque las masas fijas ya están por sí en equilibrio.

Resulta del análisis anterior, que en el conductor A tendremos masas eléctricas positivas y masas eléctricas negativas separadas como n y n' en todo el espacio del cuerpo.

Y el problema del equilibrio es éste: ¿cómo quedan distribuídas dichas masas eléctricas n, n' cuando el sistema llega al equilibrio?

En rigor, el problema del equilibrio no difiere en la Electro-estática de un problema de equilibrio ordinario en la Mecánica clásica.

Es preciso que en cada punto del conductor la fuerza sea nula, porque si no lo es, sucederá lo que en el punto ($e\ e'$): que se separarán las dos electricidades caminando por el conductor en busca de su equilibrio, por decirlo así.

Pero al hablar de la fuerza que ha de ser nula en cada punto del conductor, es preciso definir esta fuerza y decir de dónde procede.

La fuerza en punto cualquiera l procederá del sistema a, b, c, d y además de la acción que sobre el punto l ejercen los flúidos puestos en libertad n, n' ..... que vienen á agregarse, por decirlo de este modo, á los elementos eléctricos del sistema fijo.

Las fuerzas eléctricas obedecen, según demuestra la experiencia, á la ley newtoniana de la relación inversa del cuàdrado de la distancia, y tendrán, como demostramos en el curso anterior y como se demuestra inmediatamente, una función de fuerzas y una potencial, que es la misma función de fuerzas con signo contrario.

Luego las tres componentes de la fuerza que actúa sobre todo punto l del conductor se expresarán de este modo:

$$\frac{dV}{dx}, \quad \frac{dV}{dy}, \quad \frac{dV}{dz},$$

siendo V la potencial. Pero entiéndase bien, la potencial producida por las masas fijas a, b, c, d y por las masas n, n' de electricidad libre, que resultan de la descomposición de la de electricidad neutra del conductor por las atracciones y repulsiones del expresado sistema a, b, c, d.

Ahora bien; para el equilibrio del punto l, es decir, para que en él no se descomponga la electricidad, es preciso que dicha fuerza sea nula ó que sean nulas sus componentes.

En suma, debemos tener

$$\frac{dV}{dx} = 0, \quad \frac{dV}{dy} = 0, \quad \frac{dV}{dz} = 0.$$

Pero si V tiene sus derivadas con relación á x, y, z, nulas, resulta que la potencial V es una constante.

Pues apliquemos al punto l la ecuación de Poisson

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi\rho,$$

en que ρ es la densidad de electricidad libre en el punto l en cuestión.

Y bien, la potencial V es constante; luego sus derivadas segundas, con relación á x, y, z, son nulas. Luego es nulo el primer miembro de la ecuación; por lo tanto,

$$4\pi\rho = 0,$$

y por fin

$$\rho = 0,$$

es decir, que para que exista equilibrio en el punto l, no debe existir en él electricidad libre.

En otros términos: las masas eléctricas n y n'....., que suponíamos vagando por el cuerpo conductor, no pueden quedarse en ningún punto del mismo; así á medida que se vaya descomponiendo la electricidad neutra, irán desapareciendo del interior del cuerpo los dos fluídos, dirigiéndose á la superficie; de donde resulta este teorema importante: En un cuerpo conductor en equilíbrio, la electricidad libre, á medida que se va produciendo por descomposición de la electricidad neutra, tiende á salirse del cuerpo dirigiéndose hacia la superficie: ó abreviadamente, en un cuerpo conductor la electricidad acude á la superficie.

Esto ya lo demostramos en el primer curso para el caso particular de una esfera, ahora lo hemos demostrado en general; pero no olvidemos las condiciones de la demostración para no darle más generalidad de la que debe tener.

La demostración se funda en que la fuerza eléctrica, que suponemos que depende de la relación inversa del cuadrado de la distancia, tiene una función de fuerzas, y, por lo tanto, una potencial, de modo que las tres componentes se pueden expresar por las derivadas con relación á x, y, z de la potencial V.

Depende, además, de que dicha potencial satisface á la ecuación de Poisson, de la cual se deduce, que la densidad en cada punto del interior del conductor debe ser nula.

Admitiendo todo esto, la demostración es matemática, es una demostración *à priori*, por la cual se prueba que el flúido eléctrico, flúido hipotético, tiene que acumularse en la superficie de los conductores para estar en equilibrio, lo cual se comprueba experimentalmente, como de antemano saben mis alumnos, por experiencias elementales de la Física.

Por lo demás, se comprende que pueden imaginarse flúidos hipotéticos en tales condiciones, que para el equilibrio

no sea preciso su acumulación en la superficie de los cuerpos conductores.

En resumen, las masas eléctricas fijas *a, b, c, d* descomponen la electricidad neutra del cuerpo conductor en las dos electricidades elementales, positiva y negativa, y éstas no pueden estar en equilibrio si no se acumulan en la superficie.

Tenemos, pues, resuelta la primera parte del problema de la Electro-estática; pero queda la parte más difícil en el orden matemáiico, que es la distribución de los dos flúidos en que se ha descompuesto el flúido neutro, en toda la superficie del cuerpo *A*.

¿Cuál será esta ley de distribución en la superficie de *A*, para que los flúidos positivo y negativo, resultado de aquella descomposición, ya que no puedan vagar por el interior del cuerpo, porque entonces no estarían en equilibrio, ni quedarse inmóviles tampoco, porque hemos demostrado que la densidad en el interior debe ser nula, no puedan ni escaparse al espacio ni deslizarse sobre la superficie?

Escaparse al espacio no pueden, porque en esta misma conferencia hemos dicho que el espacio se considera como un aislador perfecto.

El espacio puro de la geometría adquiere en la Electro-estática antigua la propiedad de no dejar pasar por él la electricidad; si se nos permite esta palabra, podremos decir que pierde su neutralidad y su pureza abstracta para adquirir cualidades físicas.

No es activo, pero es resistente y mantiene á la electricidad, que llegó á la superficie sobre dicha superficie sin permitir que se disipe.

De suerte que los flúidos eléctricos que resultan de la descomposición del flúido neutro del cuerpo *A* no pueden quedar en el interior del cuerpo, no pueden pasar al espacio y en la superficie han de quedarse.

Para el equilibrio completo falta buscar las condiciones

necesarias á fin de que tampoco se mueva sobre la superficie límite del cuerpo conductor.

Y estas condiciones se reducen á la siguiente:

Que para cada punto eléctrico que ha venido á parar á la superficie, la fuerza que sobre él actúe, resultante de todas las masas eléctricas, las fijas en el espacio y las móviles del conductor descompuesta normal y tangencialmente á la superficie límite, den un valor nulo para dicha componente tangencial.

La componente normal ya la destruirá la resistencia del espacio como aislador.

Este es el problema cuya solución indicaremos en la conferencia inmediata.

XXXVII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la física matemática.

Por José Echegaray.

Conferencia novena.

Señores:

Para presentar un ejemplo de aplicación de la fórmula de Green á la Física Matemática, empezamos á estudiar en las conferencias anteriores el problema de la Electroestática de una manera sintética, y en sus líneas generales, aplazando el estudio de esta rama principalísima de la electricidad para los cursos venideros, si es que llegan. Y aun no dando de este gran problema más que una ligerísima idea, debíamos distinguir lo que llamamos la Electroestática clásica, en la que sólo se contaba con el espacio como aislador, sin atribuirle ninguna otra energía ni propiedad, y la Electroestática moderna, la que procede de Faraday y Maswell, en que el espacio representa papel importantísimo.

Expusimos la forma en que se plantea el problema por el método clásico, tomando para nuestro ejemplo un esquema ó sistema tipo compuesto de masas eléctricas fijas, y un cuerpo conductor, ya en estado neutro, ya con cierta carga inicial.

Que las masas eléctricas fijas han de descomponer la electricidad neutra del cuerpo conductor, es evidente, admitida la hipótesis sobre la naturaleza de la electricidad que admitía la Física antigua, y que nosotros admitimos para nuestro ejemplo, porque, después de todo, de alguna hipó-

tesis ha de partirse ó en alguna forma han de expresarse los mismos resultados de la experiencia.

Y el problema de la Electroestática se nos planteaba de este modo.

El sistema de masas eléctricas fijas *actuando á distancia*, porque en el siglo pasado ésta era la hipótesis natural, descompone la electricidad neutra del cuerpo conductor en multitud de elementos positivos y negativos, y se pregunta:

¿En qué posíciones han de colocarse estos elementos para que ellos y las cargas fijas constituyan un sistema en equilibrio?

Precisemos más; los elementos del conductor no pueden salir del conductor, porque al espacio le hemos dado la propiedad de aislador perfecto. Es la única cualidad que le hemos concedido.

Pero se comprende, que los elementos eléctricos positivos y negativos que no pueden salir del conductor, cuya superficie es como la pared de un vaso ó la envolvente de un recinto, gracias á la propiedad aisladora del espacio, se comprende, repito, que estos elementos, estas especies de moléculas eléctricas, bajo su acción mutua y bajo la acción de las masas fijas exteriores, se distribuyeran en ciertas configuraciones geométricas que fueran precisamente las del equilibrio que buscamos.

Y esto es precisamente lo que sucedería y podría suceder, si las leyes de las atracciones y repulsiones eléctricas fueran otras distintas de las que expresan las leyes newtonianas.

Pero vemos que en este caso la fuerza que actúa sobre cualquier punto del cuerpo conductor, tiene por componentes las tres derivadas de una función de fuerzas, ó de una función potencial con signo contrario, y que, por lo tanto, para que el punto esté en equilibrio, para que ninguna fuerza actúe sobre él y provoque nueva descomposición del flúido neutro, será preciso que dichas tres componentes sean nulas ó que la potencial sea constante.

Y aplicando la fórmula de Poisson, que habíamos visto que podía deducirse de la fórmula de Green, dedujimos que la densidad eléctrica en el interior del cuerpo debía ser nula, ó de otro modo, que en el interior de dicho cuerpo no puede existir electricidad libre, y llegábamos de este modo á la siguiente conclusión: Que en los cuerpos conductores, para el equilibrio eléctrico, es preciso que la electricidad descompuesta se acumule y distribuya sobre la superficie del cuerpo.

A este punto llegábamos en la conferencia anterior, y este problema ó los problemas análogos son los problemas capitales de la vieja Electroestática y los que dan lugar á grandes desarrollos matemáticos en que han ejercitado su inventiva los grandes maestros, desde Dirichlet á Poincaré.

***

Y recordemos que los escrúpulos que nos asaltaron para aplicar los principios de la Mecánica clásica á los problemas de la electricidad, quedaban á salvo al llegar á este punto por lo que se refiere á la Electroestática, porque el equilibrio de fuerzas sólo depende del paralelogramo de las mismas, principio fundamental, y de que se definan bien los enlaces de los puntos.

La naturaleza de los puntos á que se aplican las fuerzas, importa poco; lo mismo da que sea una masa ponderable infinitamente pequeña, que una carga eléctrica infinitamente pequeña también, ó si se quiere, un punto geométrico abstracto.

Con tal que estos puntos sean invariables en su estructura infinitesimal, lo demás importa poco; á puntos geométricos se pueden asemejar.

Y por eso el problema de Electroestática, que como tipo empezamos á estudiar en la conferencia precedente, al llegar á este momento en que estamos, puede decirse que queda

entregado á la ciencia pura, como vamos á explicar desde luego.

***

Decíamos antes: La electricidad descompuesta en el conductor no puede quedar en el interior del mismo, según hemos demostrado y según comprueba la experiencia; no puede salir á lo exterior porque el espacio, como si fuera una substancia aisladora perfecta se opone á ello; pero podrá moverse y deslizarse por la superficie, y esto es lo que hay que evitar para que se establezca el equilibrio.

Sea *a* (fig. 21) una pequeña masa eléctrica de las que han tenido que acumularse en la superficie del cuerpo conductor *C*, y estudiemos las condiciones de equilibrio de este punto.

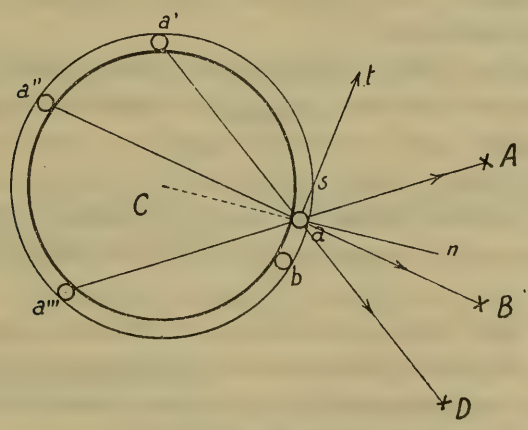


Figura 21.

Toda la electricidad descompuesta en el cuerpo *C*, por la acción de las masas fijas exteriores *A*, *B*, *D*, se habrá acumulado en la superficie del cuerpo y formará, por decirlo así, ó así podremos imaginarlo, una capa electrica *a a' a''* ..... que en unas regiones podrá ser electricidad positiva y en otras negativa

Esta distribución comprende precisamente una parte del problema.

El equilibrio de esta capa eléctrica se establece con facilidad suma.

Sea a una partícula eléctrica de dicha capa.

Sobre ella actuarán por una parte todas las partículas a, a'', a'''..... de la capa misma, según las rectas $a\,a'$, $a\,a''$, $a\,a'''$.....

Estas fuerzas se calculan con gran facilidad; según la ley de las atracciones y repulsiones eléctricas, basta multiplicar las masas entre sí y dividirlas por el cuadrado de la distancia, y en todo caso por un coeficiente constante, que dependerá de la unidad que se elija.

Por otra parte, actuarán también sobre a todas las masas exteriores A, B, D....., según las rectas que unen estos puntos al punto a. La expresión de estas fuerzas será análoga á la de las anteriores.

Ahora bien; para el equilibrio del punto a basta que la resultante de todas estas fuerzas sea normal á la superficie, y que actúe hacia lo exterior, según an, porque de este modo ni podrá el punto a penetrar en el cuerpo, ni podrá salir al espacio, porque el espacio es aislador, ni podrá deslizarse sobre la superficie, porque la componente at será nula.

Y en rigor, esta es la condición que debemos expresar.

Para expresarla analíticamente, imaginemos (fig. 22) un punto a y una fuerza eléctrica aA actuando sobre dicho punto, cuyas componentes serán aB, BC, CA.

Y vamos á determinar la componente de aA sobre una recta cualquiera s.

Sabemos que si V es la potencial del sistema eléctrico en el punto a, las componentes de la fuerza eléctrica aA serán

$$-\frac{dV}{dx}, -\frac{dV}{dy}, -\frac{dV}{dz}.$$

Y para proyectar aA sobre as no habrá más que proyectar las tres componentes; de modo que tendremos para la proyección aA' de aA sobre la línea s

$$aA' = -\frac{dV}{dx}\cos(x, s) - \frac{dV}{dy}\cos(y, s) - \frac{dV}{dz}\cos(z, s).$$

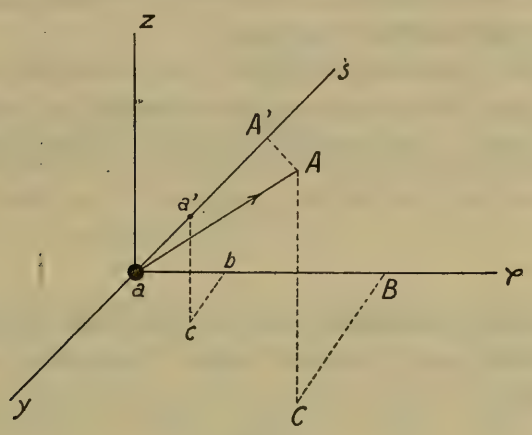


Figura 22.

Ahora bien; si sobre as tomamos un punto a' infinitamente próximo á a, y hacemos

$$aa' = ds,\ ab = dx,\ bc = dy,\ a'c = dz,$$

resultará evidentemente:

$$\cos(x, s) = \frac{dx}{ds},\ \cos(y, s) = \frac{dy}{ds},\ \cos(z, s) = \frac{dz}{ds},$$

y sustituyendo en el valor de la componente que buscamos estos valores

$$aA' = -\frac{dV}{dx}\frac{dx}{ds} - \frac{dV}{dy}\frac{dy}{ds} - \frac{dV}{dz}\frac{dz}{ds}$$

que es igual, por la regla de la diferenciación, á

$$aA' = \text{componente de } aA \text{ sobre } s = -\frac{dV}{ds}.$$

Luego para hallar la componente de la fuerza eléctrica sobre una recta cualquiera, no hay más que tomar la derivada de la potencial sobre dicha recta.

Es decir, volviendo á la figura, que la componente sobre la tangente t de todas las acciones eléctricas que actúan sobre a, siendo t una tangente cualquiera, vendrá expresada por

$$-\frac{dV}{ds};$$

y como esta componente ha de ser nula para el equilibrio, esto indica que la potencial sobre la superficie ha de ser constante.

***

En suma, las condiciones de equilibrio en este ejemplo particular, que bien puede generalizarse, se marcan ya fácilmente:

Primero. Es preciso que no quede electricidad libre en el interior del cuerpo conductor, con lo cual la potencial en el interior de dicho cuerpo debe ser constante.

Segundo. Es preciso que la potencial sobre la superficie sea constante también.

De manera que la distribución eléctrica sobre la superficie debe ser tal, que sobre todo punto de la superficie la potencial de todas las masas eléctricas, las de la superficie, como las exteriores, han de dar una potencial constante T.

No conocemos la distribución de la electricidad en la superficie; mas para buscar el equilibrio debemos determinarla precisamente con esta condición.

Consideremos un punto a de la superficie, y supongamos que la densidad eléctrica superficial en este punto se representa por δ. Claro es que esta densidad es desconocida, variará de un punto á otro de la superficie, será, por lo tanto, función de x, y, z, y como en rigor z es función de x, y, determinada por la ecuación analítica de dicha superficie, podemos escribir

$$\delta = \varphi(x, y),$$

siendo φ una función desconocida.

La masa eléctrica en el punto a' será igual á la densidad multiplicada por el elemento de superficie, y representando éste por $d\omega$, resultará

$$\text{masa eléctrica en } a' = \delta \times d\omega = \varphi(x, y)\, d\omega.$$

Pero se sabe por geometría analítica que el área infinitamente pequeña $d\omega$ puede expresarse de este modo

$$d\omega = f(x, y)\, dx\, dy.$$

Por lo tanto, la masa eléctrica en a' será

$$\varphi(x, y) f(x, y)\, dx\, dy$$

y la potencial de esta masa con relación al punto a, cuyas coordenadas designaremos por x', y', z', así como por r la distancia aa' tendrá por valor

$$\varphi(x, y) \frac{f(x, y)}{r}\, dx\, dy;$$

y como

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2},$$

se convertirá en

$$\varphi(x, y) \frac{f(x, y)}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} dx\,dy$$

ó abreviadamente, representando por F el segundo factor, que será evidentemente una función de x, y, x', y'

$$\text{potencial de } a' \text{ en } a = \varphi(x, y) F(x, y, x', y) dx\,dy.$$

Como lo que hemos dicho del punto a' pudiéramos decir de todos los demás puntos de la capa eléctrica, la potencial total de toda esta capa sobre el punto a, será una integral doble de superficie, que podrá expresarse de este modo:

$$\text{potencial de la capa eléctrica sobre } a = \int\int_s \varphi(x, y) F(x, y, x', y') dx\,dy.$$

Claro es que aquí se nos presenta un problema que no puede pasarse por alto sin llamar sobre él la atención de mis alumnos, y es el siguiente:

El cálculo de la potencial para puntos de la capa $a'a''$..... á distancia finita de a, no ofrece dificultad ninguna, porque la potencial elemental tiene valores finitos, puesto que r no se reduce á o en el denominador.

Pero si consideramos (fig. 21) un elemento de la capa eléctrica b, infinitamente próximo á a, la distancia ab será infinitamente pequeña, y como entra en el denominador del elemento de la potencial, este elemento será ó se presentará como infinito.

Nos encontraremos, pues, en uno de los casos de excepción, que será preciso estudiar aparte, para ver si, á pesar de todo, la integral tiene un valor finito y determinado

Mas esta será cuestión que estudiaremos en otra conferencia.

Tomamos, pues, la potencial de la capa eléctrica tal como la hemos escrito en la fórmula anterior.

Debemos calcular ahora la potencial respecto al punto a de todas las masas exteriores A, B, D, que si las representamos por m, m', m''..... darán una potencial que podremos expresar por

$$\Sigma \frac{m}{r}$$

extendiendo la suma á todas las masas exteriores.

Reuniendo esta expresión con la precedente, la potencial de todas las masas eléctricas sobre el punto a será

$$\int\int\int \varphi(x, y)\, F(x, y, x', y')\, dx dy + \Sigma \frac{m}{r}.$$

Si conociéramos la forma de la función φ, la expresión precedente sería una función conocida de x' y', porque, efectuada la primera integral triple, no quedarían más que las variables x' y' y las constantes que determina la superficie.

Del mismo modo, el segundo término, ó sea la Σ, será también una función de las masas m, que son datos, de las coordenadas A, B, D ..... que son datos también, y de las coordenadas x', y' del punto a.

En suma, toda la potencial para el punto a será una función de x' y', y basta expresar que esta función, cuando varia sobre la superficie, es constante.

Es un problema de análisis más ó menos complicado, muy complicado realmente; pero que en su pureza abstracta, nada tiene que ver con el problema de Física que se considere.

Es un problema de análisis, repetimos, en que la verdadera incógnita es la función φ.

Se trata, en efecto, de determinar esta función φ, de modo que quede satisfecha la condición antes expresada.

Con este problema se enlazan varios problemas importantísimos, desde el célebre problema de Dirichlet hasta la ecuación de Fredholm.

Pero si penetrásemos en este campo, seria separarnos del objeto principal de las conferencias de este curso.

Agreguemos, no obstante, que al determinar la función φ no basta con la condición que hemos establecido; es indispensable que la cantidad de electricidad que contiene la capa sea nula si el cuerpo conductor se encontraba en estado neutro; de modo que tendremos

$$\int\int\int \varphi(x, y)\, d\omega = o.$$

Y si ya existía cierta carga eléctrica A, la nueva condición será

$$\int\int\int \varphi(x, y)\, d\omega = A.$$

Hemos planteado el problema en términos generales y un tanto vagos, sólo con el objeto de indidar la naturaleza de los problemas de que trata la Electroestática; y aunque por este camino se puede llegar á las soluciones definitivas, esto exigiría explicaciones y desarrollos, que no son de este momento.

***

Dijimos que íbamos á dar una idea sucinta del problema general de la Electroestática, pero que la Electroestática clásica se ha modificado profundamente, haciendo intervenir en el equilibrio el espacio ó el campo en que los cuerpos conductores y las masas fijas se encuentran, por decirlo así, sumergidos.

Hasta aquí hemos supuesto que el espacio geométrico gozaba sólo de una propiedad física; á saber, que era un cuerpo aislador que por él no podía circular la electricidad, y que por lo tanto, cuando en un cuerpo conductor llegaba un elemento eléctrico á la superficie, en el espacio encontraba una resistencia infinita para continuar su camino.

En las teorías modernas esta hipótesis desaparece y el problema se generaliza y se complica.

Demos, pues, una idea muy sucinta y muy general de este nuevo problema, que podremos comprender bajo este título:

Idea sucinta del problema de la Electroestática con arreglo á las nuevas hipótesis. Como hemos dicho, la diferencia entre la Electroestática clásica y la Electroestática moderna, consiste en que esta última hace entrar al espacio de una manera activa en el problema del equilibrio eléctrico.

Entran en este problema, como en el que antes indicamos, elementos comunes á ambos, por ejemplo, masas fijas y cuerpos conductores; pero entra, por decirlo de este modo, el ambiente que le rodea, que ya no es puramente geométrico ó cuando más infinitamente resistente al paso de la electricidad.

Se supone que la electricidad puede moverse en él, pero sólo recorriendo caminos infinitamente pequeños, como si el espacio estuviera dividido en pequeñas regiones y que cada una de ellas constituyera un cuerpo conductor, mas sin que la electricidad pudiera pasar de una región á otra.

Y al llegar aquí podemos hacer una gran división que aun para la electricidad, y sin tratar del magnetismo, constituye dos elementos distintos, á saber:

Los dieléctricos en general y el éter.

*
* *

En las teorías clásicas, tomadas en toda su pureza, ó si se quiere en toda la exageración de la hipótesis, no se consideraban más que cuerpos conductores y cuerpos aisladores.

En estos últimos hubo que reconocer diferentes grados, y para el establecimiento de las teorías podía suponerse que el espacio que rodeaba á los sistemas eléctricos era absolutamente aislador.

Más tarde se estableció la teoría de los dieléctricos, de los

cuales la teoría más perfecta, por entonces, fué la de Poisson, con sus esferillas conductoras de la electricidad, polarizadas por influencias eléctricas exteriores y esparcidas en un medio aislador.

Esta teoría fué perfeccionada por Poincaré, y transformada en la teoría de las celdillas, como transición á las hipótesis de Maswell.

De todo esto trataremos en otros cursos; ahora no hacemos más que indicaciones, por decirlo así, históricas.

El último término en esta serie de sistemas físicos, después de los cuerpos conductores y de los dieléctricos, es el éter.

Problema magno en que se han acumulado y se han agotado las hipótesis, y que, sin embargo, son necesarias al menos en las teorías mecánicas, porque para establecer una teoría relativa al éter y á la electricidad, hay que definir la electricidad y hay que definir el éter, hay que atribuirles ó hay que suponerles cualidades en que la mecánica pueda apoyarse.

Pero la lista de tales hipótesis es interminable: citemos algunas, sin pretender apurar todas las combinaciones.

***

Primero. Puede suponerse que es un conjunto de partículas infinitamente pequeñas, á cierta distancia unas de otras, y sujetas á atracciones y repulsiones dependientes de las distancias, que era en cierto modo la hipótesis de Cauchy al establecer la teoría de la luz; pero aun aquí, la hipótesis se divide en dos, ó, si se quiere, en tres.

a) Estas partículas pueden ser ponderables.

b) Pueden estar compuestas de un núcleo ponderable y de una carga eléctrica, algo así como los electrones de la moderna Física.

c) Pueden ser, por último, partículas eléctricas, ó, si se

quiere, de éter, porque aquí el éter empieza ya á confundirse con la electricidad.

Pero es claro que en este caso ya no es aplicable la dinámica clásica, porque estas masas carecen de inercia.

Y así, como hemos dicho en otra ocasión, debe considerarse como el mayor de los atrevimientos la aplicación de las fórmulas de la dinámica clásica á la dinámica de tales sistemas.

Toda la teoría de la luz de Fresner, de Cauchy y de sus discípulos, como Briot, es un ejemplo de este atrevimiento.

Y sin embargo, gracias á él, se ha fundado la admirable teoría mecánica de la luz.

Sólo puede explicarse el éxito admitiendo, como explicábamos en el curso precedente, una inercia ficticia en el éter en movimiento, que, para velocidades que no sean comparables á la de la luz, le puede asemejar á las masas ponderables, aunque tal inercia no resida en él, sino en el medio que lo rodea.

En esta primera hipótesis, por de contado se admite la acción á distancia, aunque despreciable al pasar de la esfera de actividad molecular.

Segundo. Como segunda hipótesis, puede admitirse que el éter es un flúido continuo é incomprensible.

Al precisar esta hipótesis en forma matemática, pudiera venirse á parar á la teoría de los torbellinos.

Tercero. Como para la imaginación no hay dificultades, podemos admitir que el éter es un flúido elástico y comprensible.

En su estado neutro será éter. Sí se condensa, el exceso de éter sobre la cantidad neutra, podrá representar la electricidad positiva, y si se dilata la diferencia en menos, podrá representar la electricidad negativa.

Cuarto. Podemos asemejar el éter á los dieléctricos, y suponerlo dividido en celdillas.

En el interior de cada celdilla, como si fuera un cuerpo

conductor, podrán moverse libremente las partículas eléctricas como las abejas de un panal se mueven libremente en cada una de sus celdillas exagonales, pero sin poder pasar de una celdilla á otra.

Las paredes de tales celdillas son infranqueables.

Quinto. Puede suponerse también, y esta es una hipótesis muy importante, que en el interior de cada celdilla de la hipótesis anterior existen, por una parte, partículas eléctricas, en las que, si vale la palabra, los vectores eléctricos hacen presa, y al mismo tiempo multitud de corrientes eléctricas cerradas.

Como las partículas eléctricas de nombre contrario están combinadas formando el estado neutro, y como, por otra parte, las pequeñas corrientes eléctricas tienen todas las orientaciones, el contenido de la celdilla no ejerce acción alguna sobre el mundo exterior, y cada celdilla, y por lo tanto el éter, parecen inertes, no revelando su acción por ningún fenómeno observable.

Sólo cuando masas eléctricas exteriores descomponen la electricidad neutra, y hacen presa, como antes decíamos, en los dos flúidos, polarizándolos, es cuando el vector eléctrico descubre, por decirlo de este modo, el contenido eléctrico de la celdilla.

Y asimismo, cuando el vector magnético, ya proceda de imanes, ya de corrientes, orienta las pequeñas corrientes de las celdillas y ejerce su acción sobre ellas, es cuando el vector magnético pone en evidencia, que se trata de un campo magnético también, y que, por lo tanto, como tal campo magnético puede considerarse al éter.

Sexto. Es una hipótesis importantísima esta última que vamos á señalar, y que ha dado origen á obras muy notables: nos referimos al éter giroscópico.

En dicha hipótesis, se supone que cada elemento del éter está formado por una masa etérea en movimiento rapidísimo de rotación alrededor de determinado eje.

Es como si este fiúido se hallase formado por infinitos giróscopos infinitamente pequeños.

Basta por el momento con esta indicación general, toda vez que la hipótesis merece ser estudiada detenidamente.

El que quiera anticipar este estudio puede consultar la obra titulada *La Theorie Gyrostátique ae la Lumière*, por H. Chipart.

***

Escribiría una obra importante el que clasificara y ordenara metódicamente todas las hipótesis que se han formulado respecto á la constitución del éter; nosotros no hemos tenido en las líneas precedentes esa pretensión, ni mucho menos: hemos citado en forma desordenada, y á medida que nos pasaban por la imaginación, algunos de los sistemas propuestos para explicar la naturaleza de este elemento del universo, tan necesario como hipotético.

Necesario, porque todos los autores tienen que acudir á él para explicar la luz, para explicar la electricidad y el magnetismo, para explicar el calórico y para poner en relación los elementos materiales unos con otros.

Y con ser tan necesario, tan ineludible, todo en él es hipotético, y las hipótesis se suceden, se combinan, se organizan, se transforman unas en otras, y por fin se deshacen de tal manera, que este flujo y reflujo de hipótesis y de teorías han llegado á fatigar á muchos sabios, descorazonándolos por completo, haciéndoles perder toda esperanza de conocer algo positivo respecto á la naturaleza del éter y lanzándolos en una especie de escepticismo científico que yo creo peligroso.

De este modo, y por estos caminos, ha venido á formarse lo que pudiera llamar la escuela conceptualista de Duhen y otros físicos.

Es inútil empeñarse, dicen los defensores de esta tendencia, en penetrar en el elemento del éter, ni en imaginar estructuras que le asemejen á los sistemas materiales á que estamos

acostumbrados por las enseñanzas y los estímulos diarios de los sentidos.

La imaginación debe renunciar á esta empresa, que es completamente irrealizable; no hay que buscar modelos ni artificios para figurarse cómo estará constituído el éter; tal empresa es insensata y conducirá forzosamente al desengaño y á la ruina de las teorías que en estos artificios sensualistas, si vale la palabra, se pretende formar.

A la imagen, á la representación material, al modelo, á la imitación de nuestras máquinas y organismos hay que sustituir el concepto sin forma material, y á la teoría vana la experimentación.

Cada punto del éter en un campo eléctrico ó magnético, ó las dos cosas á la par, estará definido, no por lo que ese punto ó el elemento que corresponda pueda ser en sí, que eso ni lo sabemos ni podemos saberlo, según la escuela conceptualista, sino por dos vectores, el vector eléctrico que llamaremos E, y el vector magnético que llamaremos H.

Estos dos vectores definidos para todos los puntos de un campo eléctrico ó electro-magnético, definirán dicho campo, y los vectores E y H para cada punto, definirán dicho punto, ni más ni menos que en la termodinámica, la presión y el volumen definen cada estado de un cuerpo en este orden de fenómenos; y otra variable cualquiera, por ejemplo la temperatura, ó la entropía, ó el calor interno, son funciones de dichas variables v, p.

Toda la teoría conceptualista está condensada en estas breves frases: Para cada punto el vector eléctrico y el vector magnético, y las leyes del fenómeno expresadas por ecuaciones cuya demostración se busca en el método experimental.

Así Hertz admite las ecuaciones de Maswell como buenas, porque responden á gran número de hechos ó fenómenos; pero no admite y aún declara incomprensible su demostración, es decir la del ilustre autor inglés.

De igual opinión participan algunos otros físicos y matemáticos.

Cuestión es ésta, sin embargo, que no puede tratarse á la ligera.

Ni la escuela conceptualista puede considerarse como definitiva, ni sus afirmaciones son absolutamente exactas.

Es más, huyendo de las hipótesis, de una hipótesis parten que es grandemente aventurada, á saber: Que cada punto ó cada elemento del éter de un campo electro-magnético esté siempre definido por los vectores F y H.

Esta es una hipótesis, y nada más, y el mismo Hertz señala dos casos en que la afirmación que constituye dicha hipótesis es completamente falsa.

Los dos vectores E y H no bastan para definir el estado de una barra de acero cuando hay magnetismo remanente, ni en el caso de la dispersión.

De igual opinión participa el ilustre Poincaré y otros muchos físicos.

Y aprovechando la analogía y el ejemplo que antes hemos presentado, será oportuno recordar que tampoco en todos los casos, y en absoluto, esté un cuerpo definido por la presión y el volumen en suma por dos variables.

Es más, *à priori* se comprende que es cortar las alas á la ciencia de la electricidad y del éter encerrarla en los moldes estrechos y excépticos del conceptualismo y de la mera experimentación, y es hacer á la misma experimentación, si no estéril en absoluto, grandemente mermada en su fecundidad.

Pero estos no son problemas para tratados de paso; ocasión tendremos, ó por lo menos la deseamos, de discutirlos ampliamente; y ahora volvamos, cerrando este largo paréntesis, al punto que veníamos discutiendo y que continuaremos en la conferencia próxima.

XXXVIII. — Estudio completo de una clase especial de Integrales singulares.

POR LAURO CLARIANA

INTRODUCCIÓN

Así como para la diferenciación de una función matemática cualquiera existen reglas precisas y determinadas que conducen al fin apetecido, no sucede lo mismo cuando se pretende pasar de la ecuación diferencial á la ecuación finita ó primitiva, como integral suya; pues no sólo ésta se refiere, en algunos casos, á funciones trascendentes desconocidas, sino que dentro de las conocidas puede haber muchas que convengan con la misma ecuación diferencial.

Dignas de mención son, por ejemplo, ciertas integrales que por su naturaleza propia toman el nombre de singulares, las cuales gozan de la particularidad de satisfacer á la ecuación diferencial, sin que sea posible deducirlas de su integral general por valor alguno de las constantes. Para formarse claro concepto de esta clase de integrales, interesa unir en estrecho maridaje el Análisis con la Geometría, á fin de que la teoría de las involutas y envolventes nos dé cuenta exacta, siquiera sea en los casos más sencillos, de semejante anomalía aparente.

Las integrales singulares, según los procedimientos ordinarios, se deducen, ó directamente de la integral general, ó también de la ecuación diferencial; empero, conforme al fin que se persigue en la presente Memoria, aún cabe considerar una ecuación diferencial, tal como $f(x, y, y') = o$, en su mayor grado de generalidad, siendo indeterminado el valor

y'; de suerte que si las variables x é y, satisfacen á la ecuación $\varphi(x, y) = o$, en el concepto de que la y' de la ecuación diferencial dada, ó de otra relacionada con la primera, corresponda con la y' de φ, bien cabrá considerar á esta función como integral singular de una ó de las dos ecuaciones diferenciales precitadas, conforme tendremos ocasión de probar.

Respecto al desarrollo de esta Memoria, no hemos vacilado en comenzar por ciertos conocimientos que se relacionan más ó menos directamente con el estudio de las integrales singulares, al objeto de aclarar ideas, y así llegar con buena base al estudio, en particular, de cierta clase de integrales singulares que daremos á conocer mediante un método general, uniforme y sencillo, el cual, después de aplicarlo á las ecuaciones diferenciales ordinarias, haremos extensivo á las ecuaciones entre derivadas parciales, así como también á las ecuaciones diferenciales de variables imaginarias.

Cuadro sinóptico de la materia contenida en esta Memoria.

PARTE PRIMERA..... *Preliminares..*

I. Principios analíticos dentro de lo infinitésimo.

II. Principios geométricos.

III. Eliminación de constantes y funciones arbitrarias.

IV. Líneas involutas y envolventes.

V. Estudio de la integral general deducida de la ecuación diferencial

$$f(x, y, y') = o.$$

PARTE SEGUNDA.... *Integrales singulares.. ..*

I. Integrales singulares, deducidas de la integral general ó de la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = o,$$

según los procedimientos ordinarios.

II. Procedimiento especial para obtener cierta clase de integrales singulares, deducidas de la ecuación diferencial

$$F(x, y, y') = o.$$

III. Aplicación del método anterior para obtener integrales singulares de

$$F(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n)}) = o.$$

IV. Determinación de cierta clase de integrales singulares, deducidas de la función

$$F(x, y, z, p, q) = o.$$

V. Aplicación del mismo procedimiento para determinar integrales singulares de la función

$$F(z, \omega, \omega') = o,$$

correspondiente á las cantidades complejas.

PARTE PRIMERA

I

BREVES CONSIDERACIONES ACERCA DEL ANÁLISIS INFINITESIMAL

La cantidad en su mayor grado de generalidad, conforme indican varios autores, divídese en las tres categorías siguientes:

Categoría primera.....	Cantidad infinitamente pequeña.
Idem segunda.....	Idem finita.
Idem tercera	Idem infinitamente grande. (*)

La cantidad en cada una de estas tres categorias, tiene caracteres propios que la diferencian de las otras dos; con todo, algo común existe entre ellas que permite relacionarlas entre sí: esta nota común la constituye la variabilidad, la cual, en la primera y tercera categoría, se caracteriza por los diferentes órdenes infinitesimales á que puede referirse la cantidad, á diferencia de la finita, que se aprecia por los valores cuantitativos que puede recibir.

Esto no es decir que en lo infinitésimo no entre la finitud, bien que de un modo indirecto, pues lo mismo el infinitamente pequeño que el infinitamente grande, se consideran resultado de un producto de dos factores, siendo uno finito y el otro una potencia de ciertas unidades infinitesimales expresadas generalmente por α ó A, según se refieran éstas á la primera ó tercera categoría de cantidad

Los exponentes de las potencias correspondientes á estas unidades iufinitesimales, deciden del orden de las cantidades

---

(*) Según mi humilde parecer, la expresión de *infinitamente* debiera cambiarse en *indefinidamente*, por más que el uso establezca lo primero.

infinitésimas, considerándose positivos en los infinitamente pequeños, y negativos en los infinitamente grandes, en el concepto de que se tome como única unidad fundamental α; empero si la unidad fundamental fuese A, resultaría todo lo contrario.

Además, hay que advertir que en ambos casos se supone la cantidad finita, siempre del orden cero.

Después de estas breves consideraciones acerca de la cantidad, interesa dar á conocer uno de los principios más fundamentales dentro del Cálculo infinitesimal, el cual podemos formular bajo los términos que á continuación se expresan:

Una suma de infinitamente pequeños cuyos sumandos se refieren á órdenes diferentes, se resuelve, en general, en el orden inferior.

Este principio, sin embargo, tiene su excepción cuando los signos de los sumandos no son los mismos, dando ello origen á una consecuencia de suma importancia respecto á las cantidades que difieren infinitamente poco entre sí. En efecto, supongamos, por ejemplo, la diferencia de dos infinitamente pequeños del mismo orden, tales como ω_n y ω_n'. Según principios del cálculo infinitesimal ya expuestos, cabe escribir

$$\omega_n = K\alpha^n, \quad \omega'_n = K'\alpha^n,$$

siendo K' y K cantidades finitas.

Así, pues, al restar miembro á miembro estas dos igualdades, se tiene:

$$\omega_n - \omega'_n = (K - K')\,\alpha^n.$$

Ahora bien; según la verdadera génesis de cantidad, pueden considerarse las relaciones siguientes entre K y K':

$$(1) \quad K \gtrless K' \qquad (2) \quad K = K' \qquad (3) \quad K = K' + \pi$$

siendo π un infinitamente pequeño.

En su virtud, podemos admitir que la diferencia entre dos infinitamente pequeños del mismo orden, será de igual orden según (1); cero, según (2); resolviéndose en un infinitamente pequeño de orden superior al suyo, si se atiende á la igualdad (3).

De la discusión precedente se deduce inmediatamente que una suma algebràica de varios infinitésimos, no siempre se resuelve en el orden inferior de los sumandos. Además, no cabe dudar que de los tres casos considerados el más importante es el tercero, por ser el origen de las cantidades que difieren infinitamente poco entre sí; palanca la más poderosa del análisis, pues cuando en los cálculos entran dichas cantidades, pueden sustituirse unas por otras, tanto en relaciones de cociente como en sumas de infinitamente pequeños, con tal que en este último caso se conserve el mismo signo en todos los sumandos.

Estas sencillas consideraciones acerca del analisis infinitesimal, forman la base de la Matemática superior, siendo suficientes para darnos una explicación satisfactoria de todas las particularidades que pueden ocurrir al buscar las integrales singulares que contiene una ecuación diferencial, conforme al método incompleto de Lagrange, que tendremos ocasión en dar á conocer más adelante.

II

BREVES CONSIDERACIONES ACERCA DE LA GEOMETRÍA INFINITESIMAL

La Matemática superior se apoya en dos métodos que bien pueden considerarse como los más generales; el método de los límites y el método de los infinitésimos; y si bien ambos pueden utilizarse para resolver los problemas de la alta Matemática, parece ser, sin embargo, que se concede

hoy más importancia al segundo que al primero, por cuanto los infinitamente pequeños, en particular, permiten, mediante sus diferentes órdenes, apreciar mejor todos los elementos que entran en el problema, alcanzando al fin, y por vía de división, la finitud, en general, que es el principal objetivo del matemático.

Así, pues, según el método infinitesimal, resulta que la tangente en un punto de una curva, se sustituye por el elemento de la misma que pasa por dicho punto, puesto que se trata de dos rectas que difieren infinitamente poco entre sí, respecto á su dirección.

Este nuevo concepto de tangente permite considerar la curva dada como un multilátero, al unir por rectas varios puntos infinitamente próximos de la misma, constituyendo cada una de dichas rectas, como es bien sabido, un elemento de la curva.

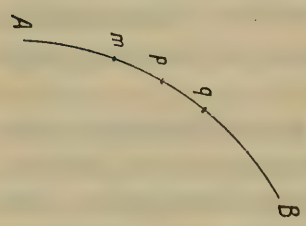


Figura 1.ª

Es de notar que cada uno de estos elementos sustituye al arco que le corresponde, puesto que la diferencia entre la cuerda y el arco, dentro de lo infinitésimo, se resuelve en el cubo del orden de dicho arco, por lo cual resultan dos cantidades que difieren infinitamente poco entre sí, permitiendo, según los principios que preceden, la sustitución de una cantidad por otra.

Sin duda que esos cambios facilitan mucho el planteo de los problemas que se basan en la ley de continuidad, sin que por ello, al llegar á la finitud, sufra el resultado alteración alguna respecto al que se obtendría solucionando el problema por otro procedimiento cualquiera.

Estas consideraciones generales nos permiten adelantar algunos conocimientos más acerca de la Geometría infinitesimal.

Sean, por ejemplo, $x_0 y_0$ las coordenadas del punto m de la curva plana AB, correspondiente á la función $f(x, y) = o$. Si los puntos m, p, q, se hallan á distancias infinitamente próximas, se tendrá que las coordenadas del punto p podrán expresarse por

$$x_1 = x_0 + dx_0 \quad » \quad y_1 = y_0 + dy_0.$$

Así, las del punto q, por

$$x_2 = x_1 + dx_1 = x_0 + 2\,dx_0 + dx^2{}_0$$
$$y_2 = y_1 + dy_1 = y_0 + 2\,dy_0 + dy^2{}_0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Y, en general, para el punto x_n, y_n, cabrá escribir, por inducción, las fórmulas simbólicas siguientes:

$$x_n = x_0 (1 + d)^n, \qquad y_n = y_0 (1 + d)^n.$$

Los puntos m, p, q..... toman el nombre de puntos consecutivos de la curva AB.

Bien podríamos afirmar que la idea que acabamos de exponer constituye la base del estudio correspondiente al contacto de líneas.

En efecto, pues si dos líneas tienen dos puntos consecutivos comunes, se dice que son tangentes entre sí, resultando un contacto de primer orden; si tienen tres, el contacto es de segundo orden, siendo las líneas osculatrices; si tienen cuatro, el contacto es de tercer orden, siendo en este último caso las líneas sobre-osculatrices. Y, en general, si el contacto es del orden n, las dos líneas tendrán $n + 1$, puntos consecutivos comunes.

Según las fórmulas simbólicas halladas, resulta que dos líneas planas tienen un contacto de primer orden en el punto común $x_0 = \xi$, $y_0 = \eta_0$, si se verifica

$$dx_0 = d\xi_0, \; dy_0 = d\eta_0.$$

Será de segundo, si se tiene además

$$d^2 x_0 = d^2 \xi_0, \; dy^2_0 = d^2 \eta_0;$$

así continuando.

Se comprende que si en vez de tomar diferenciales consideráramos las derivadas de las dos funciones $y = F(x)$, $y = \psi(x)$, representantes de las dos líneas dadas, claro está que en el punto común $x_0 = \xi_0$, $y_0 = \eta_0$, para que existiera un contacto de orden n sería preciso que las derivadas respectivas de las dos funciones fuesen iguales hasta las del orden enésimo.

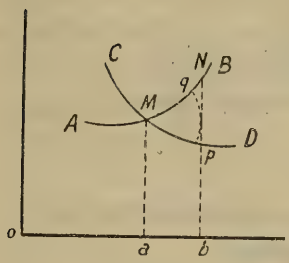


Figura 2.ª

La ley de contactos cabe manifestarla también de un modo gráfico, debiendo sustituir en este caso por grado de aproximación entre las dos líneas, lo que se llama orden de contacto.

En efecto, sean las dos líneas AB y CD representantes de las dos funciones $y = F(x)$, $y = f(x)$. Dichas líneas se cortan en el punto M; si suponemos ahora que ab representa un incremento infinitamente pequeño de primer orden dado al valor $x = o\,a$, al levantar por b la ordenada, cortará, en general, á las dos líneas AB y CD, respectivamente, en los puntos N y p; y en este concepto podremos escribir la relación siguiente: $\frac{Np}{ab}$; de suerte que si se resuelve esta relación en un infinitamente pequeño del orden n, el contacto de las dos líneas será del orden n; todo lo cual indica que la porción de ordenada Np, que separa á las dos líneas, se resuelve en un infinitamente pequeño del orden $n + 1$, siendo éste el grado de aproximación de las líneas dentro de lo infinitésimo.

En el caso de que la ordenada trazada por el punto b, no encontrara, por ejemplo, á la línea $A\,B$, efecto de la situación de los ejes, quedaría salvada la dificultad, trazando un arco de círculo, tal como $p\,q$, siendo M su centro y $M\,p$ el radio, correspondiente á un infinitamente pequeño de primer orden; así, pues, la relación $\frac{p\,q}{Mp}$, sustituirá á la anterior $\frac{N\,p}{a\,b}$, resultando idénticas consecuencias para la ley de contactos.

Terminaremos estas consideraciones geométricas dando á

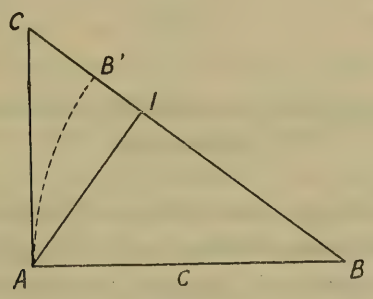


Figura 3.ª

conocer una propiedad notable respecto á los triángulos infinitesimales, que tendrá luego su aplicación al estudiar las líneas envolventes.

Supongamos el triángulo $A\,B\,C$, siendo c y B, infinitamente pequeños de primer orden; si desde A se traza la perpendicular $A\,I$ á $C\,B$, y con el radio $B\,A$, el arco $A\,B'$ de circunferencia, según la Geometría, se tiene:

$$A\,C = c \operatorname{tg} B \quad » \quad A\,I = c \operatorname{sen} B \quad » \quad C\,I = c \operatorname{sen} B \operatorname{tg} B,$$

$$C\,B - A\,B = \frac{c}{\cos B} - c = \frac{2c \operatorname{sen}^2 \frac{B}{2}}{\cos B} = C\,B';$$

de donde resulta que $A\ C$ y $A\ I$ son infinitamente pequeños de segundo orden, resolviéndose $I\ C$ y $C\ B'$ en otros de tercero.

Así, pues, si no se atiende más que á los infinitamente pequeños de primer orden, podrá suponerse que el punto A coincida con C, y además $A\ B = C\ B$.

Sin duda que estas ligeras consideraciones que acabamos de apuntar acerca de la Geometría infinitesimal serán suficientes para emprender luego, con buena base, el estudio de las líneas envolventes, como representación gráfica de las integrales singulares.

III

ELIMINACIÓN DE CONSTANTES Y DE FUNCIONES ARBITRARIAS

La eliminación de constantes se relaciona directamente con el procedimiento que sirve para deducir de la integral, su ecuación diferencial; empero, para nosotros, tiene más alcance este punto; como quiera que el método especial que expondremos para obtener cierta clase de integrales singulares, se funda en dar á la ecuación diferencial toda la generalización posible, considerándola como si se tratara de una nueva integral, al objeto de deducir de ella una segunda ecuación diferencial que podrá ó no identificarse con la primera, según los casos, pero que con seguridad podremos afirmar que la integral singular que se encuentre lo será siempre de la última ecuación diferencial hallada.

Esta idea que adelantamos sobre nuestro método, indica la necesidad que hay de tratar, aunque no sea más que de un modo breve, la teoría de la eliminación de constantes antes de llegar á la parte principal de esta Memoria.

Cuando en una función, además de las variables, entran

diferentes constantes arbitrarias, se puede deducir una ecuación diferencial á la cual satisfagan las variables con independencia de las constantes.

En efecto, sea

$$f(x, y, c) = o, \qquad (1)$$

representando c una constante arbitraria.

Al tomar la diferencial de esta función resulta;

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = o. \qquad (2)$$

Si eliminamos ahora c entre (1) y (2), se obtiene una ecuación diferencial de primer orden, sin constante alguna, teniendo dicha ecuación diferencial por integral á (1).

Si hubiese muchas constantes, tendríamos que diferenciar ó derivar la función primitiva tantas veces como constantes hubiera, al objeto de alcanzar la eliminación completa de todas éstas; de suerte, que si n, fuese su número, la ecuación resultante de la eliminación de todas las constantes, sería una ecuación diferencial del orden n.

Por último, consideremos una función en que el número de variables independientes supere al de constantes.

Sea, por ejemplo,

$$f(x, y, \ldots\ldots z, a, b) = o. \qquad (3)$$

Al derivar, se obtiene

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial x} = o \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial z}{\partial y} = o \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Empero, como en la función dada, sólo hay dos constantes, bastará considerar dos ecuaciones cualesquiera de (4), junto con (3), para alcanzar la eliminación de todas las constantes; de ahí se infiere una cierta indeterminación, pues si z depende de n variables, podrán obtenerse tantas ecuaciones entre derivadas parciales como combinaciones quepan hacer con n, elementos tomados de dos en dos, esto es:

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}.$$

Así podríamos extender las consideraciones anteriores para el caso de que aumentaran las constantes arbitrarias, siendo siempre su número inferior al de variables independientes.

ELIMINACIÓN DE FUNCIONES ARBITRARIAS

La eliminación de funciones arbitrarias guarda íntima relación con la eliminación de constantes.

Luego, para proceder á la eliminación de dichas funciones arbitrarias, bastará derivar sucesivamente, á fin de poder alcanzar una ecuación entre derivadas parciales, independiente de toda función arbitraria, asi como de sus derivadas.

A este fin, si se considera la función

$$(1) \qquad f[x, y, z\, \varphi(\theta)] = o,$$

siendo φ la función arbitraria y θ una función, en general, dependiente de todas las variables, al derivar, se tiene

$$(2) \qquad \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \varphi(\theta)}\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) = o$$

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi(\theta)}\frac{\partial \varphi(\theta)}{\partial \theta}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) = o.$$

Entre (1), (2) y (3), se puede eliminar

$$\varphi(\theta) \text{ y } \frac{d\varphi(\theta)}{d\theta},$$

con lo cual resultará una ecuación, tal como

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = o,$$

independiente de la función arbitraria y de su derivada.

Así, generalizando el problema, fácilmente se comprende que si la función primitiva contuviera n funciones arbitrarias, teniendo la forma

$$f(x, y, z\, \varphi_1(\theta)\, \varphi_2(\theta_2) \ldots\ldots \varphi_n(\theta_n)) = o,$$

el número de derivaciones que deberían obtenerse para alcanzar la eliminación completa de las n funciones arbitrarias, junto con sus derivadas, vendría expresado por la fórmula siguiente:

$m > 2n - 2$, siendo m el número de derivaciones.

IV

TEORÍA GENERAL DE LAS ENVOLVENTES

Si consideramos una curva plana $f(x, y, \alpha) = o$, encerrando un parámetro variable α; al dar valores particulares infinitamente próximos á α, se obtendrá una serie de líneas que se irán cortando sucesivamente, dando lugar, al unir respectivamente los puntos de intersección, á una nueva línea llamada envolvente de todas las anteriores, tomando luego el nombre de involutas cada una de las primeras que han dado lugar á esta última.

Según esta definición, cabe expresar analíticamente dicha envolvente.

En efecto, sea $f(x, y, c_0) = o$ la expresión de una de las líneas involutas por el valor particular del parámetro c_0: al incrementar este parámetro, tendremos

$$f(x, y, c_0 + \Delta c_0) = o$$

esta función representa otra línea próxima á la primera.

Si formamos, pues, un sistema con las dos funciones halladas, éste expresará el punto de intersección, en general, de las dos líneas representantes de las dos funciones anteriores. Si de nuevo incrementamos la última constante $c_0 + \Delta c_0$, pasaremos de la segunda línea á la tercera, determinando otro punto de intersección, así siguiendo.

Así, pues, al generalizar las funciones anteriores, considerando á c_0 como una variable indeterminada expresada por c, y pasando luego á lo infinitésimo, dará lugar á la serie de sistemas siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} f(x, y, c) = o \\ f(x, y, c + \Delta c) = o \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{r} f(x, y, c) = o \\ f(x, y, c + \Delta c) - f(x, y, c) = o \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x, y, c) = o \\ \Delta_c f(x, y, c) = o \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} f(x, y, c) = o \\ \dfrac{\Delta_c f(x, y, c)}{\Delta c} = o \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} f(x, y, c) = o \\ f'_c(x, y, c) = o \end{array}\right\}$$

Este último sistema es el que se refiere á la ecuación de la envolvente; de modo, que esto nos dice que debe hallarse la derivada de la función respecto á c, igualando el resultado á cero, para deducir de esta última igualdad el valor de c, que, en general, será una función en x é y, tal como $c = \varphi(x, y)$; valor que, sustituído en $f(x, y, c) = o$, transformará esta función en la siguiente: $f[x, y, \varphi(x, y)] = o$, siendo ésta la que corresponde, por fin, á la envolvente.

Por consideraciones, tanto geométricas como analíticas, se

prueba que la tangente en un punto de la envolvente corresponde con la de la involuta que pasa por dicho punto.

Según la construcción geométrica, si c_0, c_1, c_2 son tres posiciones consecutivas de la involuta, los puntos α_0, α_1 son de la envolvente, correspondiendo dicho elemento de curva con el de la involuta c_1, de donde resulta que la tangente en dicho elemento, es común á la involuta y á la envolvente.

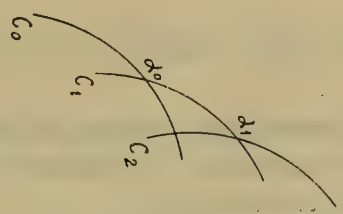


Figura 4.ª

Si por otra parte nos refiriéramos á la parte analítica, tendríamos para la tangente á la involuta, la ecuación diferencial

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = o. \qquad (1)$$

Ahora bien, para la envolvente

$$f[x, y, \varphi\,(x\,y)] = o,$$

la expresión de la tangente sería

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\,\frac{dy}{dx}\right) = o;$$

empero como se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial c} = o,$$

en definitiva, se deduce

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = o;$$

resultado exactamente igual á (1), lo cual nos manifiesta que la tangente á la involuta y á la envolvente en el punto considerado, es la misma.

***

A este punto interesa dar á conocer las relaciones íntimas que existen entre las teorías de la eliminación de constantes y la de las líneas envolventes.

Para ello, supongamos la función

$$f(x, y, \alpha) = o, \qquad (1)$$

en el concepto de que x, y y α sean variables.

Al diferenciar, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha}d\alpha = o.$$

Si se considera el último término nulo, se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = o. \qquad (2)$$

Así, pues, al eliminar α entre (1) y (2), se obtiene una ecuación diferencial, independiente de α, la cual debe quedar satisfecha por todas las curvas de la serie, en el supuesto de que el último término nulo proceda de $d\alpha = o$, siendo este resultado el que corresponde á la eliminación de la constante.

Empero, si el término nulo procede de

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = o, \qquad (3)$$

entonces, al eliminar α entre (1) y (3), se obtiene, por ejemplo, $F(x, y) = o$, dando origen esta expresión á la envolvente, la cual goza de la propiedad de satisfacer también á la ecuación diferencial anterior. En efecto, al diferenciar la función $f(x, y, \alpha) = o$, resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = o,$$

empero, como por hipótesis se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = o,$$

se deduce

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = o.$$

Así, el sistema

$$f(x, y, \alpha) = o, \quad \frac{\partial f}{\partial \alpha} = o,$$

queda sustituído por el siguiente:

$$f(x, y, \alpha) = o, \quad \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = o,$$

el cual no es más que el primitivo (1) y (2), debiendo producir, por consiguiente, la misma ecuación diferencial después de eliminar α.

Sin embargo, aunque en ambos casos la ecuación diferencial es la misma, en el primero, la expresión $\frac{dy}{dx}$ indica que

la tangente se refiere á la involnta; y en el segundo, á la envolvente.

Para apreciar debidamente la importancia de la teoría respecto á las líneas envolventes, pondremos algunos ejemplos:

1.° Sea la ecuación primitiva

$$f(x, y, \alpha) = y + \alpha x + \alpha^2 = o, \qquad (1)$$

luego al considerar

$$\frac{df}{d\alpha} = x + 2\alpha = o, \qquad (2)$$

y al eliminar α entre (1) y (2), se obtiene

$$x^2 - 4y = o.$$

De este resultado se infiere que la envolvente de las diferentes rectas expresadas por (1) es una parábola que tiene su vértice en el origen, y cuyo eje coincide con el de y.

2.° La importancia de esta teoría sube de punto cuando aumenta el número de parámetros en la función primitiva, y para demostrarlo supondremos el ejemplo siguiente:

$$\left.\begin{array}{ll} (3) & f(x, y, \alpha, c) = o \\ (4) & \varphi(\alpha, c) = o \end{array}\right\}.$$

En este caso, para hallar la envolvente pueden seguirse dos procedimientos distintos:

1.° Eliminar uno de los dos parámetros, á fin de que el problema quede reducido al anterior.

2.° Diferenciar las dos funciones anteriores, considerando, por ejemplo, c función de α.

Según este segundo procedimiento, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial f}{\partial c} dc = o,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial c} dc = o,$$

de cuyo sistema se deduce fácilmente la Jacobiana.

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial \alpha} & \frac{\partial f}{\partial c} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} & \frac{\partial \varphi}{\partial c} \end{vmatrix} = o.$$

Así, pues, al eliminar α y c entre (3), (4) y (5), se obtie-

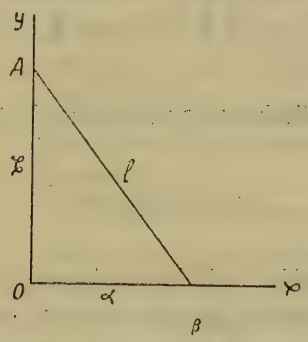


Figura 5.ª

ne una sola ecuación en x é y, que representará la envolvente.

Apliquemos estas consideraciones al caso siguiente:

Sea una recta AB de longitud constante l, moviéndose sus extremos sobre los ejes coordenados.

Según la Geometría analítica, tendremos

$$\frac{x}{\alpha} + \frac{y}{\beta} = 1, (A) \qquad \alpha^2 + \beta^2 = l^2 \ (B).$$

La Jacobiana (5), se reduce á

$$\begin{vmatrix} -\frac{x}{\alpha^2}, & -\frac{y}{\beta^2} \\ 2\alpha, & 2\beta \end{vmatrix} = o, \text{ ó sea } \frac{\beta x}{\alpha^2} = \frac{\alpha y}{\beta^2};$$

de donde

$$\frac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{1}{3}}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

luego, en virtud de (B), se tiene

$$\alpha = \frac{l x^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{»} \quad \beta = \frac{l y^{\frac{1}{3}}}{\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Por fin, al sustituir estos valores en (A), se encuentra

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = l^{\frac{2}{3}},$$

siendo esta ecuación la de la envolvente.

Conforme advierten algunos autores, para que haya envolvente es preciso que dos curvas consecutivas se encuentren, de modo que hay que considerar á lo menos dos valores para α en la función

$$f(x, y, \alpha) = o.$$

Mas suponiendo dos involutas infinitamente próximas, siendo la ecuación en α de segundo grado, deben considerarse iguales las raíces de la misma para que resulte un elemento común con la envolvente.

Si aplicamos estas consideraciones al ejemplo primero

$$y + \alpha x + \alpha^2 = o,$$

se obtiene

$$\alpha = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 - 4y}}{2},$$

de donde, para que las raíces sean iguales, debe suponerse,

$$x^2 - 4y = o.$$

Resultando así inmediatamente la misma ecuación de la parábola hallada anteriormente.

Hay que advertir, sin embargo, que las condiciones que hemos indicado para la determinación de la envolvente pueden considerarse necesarias, pero no suficientes, como vamos á probar mediante los principios analíticos y geométricos dentro de lo infinitésimo, expuestos ya anteriormente.

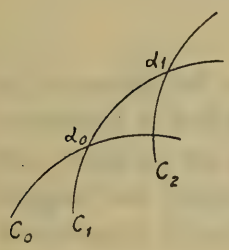


Figura 6.ª

Fijémonos ante todo en los dos conceptos en que se puede considerar la envolvente de varias líneas que van cortándose sucesivamente.

Sean las líneas G_0 G_1 G_2 como involutas infinitamente próximas dos á dos. Según lo que precede, el elemento $\alpha_0\alpha_1$, lo mismo puede considerarse de la curva involuta G_1 como de la envolvente, empero para demostrar mejor ciertas anomalías, aunque aparentes, que se operan en el estudio de la envolvente, entendemos que sería útil considerar la formación de ésta, tal como indica la segunda figura adjunta, esto es, considerando el elemento envolvente expresado por la recta nm, ó sea por la porción de tangente común á las dos involutas G_0G_1 infinitamente próximas; esto equivaldría á suponer que el punto α_0 se trasladará á α'_0, por medio de una perpendicular trazada desde α_0 á nm, y en el con

cepto de que los dos elementos de curvas involutas $n\alpha_0$ y $m\alpha_0$ se sustituyeran por $n\alpha'_0$ y $m\alpha'_0$, respectivamente, todo lo cual será posible cuando $\alpha_0\alpha'_0$, se resuelva en un infinitamente pequeño, á lo menos, de segundo orden, siendo $n\alpha'_0$ y $m\alpha'_0$ y los ángulos $\alpha_0 n\alpha'_0$ y $\alpha_0 m\alpha'_0$ infinitamente pequeños de primero, conforme se demostró ya al estudiar un triángulo infinitesimal bajo las mismas condiciones.

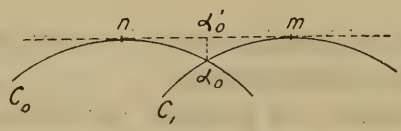


Figura 7.ª

Esta conclusión equivale á considerar los elementos de las involutas consecutivas, coincidentes con el correspondiente de la envolvente; y por ende, que las dos raíces α del caso último estudiado, siendo iguales tengan una tangente común para las dos involutas consecutivas en el punto considerado.

Sin embargo, no siempre que se tenga una línea como resultado de la unión de puntos comunes de involutas, que tengan dos á dos tangentes comunes, se podrá afirmar que sea una envolvente de ellas, pues si al formar el triángulo $n\alpha_0 m$ no resulta $\alpha_0\alpha'_0$ de un orden superior á los lados $n\alpha_0$ y $m\alpha_0$, no podrá considerarse dicha línea como envolvente de las involutas dadas.

Para formarse cargo de esta conclusión, será suficiente atender al ejemplo siguiente.

Sea la ecuación de la circunferencia

$$f(x, y, \alpha) = (x - \alpha)^2 + y^2 - r^2 = o. \qquad (1)$$

Siguiendo el procedimiento general para hallar la envolvente de las diferentes circunferencias que resultan al variar

el parámetro α, teniendo todas el mismo radio y los centros en diferentes puntos del eje x, resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = x - \alpha = o;$$

de donde, al sustituir este valor en (1), se obtiene

$$y^2 - r^2 = o. \qquad (a)$$

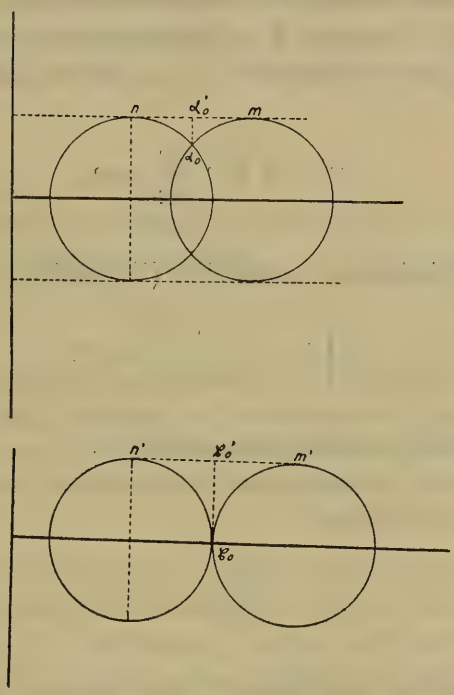


Figura 8.ª

Esta es la ecuación de la envolvente, resolviéndose en dos rectas paralelas al eje x, y á las distancias r y $-r$ del origen Mas si nos fijamos en la disposición de la segunda figura adjunta, cabe considerar también el eje x, ó sea $y = o$, como una línea que une puntos comunes de dos en dos las involutas, que tienen tangentes comunes, y á pesar de ello no se

puede considerar envolvente, ni que un punto de ella, tal como C_0, vaya á coincidir con C'_0, pues el triángulo $n' C_0 m'$, no se halla, en este caso, en las mismas condiciones que el $n \alpha_0 m$ de la figura anterior, no sólo porque las tangentes á las involutas y á la envolvente no pueden coincidir, sino porque la perpendicular $C_0 C'_0$ á la tangente común $n' m'$ á las dos involutas correspondientes, resulta del mismo orden cero, que los lados $n'C_0$ y $m'C_0$, condición contraria á la supuesta para puntos de la verdadera envolvente.

Además, si pasamos á la determinación de la ecuación diferencial que corresponde á (1), al derivar ésta, según x, se tiene

$$(x - \alpha) + y \frac{dy}{dx} = o, \qquad (2)$$

de donde eliminando α entre (1) y (2), resulta

$$y^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = r^2, \qquad (3)$$

siendo esta la ecuación diferencial de (1).

Ahora bien, si derivamos la ecuación de la envolvente hallada (a), se obtiene

$$y \frac{dy}{dx} = o.$$

Ecuación que queda satisfecha bajo dos conceptos diferentes, esto es,

$$\text{siendo } y = o \quad » \quad ó \quad \frac{dy}{dx} = o.$$

Si sustituímos el primer valor en (3), fácilmente se comprende que no satisface á dicha ecuación, confirmando este resultado analítico el obtenido ya por la Geometría, ó sea,

que $y = o$, no se puede considerar como envolvente de las circunferencias, por más que satisfaga dicho valor á la derivada de la ecuación de la envolvente.

En cambio, el segundo valor $\frac{dy}{dx} = o$, sustituído en (3), da

$$y^2 = r^2;$$

expresión que corresponde con la misma ecuación de la verdadera envolvente hallada.

***

Si se tratara, por último, de la envolvente de una serie de superficies dadas por la fuución

$$F(x, y, z, \alpha) = o,$$

siendo α un parámetro variable, para determinar dicha envolvente podría seguirse un procedimiento completamente análogo al anterior. Así, pues, si consideramos el sistema

$$F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) = o, \quad F(x, y, z, \alpha) = o,$$

representante de la línea de intersección de las dos superficies, correspondientes á cada una de las funciones anteriores, al pasar á lo infinitésimo, la línea que resulta toma el nombre de característica, siendo ésta una de las generatrices de la superficie envolvente.

Para la determinación de la ecuación de esta superficie transformaremos, pues, el sistema anterior del modo que á continuación se indica:

$$\left.\begin{aligned} \frac{F(x, y, z, \alpha + \Delta\alpha) - F(x, y, z, \alpha)}{\Delta\alpha} &= o \\ F(x, y, z, \alpha) &= o \end{aligned}\right\},$$

el cual, pasando á lo infinitésimo, da:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= o \\ F(x, y, z, \alpha) &= o \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} &(2 \\ &(1 \end{aligned}$$

Luego al despejar α de (2), se obtiene

$$\alpha = f(x, y, z);$$

y, por fin, eliminando α entre (1) y (2), resulta:

$$F[x, y, z, \quad f(x, y, z,)] = o. \qquad (3)$$

Esta es la ecuación de la superficie envolvente de toda la serie de superficies dadas por la función (1).

La superficie envolvente es tangente á la superficie involuta que corresponde al punto de la característica que se considera.

Para demostrarlo, es suficiente tomar, respectivamente, las derivadas de (1) y (3), de donde resulta:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} &= o \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} &= o \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) &= o \\ \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial f}\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) &= o \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Pero (4) y (5) se correponden por ser

$$\frac{\partial F}{\partial f} = \frac{\partial F}{\partial \alpha} = o. \qquad (6)$$

Luego el plano tangente en un punto de la característica respecto á una involuta es el mismo que el que corresponde á la superficie envolvente en dicho punto.

De lo que precede se deduce, como consecuencia importantante, que si se elimina α entre (1) y (4), se obtiene una ecuación diferencial referente á una cualquiera de la serie de superficies involutas, la cual conviene también con la de la superficie envolvente, puesto que las ecuaciones (5), se reducen á (4), en virtud de (6).

Así, pues, el sistema (1) y (5), que corresponde á la superficie envolvente, queda reducido al mismo anterior (1) y (4), debiendo resultar la misma ecuación diferencial en ambos casos.

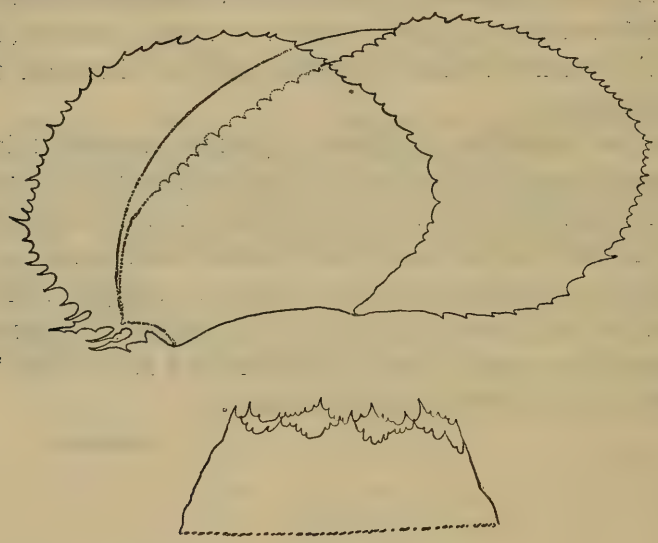
En las superficies envolventes pueden presentarse las mismas consideraciones que en las envolventes de líneas planas estudiadas, para lo cual bastará cortar debidamente por un plano las dos superficies involutas consecutivas, junto con la envolvente, para que se origine un triángulo mixtilíneo, de cuyo estudio, dentro de lo infinitésimo, se puede deducir si la superficie que se considera es ó no una envolvente de las superficies involutas dadas.

(Continuará)

XXXIX.—Nota sobre la *Scapania Casaresana* St. y las Scapanias españolas.

Por A. Casares Gil.

Scapania Casaresana St. *n. sp.*



«Dioica, mediocris, olivacea vel flavo-rufescens. *Caulis* ad 3 cm. longus, fuscus, validus, simplex vel pauciramosus, ramis parvifoliis. *Folia caulina* contigua recte patula, plus minus decurva, in plano longe elliptica, 2 mm. longa, 1,12 mm. lata, brevi basi inserta, apice late rotundata, ubique regulariter denticulata, dentibus pluricelluraribus; carina substricta 0,7 mm. longa. *Lobulus* maximus, ovatus, apice late rotundatus, infernevalde ampliatus et folii marginem late superans, ceterum similiter dentatus, ipsa basi qui-

dem grosse spinosus, spinis denticulatis. *Cellulè* supere 18 μ teneræ, mediæ 18 × 27 μ trigonis parvis, basales 27 × 36 μ trigonis maximis. *Perianthia* magna 4 mm. longa, compressa decurva, in plano optime angusteque infundibulata, *ore* regulariter *lobato, lobulis triangulatis, acutis minute dentatis.*

Hab. Hispania, Madeira» (1).

La descripción que da el abate *Boulay* de la *Scapania resupinata* (2) pudiera corresponder, forzándola un poco, á la *S. Casaresana,* pero lo mismo sucede á la *S. gracilis, S. nimbosa* y alguna otra. Además, el nombre de *S. resupinata Dum.* se ha hecho sinónimo de la *S. dentata* del mismo *Dumortier,* y la descripción de la *S. resupinata,* según Boulay, no concuerda exactamente con los caracteres de la *S. dentata.* Y aún más; la denominación de *S. resupinata* se aplicó también por otros autores á la *S. aspera, S. undulata,* y á variedades de la *S. nemorosa* y *S. œquiloba,* reinando tal confusión en este punto que es mejor abandonar el nombre de *S. resupinata* y adoptar su sinónimo *S. dentata Dum.,* que no se presta á tantas confusiones. Esto es lo que hace el sabio hepaticólogo F. Stephani en la revisión á que ha sometido últimamente al género Scapania.

Por ahora no se encontró la *S. Casaresana* más que en Galicia y en la Isla de Madera. Por lo que dicho queda, es muy posible que su distribución sea más extensa y que se halle en otras localidades del N. de España y que también crezca en Francia, pasando confundida con otras especies y englobadas todas en la *S. resupinata Dum.,* según el concepto de los bryólogos franceses, á partir principalmente de los trabajos de Douin (3). La primera vez se la remití al eminente bryólogo F. Stephani con otras hepáticas del Valle

---

(1) *F. Stephani: Species hepaticarum.* Tomo IV (en publicación), página 136.

(2) *L'Abbé Boulay: Muscinées de la France* II parte. Hepatiques.

(3) Rev. bryol., 1901.—Núm. 2.

de Moraña (Pontevedra). Este sabio la estudió y la ha dado el nombre que lleva en honor mío.

Puede decirse que las Scapanias españolas son del Noroeste de España; algunas se extienden por el Norte de la Península hacia el Este; una sola también hacia el Mediodía (*S. nemorosa Dum.* (1), y por excepción la *S. aspera Bernet*, no se ha citado hasta la fecha más que en Mallorca.

Según los datos que hoy tenemos de las especies españolas, pueden distribuirse del siguiente modo:

Scapania compacta (Roth.) Dum. Galicia, Navarra (2).
» *uliginosa* (Sw.) Dum. Galicia.
» *curta* (Mart.) Dum. Galicia (3).
» *aspera* Bernet. Mallorca (4).
» *undulata* (L.) Dum. Galicia.
» *nemorosa* (Mich.) Dum. Galicia, Navarra, Cataluña y en las sierras del centro y Sur.
» *æquiloba* (Schwægr.) Dum. Galicia y Cataluña.
» *Casaresana* St. Galicia.

Aunque las Scapanias, como la mayor parte de las hepáticas, son bastante exigentes en condiciones de *habitat*, limitándose muchas veces á un pequeño espacio en el fondo de un barranco sin aparecer en otros sitios cercanos, al parecer en iguales condiciones, sería muy extraño que no creciesen en Asturias, Santander y provincias Vascongadas. Si no se citan en estos sitios, es seguramente porque no se las ha buscado.

---

(1) «Habita en sitios sombríos y húmedos de varias provincias, y principalmente de las septentrionales... Andalucía...» Colmeiro: Enum. y revis. de las plantas de la Peníns. Hispano-Lusitánica.

(2) Lacoizqueta: Catál. de las plantas del Valle de Vertizarana.

(3) Citada por Colmeiro l. c. (Non vide).

(4) Nicholson: Contrib. to a list of the mosses and hepat. of Mallorca. (Rev. bryol. 1907.—Núm. 1).

XL.—Viaje de estudio á la Guinea española.

Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales.

Por Gustavo Pittaluga

(Continuación.)

III

En los momentos que preceden ó acompañan la partición del cuerpo citoplásmico, en el proceso esquizogónico de los *Trypanosoma*, se aprecia claramente la independencia del corpúsculo basilar del flagelo y del aparato nuclear en su conjunto, esto es del trofo - y del kineto - nucleo. Entonces acontecen, en ciertas formas, los fenómenos de autogamia. La masa nuclear se desdobla, y el blefaroplasto aparece todavía casi totalmente único, ó se hace apenas visible su diferenciación en dos pequeñas masas cromáticas, una de las cuales poco después se acerca al centro, y por fin se funde con la masa nuclear anterior. La masa nuclear posterior, que resultaba del desdoblamiento de la primitiva, se resuelve entretanto en pequeños cuerpos cromáticos, constituye un residuo cromidial y se esparce en la totalidad del citoplasma, verificándose así una verdadera reducción nuclear, á consecuencia de la cual no sabemos si los materiales cromáticos expulsados serán destinados á sufrir una verdadera excreción ó bien si quedan almacenados en el citoplasma como acontece en los Amébidos.

A los hechos ahora apuntados se deben en parte aquellas formas que han sido descritas como «Trypanosomas sin

blefaroplasto» *(Blepharoplastlöse)* (*); se trata, pues, ciertamente, de formas que atraviesan ese período evolutivo, en que el Blefaroplasto ó Kinetonúcleo se ha fundido con la masa nuclear.

Las relaciones del flagelo con el blefaroplasto tienen gran importancia en la morfologia de la célula. Con observaciones detenidas se logra, en efecto, convencerse de que á la terminación del borde de la membrana ondulante, en las proximidades inmediatas del blefaroplasto, existe una especie de pequeña bola, un cuerpo cromático independiente de todo punto del blefaroplasto mismo. Trátase, pues, de un aparato procedente de una diferenciación del protoplasma sin verdaderas relaciones de homologia con los materiales cromáticos que constituyen la masa del blefaroplasto y que desde luego son de origen nuclear. Porqué este microscópico aparato locomotor ofrece la reacción colorante de la cromatina, es difícil averiguar en el actual estado de nuestros conocimientos acerca de la química celular. Pero cabe todavía preguntarse si efectivamente esta reacción á las substancias colorantes es idéntica á la de la cromatina del trofonúcleo y del kinetonúcleo, ó bien si se trata de un tono parecido debido en realidad á impregnación acidófila prevalente.

De estas cuestiones, que se relacionan con el aparato locomotor de los protozoos y de los protistas en general, se han ocupado recientemente varios autores, entre ellos YAMAMOTO (**) en el Instituto de Medicina tropical y naval de Hambourg, el cual ha comunicado un procedimiento nuevo de coloración que ha dado resultados interesantes, y que en comparación con los métodos de LOEFFLER para la coloración de los flagelos, de GOLGI, de VAN ERMENGHEM, de ZETTNOW,

---

(*) V. WERBITZKI-*Centr. f. Bakt.*, 1910, Febrero, págs. 303, 315.

(**) Ueber den Lokomotionsapparat der Protistenzellen. Von DR. JUNIJ YAMAMOTO (de la Univers. de Kioto). Centr. f. Bakt., Bd, 53, H. 1., 23 Diciembre 1909, pág. 38).

y con el clásico de la hematoxilina férrica de HEIDENHEIN, revela algunas particularidades de estructura dignas de nota.

El procedimiento de YAMAMOTO consiste:

1. En recoger con una asa de platino una pequeña cantidad de clara de huevo muy diluída, extenderla sobre un cubre-objetos y mezclarla con el material de estudio en una capa muy delgada. Los preparados así hechos se dejan secar al aire y se pasan luego rápidamente á la llama. Tratándose del estudio de los Trypanosomas hemáticos es indispensable recurrir á previa centrifugación del material recogido en soluciones de citrato sódico, para obtener cantidades suficientes de parásitos.

2. Se dejan estas preparaciones durante veinticuatro horas en una solución 5 por 100 de nitrato de plata en termostato (sumergidas en cápsulas de Petri).

3. Se pasan las preparaciones durante diez minutos en la siguiente solución reductora:

Acid. pyrogallici.....	2,00
Acid. tannici.....	1,00
Aqua destill..	100

Esta solución puede emplearse á las veinticuatro horas, mejor que si estuviera hecha en el momento.

Las preparaciones aparecen entonces con un precipitado negro, que desaparece lavándolas rápidamente en agua, ó que se quita pasando con suavidad sobre el preparado un papel de filtro impregnado de agua. Por fin, se secan y se montan en bálsamo.

YAMAMOTO ha estudiado con este método, que en nuestras manos ha sufrido algunas modificaciones, el Vibrion del cólera, Spirillum sputigenum, Spirochaete, Trypanosoma, Trichomastix, Trichomonas, Bodo lacertae, Mastigamaeba, Opalina ranarum, Colpidium, Espermatozoos de varias especies.

La demostración de un corpúsculo basal ó granulación basilar («Basalkörner») en relación con los flagelos es definiti-

va con este método. El cual, al propio tiempo, permite determinar la existencia, de otro corpúsculo, en la extremidad terminal ó distal, libre, del flagelo, esto es, de una pequeña bolita ó expansión puntiforme, que efectivamente se aprecia también en muchas formas de Trypanosoma, y en nuestro caso en ejemplares numerosos de *Trypanosoma gambiense,* con suficiente claridad.

En cuanto se refiere á los tripanosomas, la observación minuciosa del borde filiforme de la membrana ondulante, elástico, bien definido, conduce YAMAMOTO á afirmar que el Blefaroplasto no tiene nada que ver con sus movimientos. La función del movimiento en los Trypanosomas es del todo independiente del entoplasma y del núcleo.

Según las conclusiones y la exacta frase de YAMAMOTO, la parte intermedia que une los dos corpúsculos basilar y distal, esto es, el filamento que en los Trypanosomas constituye el borde de la membrana ondulante y se continúa en el flagelo, no es más que la expresión de una persistente centrodesmosis de los centriolos, un producto de la división de estos últimos, los cuales, se estiran alejándose el uno del otro y dan lugar al filamento alargado antedicho.

El desdoblamiento de este aparato en el proceso de división esquizogónica de los Trypanosomas, es autónomo, es independiente de los fenómenos de autogamia y de partición nuclear; es, en otras palabras, sencillamente la expresión del fenómeno de división citoplásmica en su parte ectoplásmica. Cuando esta división—manifiesta por la existencia de dos membranas ondulantes con sus bordes espesos—se halla ya adelantada, puede aparecer todavía único—como se ha visto—ó apenas partido el Blefaroplasto, que en estos casos procede de una anterior fusión autogámica de las masas cromáticas del trofo- y del kineto- núcleo de la celula madre.

***

MINCHIN, en una Memoria de suma importancia (*), publicada en los Proceedings de la «Zoological Society», de Londres, y acompañada por cinco excelentes láminas, pone de relieve el hecho que, dejando secar directamente la sangre extendida sobre los cubre-objetos sin una previa fijación rápida, algunas formas de hemo-parásitos se alteran considerablemente. MINCHIN habla, es verdad, en particular de los parásitos del género Trypanoplasma; es más, hace observar que los del género Trypanosoma se mantienen bien y se tiñen normalmente, aunque se sometan los cubre-objetos á una desecación inmediata; pero de todos modos, nosotros creemos, á consecuencia de nuestras observaciones, que en realidad sea muy preferible adoptar el procedimiento empleado por MINCHIN en el estudio de los Flagelados de los peces, y que consiste esencialmente en exponer durante 30-60 segundos á la acción de los vapores de una solución 4 por 100 de ácido ósmico los cubre objetos apenas extendidos, procurando que no se hayan secado todavía. Se colocan para ello pocas gotas de la solución 4 por 100 de ácido ósmico en el fondo de un pocillo, y encima, con la superficie que lleva la capa de sangre hacia abajo, se coloca el cubre-objetos. En seguida, en cuanto han pasado los 30-60 segundos, el cubre se traslada al alcohol absoluto. Las preparaciones así fijadas se tiñen bien con el Giemsa, con tal de dejarlas un tiempo mayor bajo la acción del colorante. Nosotros solemos dejarlas 24 horas. Es cuanto se requiere generalmente con todas las preparaciones sometidas á la acción del ácido ósmico.

MINCHIN sostiene que las apariencias del trofonúcleo y del kinetonúcleo, particularmente de este último, en las preparaciones teñidas con Giemsa, no corresponden á la verdad en

(*) Observations on the Flagellates Parasitic in the Blood of Freshwater Fishes—by Prof. E. A. MINCHIN—(Proceedings of the General Meetings Zoological Society of London. 1909. Junio, pág. 230, con cinco láminas.)

cuanto se refiere á las dimensiones. Comparando esas preparaciones con las hechas con Hematoxilina férrica, la diferencia es evidente. En estas últimas siempre las dimensiones son menores. Esto acontece, según MINCHIN, porque la impregnación de la Cromatina en la reacción de Romanowski no se limita exactamente á la masa de los cuerpos cromáticos, sino que, en realidad, se extiende alrededor de su superficie, dando lugar á la formación de una verdadera capa periférica que aumenta las dimensiones exactas de los cuerpos.

De esto depende, con toda evidencia, que generalmente el Blefaroplasto, aparentemente aumentado de volumen, se confunda con la inmediata extremidad puntiforme del borde de la membrana, y aparezca como una sola cosa con ella.

***

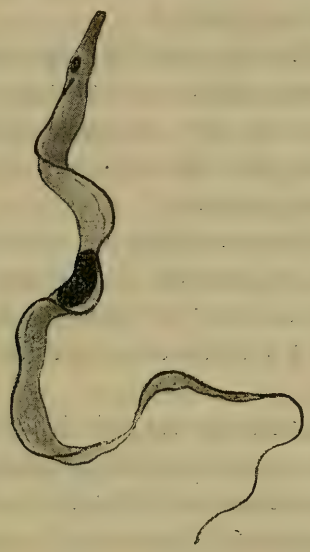
PLIMMER y BRADFORD (Centr. f. Bakt. Bd. 26, 1899, pág. 440 y Quart. Journal of microsc. Sciences, vol. 45, 1908) ya desde el año 1902 observaron y describieron en el Trypanosoma de la *Nagana* dos modos de multiplicación: uno directo ó agámico por división longitudinal (esquizogonia precedida á veces por autogamia), y otro precedido por un proceso de conjugación con desarrollo de cuerpos plasmódicos amiboideos el cual se verifica en el bazo.

Desde entonces las observaciones acerca de la formación de *gametos* en los Trypanosoma han ido multiplicándose. Merecen ser recordados en particular los estudios de OTTOLENGHI, que ha descrito macro- y micro-gametos, y ha sorprendido al parecer algunos momentos del proceso de conjugación de estas formas.

En muchas preparaciones de *Trypanosoma gambiense*, en particular en las de sangre de animales recientemente inoculados y de especie distinta de la originaria, hemos encontrado, efectivamente, formas tan alejadas del tipo normal, que

difícilmente podrían interpretarse como pertenecientes á este Trypanosoma, si no tuviéramos la absoluta seguridad de su procedencia.

Entre estas formas abundan algunas sumamente alargadas y delgadas, de extraordinaria movilidad; ágiles y esbeltas en preparaciones directas en fresco, en preparaciones teñidas aparecen con kinetonúcleo muy alejado de la extre-



midad anterior, y trofonúcleo ovoideo de dimensiones considerables; flagelo libre, largo y delgado. El aspecto característico de estas formas, en comparación con el del tipo morfológico ordinario del *Trypanosoma gambiense,* es el que se reproduce en la adjunta figura esquemática.

Al propio tiempo se encuentran en las mismas preparaciones formas gruesas y cortas, recias, de aspecto macizo, dotadas de escasa movilidad en las preparaciones directas en fresco, con kinetonúcleo muy reducido, puntiforme y flagelo apenas esbozado, generalmente acompañado hasta el extremo límite por un borde de protoplasma espeso.

En nuestro entender, aquellas primeras deben realmente interpretarse como formas de gametos masculinos (microgametos); éstas últimas como formas de macrogametos.

Ahora bien; estas formas sexuadas, ¿son destinadas á desarrollarse tan sólo en un huésped definitivo, distinto del vertebrado; ó bien pueden dar lugar á un ciclo esporogónico en el mismo huésped, en el mismo torrente circulatorio, produciéndose quizás una invasión de los hematies y un ciclo endoglobular del parásito?

Tal es la cuestión importantísima que con distintos procedimientos se intenta resolver por diferentes investigadores. Cuestión que, por otra parte, no atañe solamente al *Trypanosoma gambiense,* sino que en general abarca la totalidad de estos flagelados parásitos.

Aun cuando no nos sea dable por ahora aportar datos definitivos, capaces de resolver el problema, no dejaremos, sin embargo, de consignar los resultados de los estudios de estos últimos años y de nuestras personales observaciones á este propósito.

BATTAGLIA ha publicado una serie de trabajos acerca de un Trypanosoma de los murciélagos *(Trypanosoma vespertilionis)* y del *Trypanosoma Lewisi* (Dr. MARIO BATTAGLIA—Alcune ricerche sopra due Tripanosomi: Tr. vespertilionis, é Tr. Lewisi—en «Annali di Medicina navale», Roma, Novembre 1904), y recientemente del Trypanosoma de la Nagana (Einige Untersuchungen über das Trypanosona Nagana — en Centralblatt f. Bakter., Orig. LIII, 2, 7 Enero 1910, pág. 113), en los cuales describe un ciclo endoglobular del parásito. (Véase también «Annali di Medicina navale e coloniale», 1908, número 6; y Centr. f. Bakg. Bd. 47-49, 1908)

Formas parecidas á las que BATTAGLIA describe, especialmente en esta última Memoria, y á las que MOORE vió durante sus investigaciones en la Trypanosomiasis del ganado vacuno en la Nigeria, hemos encontrado nosotros en los animales infectados con el Trypanosoma gambiense.

Se trata de pequeños cuerpos esféricos y ovoideos, á veces en forma de «comas» con gruesos gránulos refringentes, que en preparaciones teñidas adquieren coloración de la cromatina.

Antes de pasar á describir detalladamente las formas por nosotros halladas y dar la interpretación correspondiente, veamos cómo interpreta BATTAGLIA el ciclo esporogónico que dice haber determinado en el mismo huésped vertebrado (*).

BATTAGLIA estudia detenidamente el proceso de la enfermedad en los animales de experimentación, describiendo con interesantes detalles los síntomas y las lesiones anatomopatológicas, resumidas en XL estados en su última Memoria. Esta parte del trabajo de BATTAGLIA presenta sin duda un gran interés científico. Pero en lo que se refiere á la descripción é interpretación del ciclo de desarrollo del parásito en el huésped vertebrado, las afirmaciones de BATTAGLIA, y sobre todo las figuras que acompañan á su trabajo, no son del todo convincentes.

A los cinco días de haber hallado en la sangre de los animales infectados con Trypanosoma Brucei, las formas amiboideas intraglobulares, obsérvanse, según BATTAGLIA, en el torrente circulatorio formas amiboideas extraglobulares, libres en el plasma, esféricas ó fusiformes, y algunas con flagelo, todas ellas movibles, y—en los preparados teñidos—ricas en Cromatina (**).

(*) V. Centralbl. f. Bakt., 7 Enero 1909, pág. 117: «..... die Sporogonie war nur im Zwischenwirt (SCHAUDINN und KOCH) bekannt; ich habe sie in demselben Tier für das Trypanosoma vespertilionis und das Tr. Lewisi und vor kurzem, bei meinem letzten Untersuchungen, auch für das Trypanosoma Brucei nachgewiesen».

(**) *Loc. cit,*: «Innerhalb 5 Tagen beobachtete man im zirkulierenden Blute des experimentell mit Trypanosoma Brucei infizierten Tieres sowohl in Frischpraparaten wie in gefarbten, die rundliche und die spindelformige amöbische extraglobuläre, und die rundliche Form mit und ohne Geissel. Diese Formen waren in den Frischprapareten sehr beweglich und erschienen in den gefarbten praparaten reich an Chromatin.» (Pág. 160.)

A los ocho días se encuentran, según BATTAGLIA, en la sangre formas diferentes que detalladamente describe (página 160), y que se parecen ó corresponden á las observadas por SCHAUDINN y R. KOCH en los huéspedes invertebrados de los Trypanosomas por ellos respectivamente estudiados (*).

Tomando como punto de partida estas formas, BATTAGLIA describe un verdadero proceso de esporogonia en la sangre del vertebrado, lo mismo como se observa, según el mismo autor, en el caso del Tripan. Lewisi y en el Tr. vespetilionis, con formación de Macrosporas y Microsporos, de Microsporidios y Macrosporidios en la sangre circulante.

Para ello se apoya en tres criterios: 1.°, el criterio morfológico (existencia de formas parecidas á Macrosporos y Microsporos, etc.); 2.°, el criterio biológico, ciertamente muy importante (y que consiste esencialmente en la consideración de la posibilidad de conservar durante largo tiempo el Trypanosoma Brucei — como cualquier otro Trypanosoma — virulento con sencillos pases de uno á otro animal de experimentación aun de la misma especie; esta persistencia de la vitalidad no se comprende, sin un período de reproducción esporogónica) (**); 3.°, el criterio experimental (puesto que la enfermedad se transmite, el parásito se inocula y se reproduce con toda su virulencia cuando no se hallan en la sangre otras formas más que las correspondientes á este supuesto ciclo esporogónico).

(*) «Alle diese Formen ahneln denjenigen, welche SCHAUDINN und R. KOCH in den Zwischenwirten der von ihnen untersuchten Trypanosomen beschriben haben.» (Págs. 160, 161.)

(**) «Es ist dies eine in fast allen bakteriologischen Laboratorien bekannte Tatsache, wo man Trypanosomen besitzt und dieselben im lebenden Tier, durch lange und wiederholte Uebergänge seit Jahren konserviert. Das Nagana-Trypanosoma, mit welchem ich Versuche ausgeführt habe, kann man durch Verimpfung von Tier auf Tier ungefahr 2 Jahre verwahren» (pág. 163).

Un interesante estudio del *Trypanosoma vespertilionis* (Battaglia), ha sido hecho por GONDER, en el Instituto para las enfermedades tropicales de Hamburg (*). En esta Monografía *Gonder* describe detalladamente las formas de desarrollo del Trypanosoma vespertilionis encontradas en un acaro ectoparásito de los murciélagos en general, hallado en las especies—por él estudiadas—Vesperugo kuhlii, V. pipistrellus, V. serotinus, V. noctula, Rhinolophus euryale.

Se trata del *Leiognathus arcuatus*, en cuyo tubo intestinal ha encontrado las formas en cuestión, que deben considerarse desde luego como fases de desarrollo del Trypanosoma, en un ciclo esporogónico previa copulación.

Muy demostrativas son las figuras de las dos láminas de Gonder.

En la primera se hallan reproducidas las formas de la sangre del huésped vertebrado. En la segunda las del intestino del Leiognathus. Entre las primeras merecen fijar la atención una forma de división con blefaroplasto bipartido y núcleo con 8 cromosomas; las figuras de reducción del blefaroplasto, y, por fin, las de las formas femeninas y masculinas, las cuales desde luego corresponden grandemente á las halladas por nosotros en el Tr. gambiense. Entre las segundas son muy numerosas las formas de Crithidia, y dignas de atención las de los Ookinetos. Pero en cambio, no se hallan en el trabajo de GONDER pruebas de la existencia de un ciclo endoglobular, ni de que la cópula pueda acontecer, entre micro- y macro- gametos, en la misma sangre del vertebrado.

Interesante para el estudio de las formas evolutivas de los Trypanosomas en los huéspedes intermediarios es la Memoria de E. RODENWALDT.—Trypanosoma lewisi in Haematopinus Spinulosus (Centralb. f. Bakter., Orig., Bd. 52, H. I.,

---

(*) Trypanosoma vespertilionis Battaglia—von Dr. Richard *Gonder*. Assistente. am Instit.—(Centralb. f. Bakter., Bd. 53, H. 3, 2 de Febrero 1910, pág. 293, con 2 láminas y una fig. en el texto.)

18 Octubre 1909, pág. 30), memoria acompañada por tres láminas.

Como dice muy acertadamente RODENWALDT, la dificultad para resolver el problema de la existencia de un ciclo de desarrollo de los Trypanosomas parecido al de los Hemosporidios en los huéspedes invertebrados, aumenta extraordinariamente por la presencia de las formas de parásitos naturales, propios de los insectos, y en particular de los Dipteros, como las del género Crithidia y las del género Herpetomonas, que son sumamente parecidas á ciertas fases de desarrollo de los mismos Trypanosoma (*).

Sin embargo se ha abusado mucho, según RODENWALDT, de este argumento. En el caso de Trypanosoma Lewisi, cuya transmisión por el Hematopinus spinulosus ha sido estudiada por V. PROWAZECK, NUTTALL, PATTON, STRICKLAND, ha sido descrita con el nombre de Crithidia haematopini n. sp. *(Patton)*, una forma que en realidad no se encuentra en los piojos (Haematopinus) de las ratas no infectadas de Trypanosoma.

Las investigaciones llevadas á cabo por RODENWALDT le permiten, desde luego, formular esa conclusión. Por tanto, la especie Crithidia haematopini *Patton* probablemente no existe (**).

En cambio, siguiendo día tras día los cambios y las trans-

(*) «Das problem, ob es bei den Trypanosomen und ihren nachsten Verwandten einen Entwickelungskreis gibt derselben Ast wie bei den Hñamosporidien ist, ungelost, weder im positiven Sinne seines Vorhandenseins noch im negativen seiner Nichtexistenz. ..... «Es ist im wesentlichen ein einziges, immer wiederkherendes Argument mit welchem den aus den Insektenmagen beschriebenen sogenannten Entwickelungsformen der Trypanosomen begegnet wird, das Argument es handle sich bei diesen Formen um eigene Parasiten (natural parasiten) der betreffenden Insekten aus der Gattung Crithidia und Herpetomonas.

(**) «..... die sogenannte Crithidia haematopini Pattons existiert also nicht.» (Loc. cit., pág. 32.)

formaciones sucesivas que sufren en el tubo digestivo del Haematopinus las formas de Trypanosoma procedentes de la sangre de las ratas infectadas, se logra poner de relieve tanto en preparaciones frescas, como en preparaciones teñidas, la estructura de las nuevas formas pertenecientes al ciclo de desarrollo del Trypànosoma y sumamente parecidas sin embargo á las descriptas como Crithidia y como Leptomonas.

Rodenwaldt describe también una forma sin flagelo, que interpreta, aunque en modo dudoso, como probable Ookineto. Las figuras de su lámina no son en este sentido muy demostrativas.

Entre las más interesantes investigaciones de estos últimos tiempos deben citarse las de Kleine «Sobre la etiología de la enfermedad del sueño», publicadas en Deutsche Medizin. Woschenschr., 22 Julio de 1909.

Kleine ha logrado presenciar la transformación del estado de ninfa al de insecto perfecto en 540 ejemplares de *Glossina palpalis*, y en éstas ha obtenido repetidas veces el desarrollo del Trypanosoma gambiense. Más exactamente, entre 410 moscas que habían chupado sangre de animales infectados, 22 (esto es, aproximadamente el 5 por 100) quedaron á su vez infectadas. Adviértase, sin embargo, que la mortalidad entre las moscas del género *Glossina*, en estado de captividad, es muy grande, alcanzando hasta el 50 por 100. Y esto vale tanto para las que no hayan sido infectadas como para las infectadas. Entre las que murieron, es de suponer que la proporción de infectadas habrá sido la misma como entre las supervivientes que han podido examinarse. Por lo tanto, la proporción total aumenta, y puede fijarse en un 10 por 100.

Los experimentos de Kleine han sido hechos por medio de Monos inoculados anteriormente con sangre de enfermos de la enfermedad del sueño. Con gran cuidado, las moscas que habían chupado durante un día, eran aisladas para evi-

tar que volvieran á chupar, con objeto de fijar con probabilidades de acierto la proporción de las que presentaran formas evolutivas del Trypanosoma en el tubo digestivo. Las moscas eran sacrificadas en días sucesivos y examinadas en todos sus órganos separadamente: intestino posterior, medio y anterior, proventículo, glándulas salivares, trompa.

De todos estos órganos, el más importante es, sin duda alguna, el intestino. En el jugo intestinal obtenido y examinado, ya sea aislando antes el intestino con el procedimiento acostumbrado, ya sea sencillamente exprimiéndole del cuerpo del diptero cortado en correspondencia de la mitad del abdomen, ha encontrado KLEINE siempre — en los casos positivos — formas típicas de Trypanosoma gambiense. En los demás órganos se encuentran, en cambio, formas muy distintas de las que corresponden al tipo morfológico: grandes Trypanosomas con largo núcleo estratificado y ovillos inextricables de Trypanosomas filiformes, con gruesas agrupaciones de gránulos de cromatina. En las glándulas salivares ha encontrado á veces parásitos, pero no en modo constante, aun cuando se hallaban éstos en abundancia en el contenido intestinal. Piensa por esto KLEINE que la infección de las glándulas salivares no sea necesaria para la transmisión del parásito.

El ciclo de desarrollo del Trypanosoma en las Glossinas, continúa durante mucho tiempo, y desde luego, el periodo durante el cual las moscas infectadas pueden transmitir la enfermedad, dura algunas semanas. El hecho ahora apuntado, cuya importancia no necesita encarecerse, está en completo acuerdo con lo que otros autores, BRUMPT, MINCHIN, particularmente TAUTE, han observado en la transmisión del Trypanosoma de la Nagana. TAUTE tuvo una Glossina que á los ochenta y tres días de haber sido infectada transmitía todavía el parásito.

(Continuará.)

(Laboratorio de Parasitología del Instituto Nacional de Higiene de Alfonso XIII en Madrid.)

PUBLICACIONES RECIBIDAS

(Continuación.)

The Astrophysical Journal.—Volume XXVII.—Number, 1.—Chicago and New York.

Alemany y Bolufer (D. José.)—Discursos leídos ante la Real Academia Española en la recepción pública del Sr..., el día 14 de Marzo 1909.—Contestación del Exmo. Sr. D. Francisco A Commelerán.—Madrid, 1909.

Allué Salvador (Claro.)—Determinación del poder calorífico de los combustibles minerales.—Memoria presentada para aspirar al grado de Doctor en Ciencias-Sección de Químicas.—Zaragoza, 1908.—1 foll.

Amat y Castellar (Juan Bautista.)—Las coordenadas curvilíneas.—Discurso para el grado de Doctor en Ciencias Físico-Matemáticas, por... —Barcelona, 1909.—1 foll.

Antonio Saluzzo (Marco).—Esbozos y versiones.—Caracas, 1907.—1 foll.

Aranda y Millán (D. Francisco).—Contribución al conocimiento de los Equinodermos de España y, en especial, de los Holoturioideos.—Memoria para optar al grado de Doctor, por el Licenciado en Ciencias Naturales... —Madrid, 1908.—1 foll.

Blanco (D. Eduardo).—Venezuela heroica.—Cuadros históricos.—Quinta edición.—Caracas, 1904.—1 foll.

Blázquez y Delgado-Aguilera (D. Antonio).—Discursos leídos ante la Real Academia de la Historia en la recepción pública del Sr..., el día 16 de Mayo de 1909.—Contestación del Excmo. Sr. D. Ricardo Beltrán y Rózpide.—Madrid, 1909.

Brölemann (Henry W.).—Catalogos da fauna brazileira, editados pelo Museu Paulista S. Paulo (Brazil).—Vol. II, Os Myriapodos do Brazil.—São Paulo, 1909.—1 foll.

Calcaño (D. Julio)—Discursos leídos en la Academia Nacional de la Historia en la recepción pública del Sr. Dr..., el día 15 de Noviembre de 1908.—Contestación del Dr. D. Laureano Villanueva.—Caracas, 1908.—1 foll.

Castillo y Quartiellers (D. Rodolfo del).—Momificación y embalsamamiento en tiempo de los Faraones, por...—Madrid, 1909.

Castillo y Quartiellers (D. Rodolfo del).—Objetos egipcios encontrados en Tarragona por...—Madrid, 1909.

Coloma (Rev. P. Luis).—Discursos leídos en la Real Academia Española, en la recepción pública del..., el día 6 de Diciembre de 1908.—Madrid, 1908.

Cortejarena y Aldevó (D. Francisco de).—Mis Bodas de Oro con la profesión.—Junio 20 de 1859 á 1909.—Tiempo pasado.—Madrid, 1909.—Un volumen 8.º.

Cortejarena y Aldevó (D. Francisco de).—La tuberculosis y la Administración Pública.—Memoria y conclusiones discutidas y aprobadas por la sección de Sociología del 1er Congreso Nacional de la Tuberculosis en 1908 —Madrid.—1 foll.

Correa (D. Federico).—Monumento «América».—Proyecto del ingeniero... —Buenos Aires.—1909.—1 foll.

Dato (Excmo. Sr. D. Eduardo)—Discurso leído ante la Real Academia de Jurisprudencia y Legislación, en la sesión inaugural del Curso de 1908-909, celebrada el 18 de Febrero de 1909 bajo la presidencia de S. M. el rey D. Alfonso XIII.—Madrid, 1909.

Davara y Pereira (D. César).—Discurso-resumen del Curso de 1907-908, leído ante la Real Academia de Jurisprudencia y Legislación en la sesión inaugural de 1908-909, celebrada el 18 de Febrero de 1909 bajo la presidencia de S. M. el rey D. Alfonso XIII.—Madrid.

Delegación Regia de Pósitos.—Memoria que eleva al Gobierno de Su Majestad en cumplimiento de lo dispuesto por la ley de 23 de Enero de 1906 el Delegado Regio, Conde del Retamoso.—Marzo de 1909.—Madrid, 1909.

Díaz de Rada Ruiz (D. Faustino).—Contribución de la Radioactividad al análisis Químico.—Memoria presentada por..., aspirando al grado de Doctor en Ciencias, Sección de Química.—Madrid.—1 foll.

Escuela Superior de Comercio de Valencia.—Memoria del Curso de 1907 á 1908.—Valencia, 1908.

Faton Lucas (D. Francisco).—Colección de Cuentos morales escritos por..., con un prólogo del Licenciado D. Luis Montoto y Rauteustranch.—Publicados por la Asociación de Maestros de 1.ª enseñanza, San Casiano, establecida en la iglesia del Sagrado Corazón de Jesús, de Sevilla. Con licencia eclesiástica.—Sevilla, 1909.—1 foll

Fernández (R. P. Fr. Justo). La telegrafía sin hilos.—Discurso que en la solemne apertura del Curso académico de 1908 á 1909, pronunció en el Real Colegio de Alfonso XII del Escorial, el... Madrid, 1908.

Fernández de Córdova y Remón Zarco del Valle (D. Luis), marqués de Mendigorría.—Campaña ruso-japonesa —Memoria que eleva al excelentísimo señor General Jefe del Estado Mayor Central del Ejército, el Coronel..., Jefe de la Comisión militar española agregada al Ejército ruso.—Apuntes diarios del Coronel...—Atlas.—Madrid, 1908.—2 volúmenes y 1 atlas.

Flammarión (Camilo).—Las primeras edades de la Humanidad.—La Plata. 1 foll.

(Se continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

Informes sobre tres Memorias presentadas á la Academia, con opción á premio, en el Concurso de 1904. Ponente, *J. M. de Madariaga* 585

XXXV.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia octava 603

XXXVII.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia novena 624

XXXVIII.—Estudio completo de una clase especial de Integrales singulares, por *Lauro Clariana* 642

XXXIX.—Nota sobre la *Scapania Casaresana* St. y las Scapanias españolas, por *A. Casares Gil* 670

XL.—Viaje de estudio á la Guinea española (observaciones acerca del *Trypanosoma gambiense* y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales), por *Gustavo Pittaluga* (continuación) 673

Publicaciones recibidas (continuación) 687

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO VIII.—NÚM. 10.

(Abril de 1910.)

CANCELLED

Smithsonian
FEB 5 1926
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE FONTEJOS, NÚM. 8.
1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

OCT 5 1910

Informe acerca de la obra de Mecánica Racional del Sr. Ruiz Castizo.

PONENTE: NICOLAS DE UGARTE

El Catedrático de la Universidad Central, D. José Ruiz Castizo, dirigió, en 14 de Abril de 1908, una comunicación al Excmo. Sr. Presidente de esta Real Academia, acompañando el tomo I de su «Tratado de Mecánica racional», para que tuviera ingreso en la Biblioteca de la misma, y para que si lo creía conveniente, fuera examinado y emitiera informe sobre las cualidades científicas didácticas, etc., de dicha obra.

En cumplimiento del acuerdo tomado por la Academia, pasó el asunto á la Sección de Exactas, á la cual, en virtud de este mandato, tengo el honor de exponer lo que sigue:

Es el libro citado un tomo en 4.° mayor, de 589 páginas, señaladas con numeración arábiga, precedidas de un prólogo y una introducción, marcados con números romanos. Suman, con el índice, un total de 604 páginas, de apretadas líneas, copioso cálculo, y 205 figuras intercaladas en el texto.

En dos partes principales está dividido el libro: la 1.ª, «Teoría general de vectores», termina en la pág. 304; la 2.ª, «Cinemática», en la 581. Son como dos cuadernos distintos, pero sirviendo el primero para facilitar la marcha en el segundo.

Siete capítulos, divididos en artículos y éstos en párrafos numerados, forman aquél; otros nueve constituyen éste.

Expresados lo más sintéticamente posibles son: los siete primeros. (I), Operaciones con vectores y sus momentos;

(II), Momentos de sistemas, pares; (III), Reducción de sistemas; (IV), Centros de gravedad; (V), Estudio geométrico de los sistemas planos; (VI), Momentos de orden superior al primero; (VII), Campos vectoriales. Los otros nueve: (VIII), Generalidades y conceptos elementales de la Cinemática; (IX), Teoría de la velocidad; (X), Teoría de la aceleración; (XI), Fórmulas generales del movimiento; (XII), Aplicaciones al del punto; (XIII), Movimiento contínuo de los sistemas invariables; (XIV), Movimiento relativo; (XV), Aplicaciones geométricas; (XVI), Movimientos finitos de sistemas invariables.

***

Seguir paso á paso un libro de esta clase, discutiendo nombres y signos nuevos, analizando definiciones, comentando párrafos, etc., sería labor larga y penosa, más aun si hubiéramos de comprobar cálculos, estudiar ejemplos y resolver cuestiones propuestas. En el caso presente, además, esa labor resultaría inútil. Es precisa, no hay duda, en ocasiones, pero en ésta nos relevan de ella, no sólo la suficiencia reconocida del autor, sino la conveniencia de la rápida descripción del conjunto, á fin de que resalten los rasgos característicos *didácticos* y *científicos* de la obra, que es en realidad lo que se pide en la comunicación, y por tanto lo que se ordena á la Sección.

He aquí por qué no creo oportuno detenerse en si es ó no adecuado el calificativo de «racional», ó si, según las indicaciones de Ivon Villarçeau y los deseos de Mr. Resal y algunos más, fuera mejor calificarla «General».

Razones hay para todo en pro y en contra; las aducidas por el autor y otros hacen admisible la primera, sancionada por el uso. Dejemos, pues, esta cuestión de nombres, que podría llevarnos hasta rechazar, quizá, el de «Mecánica» y

bastantes otros, cuya etimología no está de acuerdo con su contenido actual; volvamos á nuestro principal objeto.

El rápido extracto hecho hace ver que el autor desea que se incluya en los preliminares de la Mecánica *efectiva* todo aquello que sólo puede considerarse como auxiliar de la misma. Segrega, por consiguiente, cuanto puede entorpecer la marcha rápida en aquélla.

El comienzo es lógico y natural, como lo hacen muchos, por «la teoría general de vectores». Otra palabra que nos obligaría á detener también, si debiéramos entrar en cuestiones etimológicas. El nombre no hace á la cosa, es cierto; pero tantos se dan á cada una, que podríamos llegar á no entendernos. Este de *vector* lo va sancionando el uso que de él han hecho sabios honorables, para indicar una cantidad, un módulo *espacial* con *cualidad directiva*, bien distinta de la algébrica, limitada á las dos únicas antitéticas cifradas en los signos *más* y *menos*, de que no se ha pasado con los procedimientos Cartesianos.

Si lo columbró ó no Leibnitz ó lo entrevieron otros sabios, tampoco nos incumbe ahora. Es la verdad que hace algo más de medio siglo, el eminente Profesor de Astronomía de Dublin Guillermo Rowan Hamilton, creó entera la teoría de los llamados *quaternions*, dichos en español, *cuaterniones* por unos, y por otros *cuaternios*. Pero resueltos á prescindir, en lo que resta de este informe, de la cuestión de nombres, les llamaremos, como el autor, *cuaternios*, y admitiremos, sin discusión, todos los nombres y signos empleados por el mismo.

Definidos los vectores, representados sencillamente por su módulo, coronado por dos trazos paralelos, y tratadas las operaciones *sumatorias*, se ve precisado á tocar en la *multiplicación* de vectores, necesaria, entre otras cosas, para la expresión analítica de los *momentos*, dando cualidad convencional al brazo de los mismos. Así, de un modo insensible, introduce el nuevo elemento para representar otro que tanto abunda en Mecánica, y se acostumbra el que estudia

á la no conmutabilidad de los factores que le producen. Al decir multiplicación, va implícita la división, como en la suma la resta, y en todas esas operaciones hay algo de absoluto en la teoría de *cuaternios*, porque no da preferencia alguna á ninguna dirección del espacio, en lo cual se diferencia del procedimiento seguido con las llamadas *imaginarias*, que necesitan de una en que se cuenten las reales y positivas.

El autor, sin embargo, sólo emplea el cuaternio de un modo limitado, aislado y circunstancial; de tomar la teoría de Hamilton por norma se vería obligado, quizás, al abandono, casi por entero, del procedimiento Cartesiano. Esto en España parecería demasiado radical; vendrá con el tiempo, sin duda, porque hay dentro, y fuera, sobre todo, partidarios decididos de aquélla, que ya va dejando de ser moderna, y lleva consigo grandes gérmenes innovadores. De ella, además, se han servido sabios como Maxwell y otros en las ciencias de su particular predilección; todo contribuirá á difundir su procedimiento, con el que la Mecánica y las ciencias derivadas de ella se procuran, al parecer, ventajas positivas con sus *operadores* especiales. El Sr. Ruiz Castizo no intenta salir de los antiguos moldes, y maneja los vectores por los medios Cartesianos, prefiriendo siempre, como es nalural, los ejes rectangulares, sin rechazar los oblicuos, y emplea también, en todo el tomo, las coordenadas cilíndricas, esféricas y los ángulos especiales de Euler cuando lo cree conveniente; las maneja con acierto, así como saca partido de otros adelantos analíticos y de los algorítmicos de la forma.

Desarrolla con suficiente amplitud la reducción general de sistemas discontinuos, llegando, en su máxima síntesis, á los llamados *torsores*, á ese conjunto particular de *resultante* y *par mínimo*, cuyo *eje* coincide con aquélla. Expone ejemplos bien escogidos y aplicaciones especiales que resuelve geométricamente á veces, pero principalmente de un modo

analítico, que pospone necesariamente en el capítulo V, cuyo principal objeto es la «Estática gráfica». Hasta ese momento, en que ya es indispensable, no ha creído oportuno hacer uso del *polígono funicular*. De él se vale para el estudio de los *tensores* que en las aplicaciones de ingeniería han de dar á conocer gráficamente las reacciones en los sistemas materiales, en las barras de los sistemas reticulados. Emplea en esta indagación las figuras recíprocas, de modo parecido á como Mr. Levy aplicaba las teorías de Clerk Maxwell.

Aborda luego la inreresante teoría de curvas sumatorias y funiculares, que ilustra con aplicaciones.

Ha debido tener razones fundadas para no imitar á los que juzgan más útil servirse desde luego del polígono funicular en la composición de toda clase de sistemas para tratar á su tiempo la cuestión de *tensores* por *figuras recíprocas*.

Tampoco toca la composición de tres paralelas ó descomposición de una en tres por las relaciones de las áreas correspondientes á los triángulos que forman sus trazas en nn plano, ni ha creído conveniente reducir la composición y descomposición de sistemas cualesquiera á sistemas planos por medio de la geometría descriptiva clásica ordinaria, es decir, por las proyecciones sobre los planos ortogonales de Monge.

Está, sin embargo, cuanto expone suficientemente extenso y detallado, y con lo dicho llega perfectamente á los llamados momentos de inercia, ó sea á los de segundo orden ó cuadráticos, que tienen un carácter puramente *escalar*, bien distinto de los de primer orden ó estáticos, que le tienen *vectorial* generalmente.

Estudia las *cuádricas* de los momentos de inercia, ocupándose de los teoremas principales y construcciones geométricas relativos á los mismos, y después de algunas palabras sobre los momentos de orden superior, ejercicios y aplicaciones, corona su primer cuaderno con la teoría, relativamente moderna, de los *campos vectoriales*, llamando así á esas regiones del espacio que aparecen repletas de vectores infi-

nitesimales, cuyos módulos, dirección y sentido varían, ó pueden variar, de un modo contínuo con las coordenadas de aquél.

Es de cierta novedad ver este capítulo en los preliminares de la Mecánica; lo creemos acertado como preparación para los que hayan de internarse en la electrotécnia, y como lazo de unión, aunque incompleto, entre ésta y la Ciencia del movimiento.

Será quizá superfluo añadir que en él se ocupa de toda clase de nociones sobre intensidad y dirección del campo en cada punto, de su relación con las derivadas del potencial, se estudian las superficies de nivel en éste, líneas vectoriales, fiujos, tubos, composición de campos, etc., no faltando el teorema de Green ni las ecuaciones de Laplace y Poisson y otras, sin descuidar más tarde, en el resto del libro, de dar, oportunamente, las fórmulas que expresan las dimensiones de cada una de las entidades mecánicas de que se ocupa, en la forma que se sientan en el sistema *cegesimal.*

Pasemos al otro cuaderno, parte segunda, ó «Cinemática».

Su comienzo es natural, por definiciones, divisiones y nociones fundamentales, haciéndolo con más detención que otros autores, mostrando claramente que su plan sólo da cabida á los elementos fundamentales de la Cinemática pura, comprendiendo en esencia los movimientos del punto y de los sistemas invariables, excluyendo toda aplicación á *Mecanismos, sistemas flexibles* y *flúidos.* No por eso prescinde de teorías, ampliaciones y ejercicios que preparan al recorrido de esas y otras aplicaciones. Huye de la trillada senda que separa por entero la Cinemática del punto de la de los sistemas, y casi desde el comienzo de esta parte se le ve subordinar todo al estudio detallado de la *velocidad* y la *aceleración* en los tres movimientos simples y fundamentales: *rectilíneo, angular* y *helicoidal.* Deduce las expresiones de una y otra en movimientos proyectados sobre ejes ó planos, y dado el carácter vectorial de aquellas, las maneja como tales, apli-

cando las teorías á toda clase de cuestiones relativas á las mismas, y demostrando los teoremas importantes: de D'Alembert respecto á los ejes instantáneos; de Coriobis, sobre la aceleración complementaria; otros sobre el foco y característica en la reducción de movimientos á dos rotaciones conjugadas; sobre la *indicatriz* ó curva llamada *hodógrafa*, formada por el extremo de las velocidades tomadas desde un polo común, etcétera, etc. Estudia la aceleración central neutoniana ó no y otras cuestiones que ordinariamente ponen los autores en la Dinámica. Después de ese estudio detenido de toda clase de aceleraciones hace una interesante discusión de las fórmulas generales.

Con los conocimientos adquiridos le es fácil sentar ya las fórmulas analiticas más generales del movimiento, haciendo para el punto aplicaciones diversas á los movimientos rectilíneos, parabólicos, centrales y armónicos.

Presenta las imágenes geométricas del movimiento alrededor de un punto con los conos de Poinsot, factible también con movimientos epicicloidales esfericos; paralelamente á un plano con cilindros ó epicicloides planas, y, en los movimientos más generales, acompañando á los conos de Poinsot una traslación determinada, pero evitando las múltiples soluciones con la única *helicoidal* fundada en el teorema de Julio Mozzi, que no es otra cosa sino la aplicación del *torsor de par mínimo* á la composición de movimientos cualesquiera, de rotaciones especialmente, tratados como vectores.

Escudriña las notables propiedades de los centros instantáneos de *velocidades* y los de *aceleraciones*, dando noticia del círculo y polo de inflexión, etc., con interesantes aplicaciones.

Vienen luego los movimientos relativos, partiendo de su aceleración, *resultante* de la *absoluta* y las de *arrastre* y *complementaria* cambiadas de signo. Planteada asi la cuestión, no tiene otras dificultades que las analíticas, limitándose, por tanto, el autor, á dar ejemplos. Siguen los movimientos re-

lativos de dos cuerpos que le tienen absoluto é independiente y de los que son producidos por arrastre mutuo ó por rodaduras entre perfiles circulares ó de cualquier otra especie, haya ó no resbalamiento. Todo lo aclara el autor con ampliaciones ó lo ilustra con ejemplos que aplica también á los movimientos inversos, ó sea, á los que sólo producen una velocidad relativa igual y contraria á la de arrastre por estar el punto en reposo.

En el capítulo anteúltimo se ponen de manifiesto los valiosos recursos que presta la Cinemática en multitud de problemas geométricos. Tales son los métodos de Roverval para el trazado de tangentes, la determinación de radios de curvatura, centros de inflexión, etc., terminando con el movimiento de sistemas no libres, es decir, sometidos á condiciones ó enlaces. Por el pronto esas condiciones no pueden ser otras que las de obligarle á que se mueva sobre una superficie ó sobre una curva, siendo este último caso el más interesante en las aplicaciones, por resultar un enlace completo, dada la trayectoria; y todo estará conocido si se da la ley del movimiento.

Pone algunas aplicaciones á bielas, manivelas y al inversor de Peaucellier, qne, aunque reducidos á ejes, son ya, en cierto modo, mecanismos, y cesa en este asunto proponiendo luego algunos problemas y ejercicios.

Da fin el tomo que analizamos con un estudio de los movimentos finitos de sistemas invariables, precediéndole las deflniciones y notaciones precisas.

Nos parece muy conveniente que no se olvide de tal cuestión, porque si bien se funda en lo estudiado, resulta á veces bien distinta de la composición de los movimientos contínuos. Dos rotaciones infinitesimales, por ejemplo, pueden sustituirse por una sola de eje coplanario con aquellas; pero dos finitas, aunque puedan ser reemplazadas por una sola, el eje de ésta no estará ya en el plano de los de aquéllas.

Se ocupa, por último, de componer movimientos cuales-

quiera, y demuestra que el movimiento resultante será generalmente un movimiento helicoidal.

*
* *

Con demasiada rapidez, quizá, hemos dado cuenta del libro del Sr. Ruiz Castizo, teniendo que omitir muchos detalles.

Sin embargo, puede colegirse de lo expuesto que, á juzgar por este primer tomo, la obra estará bastante por encima del nivel de las llamadas elementales, y no desmerecerá entre las muchas que, para estudios en los distintos Centros, se traen del extranjero. Es posible que, para ciertas carreras, que no estudian la ciencia por la ciencia misma, tenga más amplitud de lo que precisan sus aplicaciones técnicas, pero es lógico, y hasta necesario, que los cimientos sean más amplios que los muros que sustentan.

Por lo analizado, parece que tendrá también la obra las condiciones didácticas y científicas necesarias, y desde luego se pone de manifiesto la aplicación, inteligencia y práctica en la enseñanza de esta disciplina, del Catedrático á quien, por oposición, le fué encomendada en la Universidad de Zaragoza, y á quien por sus méritos, no escasos, ha correspondido continuarla en la Universidad Central.

XLI. — Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática.

Por José Echegaray.

Conferencia décima.

Señores:

La Ciencia, como el espíritu humano, como todo lo que tiene vida, y aun como lo inorgánico, está sujeta á constante evolución.

Hay momentos en que la Ciencia, y hablemos particularmente de la Física-matemática, parece próxima á llegar á su apogeo, como una curva al llegar á su punto máximo, parece que se detiene y reposa en su tangente horizontal, y sus variaciones son tan lentas, que pudiera creerse que conserva un valor constante y permanente.

Pero la ley de la evolución, de la transformación pudiéramos decir, bien pronto la arranca del reposo y precipita sus variaciones.

La Física-matemática, con la aplicación de la hipótesis mecánica y del cálculo, parecía aproximarse á esta perfección relativa, á este máximum á que antes nos referíamos, por ejemplo: la teoría matemática de la luz, que nos hizo la ilusión de una Ciencia casi perfecta.

Mas, por una parte la crítica, y por otra parte la presencia de nuevos fenómenos, han quebrantado, como tantas veces hemos dicho, la fe en la hipótesis mecánica, y han estimulado la creación de nuevas teorías, que expliquen de una

manera tan completa como sea posible los fenómenos de la electricidad y del magnetismo.

Así, en la electro-estática, en la electro-dinámica, y aun en el magnetismo, podemos señalar dos épocas, dos sistemas, dos *maneras*, nos aventuraríamos á decir, para estas diversas ramas de la Ciencia novísima.

***

Y así, al querer hacer aplicaciones de la fórmula de Green á la Física-matemática, y como exploración en cierto modo, aunque exploración muy á la ligera, de campos que hemos de recorrer más detenidamente en otros cursos, decíamos á propósito de la electro-estática, que conviene distinguir la Ciencia clásica de la nueva Ciencia, y la diferencia entre ambas, que corresponden á épocas diversas, á diversos sistemas y aun á diversas hipótesis, era ésta: Que en la electro-estática clásica se consideraban entidades eléctricas distintas, ocupando un espacio inerte para las acciones eléctricas, casi el puro espacio geométrico, al que si atribuíamos alguna cualidad física, era el de ser un perfecto aislador; en cambio, en la electro-estática moderna, el espacio siempre es sensible á las acciones eléctricas, es un elemento con el cual ha de contarse al resolver los problemas de la electro-estática.

Siempre ha de contarse con él, repetimos, y no excepcionalmente, como en los dieléctricos. El espacio más desprovisto de sistemas materiales, es el éter, y, sin embargo, el éter entra en juego bajo las acciones eléctricas, y las transmite.

Por eso, en la teoría electro-estática moderna, es teoría dominante y fundamental la de los campos eléctricos, como diremos cuando llegue el momento oportuno, que es doctrina

fundamental la de los campos magnéticos ó electro-dinámicos.

En la electro-estática clásica las acciones entre unas y otras entidades eléctricas, masas eléctricas ó conductores. se ejercen á través del puro espacio, por lo que se llama *la acción á distancia.*

La electricidad atrae ó rechaza á la electricidad como la masa ponderable de un astro atrae ó rechaza á la masa ponderable de otro astro.

En las teorías modernas, la acción á distancia ha perdido todo su crédito.

Se dice que los fenómenos pasan como si existiera, pero que no existe.

En la Ciencia moderna, estas acciones se suponen transmitidas paso á paso, elemento por elemento, de un sistema á otro, por la acción del intermedio material que entre uno y otro sistema se extiende.

Esta era la tendencia de Maxwell y la de Faraday, y es la de la mayor parte de los físicos modernos.

*
* *

Bueno será, antes de pasar adelante, aunque sea prolongando este paréntesis, que como ningún programa concreto nos obliga, puedo hacer tan amplio ó tan corto como los estímulos del momento me exijan, recordar algunas ideas del ilustre Hertz, que el eminente Poincaré, en su gran obra tantas veces citada, sobre la Electricidad y el Magnetismo, expone de esta manera próximamente.

Hertz hace constar que, marchando desde la idea de la simple acción á distancia á la acción por el intermedio de un medio material, se pueden escoger muchos puntos de vista diferentes.

1.° *La acción á distancia clásica.*—Para que esta acción pueda ejercerse, es preciso que los dos cuerpos, entre los cuales se ejerce, existan al mismo tiempo. Si no hay más que uno sólo, la acción eléctrica no puede existir. La acción eléctrica será una posibilidad, la fórmula matemática que la expresa, $\frac{e}{r^2}$, es una fórmula abstracta. Para que se convierta en algo concreto, esta acción de un solo cuerpo *e* á la distancia *r*, es preciso que en el nuevo punto coloquemos otra masa eléctrica *e'*, ó si se quiere, la unidad, porque de otro modo la propiedad de atraer ó rechazar de la masa eléctrica *e* no encontrará donde hacer presa, y permanecerá, si se nos permite esta manera de expresarnos, como un tentáculo recogido en la masa eléctrica *e*.

Este es el punto de vista astronómico de la atracción recíproca.

2.° Es otro punto de vista el de la *teoría potencial*, punto de vista un tanto extraño, y que como no traduzco literalmente el pasaje á que me refiero, procuraré hacer comprender á mis discípulos á mi manera. Se supone en esta hipótesis, que la fuerza eléctrica existe, aunque en el campo sólo aparezca un sólo cuerpo electrizado, sin que aparezca ante él otro segundo cuerpo electrizado también.

De esta hipótesis hemos prescindido al exponer en otras ocasiones la diferencia entre la electro-estática clásica y la moderna, porque, dicha sea la verdad, nos parece un tanto extraña; es como si la masa eléctrica *e* radiara de sí infinitos *tentáculos espirituales* que flotasen en el espacio constantemente buscando presa que asir para sus atracciones ó repulsiones.

Es una hipótesis, por decirlo de este modo, que flota entre la pura acción á distancia y la acción transmitida por intermedios materiales.

3.° Es punto fundamental el de la *polarización de los dieléctricos*. Se supone que los dieléctricos están constituídos

por celdillas que se electrizan por influencia. Si se considera un condensandor, las fuerzas que se ejercen entre las armaduras, serán debidas, no solamente á las cargas de las dos armaduras, sino á las cargas de las celdillas. Este es el punto de partida precisamente de la teoría de Poisson.

Atribuyendo á las celdillas el papel principal en este fenómeno, las fuerzas á distancia no representan entonces sino un papel mínimo; no se las puede, sin embargo, despreciar, porque entoncen habría que suprimir la influencia que ellas ejercen sobre las celdillas. Según parece, ésta es la idea de Helmholtz.

Más claro: en esta hipótesis, todavía subsiste la acción á distancia; pero su valor va disminuyendo considerablemente.

4.° Supresión de toda acción á distancia. En este caso, el campo consiste en una cierta polarización del dieléctrlco; pero esta idea de Maxwell resulta obscura para Hertz.

Podíamos continuar presentando otras muchas hipótesis, hasta no presentar ninguna, renunciando á todas ellas, como pretende la Escuela conceptualista, de que ha blamos en la conferencia anterior.

Mas como nuestro objeto no es hoy el de estudiar sistemáticamente la electro-estática y la electro-dinámica, sino el de presentar un somero avance de ambas ramas de la Física, marcando el sentido de la evolución en estos últimos tiempos, para ambas, nos limitaremos á presentar algo así como un ejemplo que haga comprender á mis alumnos, por decirlo así de una manera material, el caracter de la nueva Física de la electricidad.

*
* *

He aquí el ejemplo:

Supongamos (fig. 23) un cuerpo conductor *C*, con carga eléctrica inicial, ó sin ella, y dos masas eléctricas *A*, *B* fijas.

El problema de la electro-estática clásica, sería éste: Determinar la distribución de la electricidad que las masas *A, B* descompusieran en *C*, y de la carga inicial, si la hubiere, sobre la superficie de *C*, de modo que dicha capa superficial permanezca en equilibrio, y que no se descomponga más electricidad en el interior de *C*.

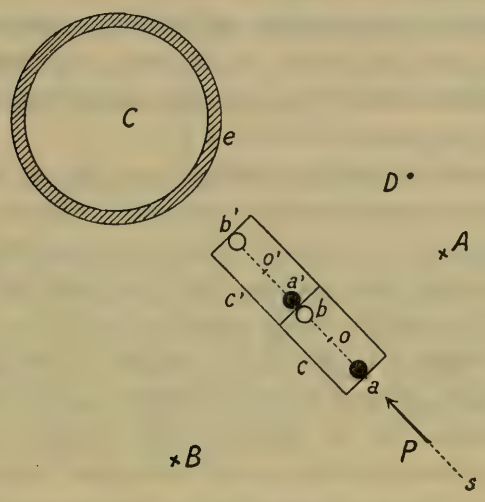


Figura 23.

Y conseguido esto, desde el punto de vista de la electro-estática clásica, sobre todo en su primer período, y antes de introducir el concepto de los dieléctricos, el problema estaba completamente resuelto.

Está resuelto, decimos, con determinar el espesor de la capa eléctrica en cada punto sobre la superficie de *C*.

Y de *A* no hay que ocuparse, ni de *B*, porque son masas fijas, ni hay que ocuparse del espacio que rodea á *A*, *B* y *C*, porque importa poco el valor abstracto que tenga en cualquier punto *D* la fuerza eléctrica é importa poco el valor de la potencial, pues para todos los puntos *D* ..... la acción eléctrica es, como acabamos de decir, puramente abstracta y

matemática, no puede hacer presa en elementos eléctricos que no existen, ni desequilibrarlos tampoco.

Pero en la electro-estática moderna no es así; el espacio en que *A*, *B* y *C* están, no es un espacio inerte; todo él es susceptible de recibir acciones eléctricas, en todo él pueden desarrollarse cargas de este flúido, y esas cargas pueden estar en equilibrio ó no estarlo.

De suerte que el problema del equilibrio se agranda enormemente; hay que buscar el equilibrio, repetimos, de las cargas eléctricas de *C*, y de las que se desarrollen en el campo en que suponemos colocados *A*, *B* y *C*.

Precisemos aún más las ideas, y para ello, de las hipótesis que antes enunciábamos, tomemos la hipótesis celular.

Sean, pues, *c* y *c'* dos celdillas del campo eléctrico, y lo que digamos de éstas podremos decir de todas las demás, es decir, de las infinitas celdillas que lo constituyen.

En la celdilla *c* existirá cierta cantidad de electricidad en estado neutro; pero las masas eléctricas *A*, *B* y la electricidad del conductor *C*, en un momento dado, producirá una fuerza eléctrica sobre la celdilla, cuya electricidad neutra se descompondrá, ni más ni menos que se descompone la electricidad neutra de *C*, como si *c* fuera un pequeño conductor.

Ahora bien; la fuerza *P*, con cuya dirección para facilidad de las explicacíones hemos orientado la celdilla, al descomponer la electricidad neutra de ésta, empujará á las dos electricidades de nombre contrario *a* y *b* hasta el límite de la expresada celdilla *c*, de la cual, por hipótesis, no pueden salir.

Lo mismo sucederá con la celdilla inmediata *c'*, en la cual la electricidad neutra se descompondrá en dos electricidades de nombre contrario *a'*, *b'*; y lo mismo para todas las celdillas del campo.

Con lo cual, el problema, como antes decíamos, aunque en el fondo es el mismo que antes, porque las hipótesis fundamentales son las mismas, se agranda enormemente, porque hay que buscar el equilibrio entre *A*, *B*, la capa eléctrica *e* de

C, y todas las masas parciales $a, b, a' b'$..... de las infinitas celdillas del campo.

Y podemos acudir á una hipótesis para simplificar el problema.

Podemos suponer que las masas a, b en que se descompone la electricidad neutra de c, masas que representaremos por $+ q$ y $- q$, son proporcionales á P, es decir, que la fuerza eléctrica descompone en las celdillas proporcionalmente á su intensidad.

Así, pues, si representamos por K una constante, tendremos

$$\text{masa eléctrica } b = q = KP.$$

Mediante esta hipótesis y las que hicimos al hablar de la electro-estática clásica, el problema, como problema de Física, no ofrece ninguna dificultad, aunque podrá ofrecer dificultades enormes, ó, por lo menos, muy grandes, cuando, planteado en términos matemáticos, se pretenda resolver el problema de análisis á que dé origen.

***

La celdilla c ha dado origen á una masa b, que hemos representado por q, y que empujada por la fuerza P, ha llegado á la pared de la celdilla sin poder traspasarla; pero otro tanto habrá sucedido en la celdilla c'; y así tendremos en la pared divisoria de ambas celdillas, y según vamos materializando el fenómeno para que hable á los sentidos, dos elementos eléctricos b y a', que evidentemente se ve que son de nombre contrario, porque la descomposición de la electricidad neutra en ambas celdillas debe ser análoga.

Ahora bien, las dos masas b y a', que son de signo contrario, y que hemos representado por q y q', darán una masa resultante representada $q' - q$.

Otro tanto podemos decir para todos los puntos del campo eléctrico.

Veamos ahora cómo se expresa $q' - q$.

Para la celdilla c hemos dicho que la masa b, que hemos representado por q, es proporcional á la fuerza P que determina la descomposición de la electricidad neutra y la polarización del campo eléctrico.

De suerte que hemos escrito

$$q = KP.$$

Y vamos á dar á P otra forma.

Como se trata de fuerzas eléctricas, que son funciones de la distancia, dichas fuerzas tendrán, como hemos explicado otras veces, una potencial, y tomando por eje de las s el eje de las dos celdillas, que es tomar la dirección de la fuerza eléctrica P, podemos escribir

$$P = -\frac{dV}{ds}$$

siendo V la potencial de todas las fuerzas eléctricas para cada punto, y, por lo tanto,

$$q = -K\frac{dV}{ds}$$

en que suponemos que el campo es homogéneo y que K es una constante.

Lo que hemos dicho para la celdilla c, podemos decir para la celdilla c' y para la masa eléctrica a'.

Sólo que, si para el punto o de la celdilla c la fuerza eléctrica era P, para el punto o' de la segunda celdilla será

$$P + \frac{dP}{ds}ds$$

y el valor de q' se expresará de este modo:

$$q' = K\left(P + \frac{dP}{ds}ds\right)$$

ó bien, puesto que

$$P = -\frac{dV}{ds},$$

$$q' = -K\left(\frac{dV}{ds} + \frac{d^2V}{ds^2}ds\right).$$

Y en resumen

$$q' - q = -K\left(\frac{dV}{ds} + \frac{d^2V}{ds^2}ds\right) + K\frac{dV}{ds} = -K\frac{d^2V}{ds^2}ds.$$

Por fin, si suponemos que la sección transversal de las celdillas es la unidad, y dividimos por ds para determinar la densidad eléctrica media, que representaremos por Q, podremos escribir

$$-\frac{1}{K}Q = \frac{d^2V}{ds^2}$$

y como el segundo coeficiente diferencial de V con relación á s, sabemos que es una invariante que se convierte cuando los ejes son x, y, z en

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

obtendremos para cada una de los infinitos puntos del campo eléctrico

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = -\frac{1}{K}Q$$

que es análoga á la fórmula de Poisson.

Observemos que este cambio de coordenadas, que hecho directamente daría lugar á cálculos enojosos, nos lo ha facilitado la fórmula de Green al demostrar que la expresión Δ es una invariante para todo sistema de ejes rectangulares.

*
* *

Y en rigor, el problema de la electro-estática moderna, al menos para el ejemplo tipo que hemos escogido, y que fácilmente puede generalizarse, queda ya completamente planteado en un sistema de ecuaciones, cuya resolución será más ó menos difícil; pero esto ya corre á cargo y es responsabilidad de las Matemáticas puras.

Y decimos que el problema queda planteado de este modo:

1.° Distribución de la capa eléctrica e en el conductor C, bajo la acción de las masas eléctricas fijas A, B, y de todas las masas Q, que habrán ido presentándose en el campo eléctrico.

2.° Equilibrio de las masas fijas A, B, en el cual no hay que pensar, porque por hipótesis son masas fijas.

3.° Equilibrio de las masas Q en cada punto del dieléctrico, ó digamos en general, del campo de electricidad.

Y al mismo tiempo que determinemos las condiciones de equilibrio, deberemos determinar la densidad eléctrica de cada punto de la capa eléctrica e, y el valor de las masas eléctricas Q.

Todos estos son elementos que están enlazados por las ecuaciones que hemos venido determinando.

En la conferencia anterior dijimos que la potencial en la capa e debía ser constante, y para ello determinamos:

1.° La potencial en cada punto de la capa, engendrada por la capa misma, lo cual nos introducía bajo la integral la densidad que era una función incógnita.

2.° Para cada punto de la capa eléctrica e, teníamos que determinar, además, la potencial de las masas exteriores A, B.

Pues ahora, á esos dos términos debemos agregar otro tercero, que será la potencial para el punto que estamos considerando en la capa e. de todas las masas eléctricas Q, que será una integral triple, puesto que ha de extenderse á todo el espacio del dieléctrico.

La suma de estos tres términos deberá ser igual á cero, ó más en general, á una constante, porque estos tres términos expresarán la potencial de la capa e.

Y en esta ecuación tendremos: bajo una integral, la función desconocida de x, y, z, ó si se quiere, de x, y, que expresa la densidad eléctrica de la capa e.

Y bajo otra integral, la cantidad eléctrica Q desarrollada en cada punto del campo eléctrico.

Esto, respecto al equilibrio de dicha capa e.

En la última ecuación que hemos obtenido

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = -\frac{1}{K} Q$$

no conocemos V, que es la potencial, en el centro de cada celdilla; pero podemos expresar fácilmente su valor en función de las otras incógnitas, porque en último análisis V será la potencial de la capa e, de todas las masas Q, y de las masas fijas A B relativa al punto o, y teóricamente esta expresión es bien sencilla.

Es decir, que en último análisis, no tendremos más que dos funciones desconocidas, la densidad eléctrica, φ (x, y) para cada punto de e, y el valor de Q (x, y, z) para cada punto del espacio del campo eléctrico.

Si se tratara de un problema elemental de Álgebra, diríamos que era relativamente sencillo: dos ecuaciones con dos incógnitas; pero tal como hemos planteado el problema, que es la primera idea que ocurre, ni es elemental, ni es sencillo.

Ni son ecuaciones ordinarias del Álgebra.

Ni siquiera son dos ecuaciones diferenciales con dos funciones f.

Son ecuaciones en que entran integrales, y bajo las integrales funciones desconocidas, que han de determinarse de modo que, al efectuar las integraciones, las integrales que resulten satisfagan á la ecuación de que formaban parte.

Esto ya lo aclararemos en esta misma conferencia, presentando un ejemplo elemental.

***

Demos forma á las ecuaciones que antes explicábamos, para que resulte más clara la explicación.

Ya sabemos que hay que establecer la condición de que en un punto cualquiera x', y', z' de la capa e, la potencial ha de tener el mismo valor, un valor constante, y para ello determinemos la forma de la potencial en dicho punto.

1.° Ya sabemos, por la conferencia precedente, que la potencial de toda la capa e en el punto x', y' puede ponerse bajo esta forma general:

$$\int\int \varphi(x, y)\, \psi(x, y, x', y')\, dx\, dy \qquad (a)$$

en que se han eliminado z y z', porque son funciones de x, y, x', y' deducidas de la ecuación de la superficie.

La integral se ha de extender á toda la superficie e, ó si se quiere, al área de su contorno aparente sobre el plano de las x, y; teniendo en cuenta, por de contado, los diferentes valores de z.

Claro es que, efectuada esta integración, el resultado sólo contendrá x', y'.

2.° Sabemos asimismo que la potencial de las masas

fijas A, B....., con relación al punto x', y', tienen la forma

$$\Sigma \frac{A}{r}$$

ó bien

$$\Sigma \frac{A}{\sqrt{(x'-a)^2+(y'-b)^2+(z'-c)^2}} \qquad (b)$$

en que Σ se extiende á todas las masas fijas; y si éstas ocupan espacios continuos, dicha Σ será una suma de integrales.

a, b, c..... son las coordenadasde los diferentes puntos en que están las masas fijas A....

Claro es, por lo demás, que z' puede eliminarse en función de x', y' por medio de la ecuación que expresa analíticamente la superficie en que se halla la capa e.

Es evidente, que toda esta expresión (b), será lo mismo que (a) una función perfectamente conocida de x', y'.

3.° Y si las dos expresiones anteriores eran las únicas que entraban en la potencial cuando el espacio era inerte, en este nuevo problema habrá otro tercer término, que será

$$\int\int\int \frac{Q\,dx\,dy\,dz}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \qquad (c)$$

en cuya expresión la integral triple se extiende á todo el espacio, ó por lo menos al dieléctrico: x, y, z son las coordenadas de un punto cualquiera del espacio, que desaparecerán cuando se efectúe la integración.

V, como hemos dicho, viene definida por la ecuación

$$\frac{d^2 V}{dx^2}+\frac{d^2 V}{dy^2}+\frac{d^2 V}{dz^2}=-\frac{1}{K}Q \qquad (d)$$

y por fin, V es el valor de la potencial en el punto x, y, z: sobre este valor algo diremos en breve.

Reuniendo las tres expresiones (a) (b) (c), tendremos

$$(1) \qquad \int\int \varphi(x, y)\, \psi(x, y, x', y')\, dx\, dy +$$

$$+ \Sigma \frac{A}{\sqrt{(x' - a)^2 + (y' - b)^2 + (z' - c)^2}} +$$

$$+ \int\int\int \frac{Q\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} = C$$

en que C es una constante, por el pronto arbitraria.

Lo dicho es repetir, escribiendo las fórmulas, lo mismo que antes explicábamos en términos generales.

Esta es la ecuación que podemos llamar ecuación integral, en que la incógnita fundamental del problema es $\varphi(x, z, y)$, es decir, la densidad en cada punto de la capa (e), y hay que fijarla de modo que en el primer miembro, en el que después de efectuadas las operaciones no deben quedar más que x', y', en dicho primer miembro, repetimos, desaparezcan estas variables y no quede más que una constante C, la cual podrá determinarse en cada caso, según explicábamos en la conferencia anterior, ya igualando á o la suma total de los elementos diferenciales de la capa de que se trata, si el cuerpo se hallaba en estado neutro, ya igualando dicha suma de elementos eléctricos á la carga inicial.

Para ello será preciso que φ contenga una constante arbitraria que satisfaga estas últimas condiciones; pero conocida que sea podrá servinos para conocer C.

Esplicamos todo esto, por ahora, en términos generales.

*
* *

Mas aquí aparece una nueva complicación, y es que Q está definida por la ecuación (d), en la cual entra V, ó sea la potencial en un punto cualquiera del espacio.

Pero esta potencial, como decíamos hace un momento, se expresa fácilmente, porque será la potencial en el punto x, y, z, primero, de la capa e; segundo, de las masas fijas; tercero, de todas las cantidades Q del espacio mismo.

Es decir, que llamando x, y, z las coordenadas de un punto cualquiera de dicho espacio, x_1, y_1, z_1 las de un punto cualquiera de la capa e en las nuevas integraciones que hay que efectuar, que por eso les ponemos subindice y asimismo x_2, y_2, z_2 las de un punto del espacio en la integral triple, tendremos para la expresión de V

$$\iint \frac{\varphi(x_1, y_1)\, d\omega}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}} +$$

$$+ \Sigma \frac{A}{\sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2}} +$$

$$+ \iiint \frac{Q_2, dx_2, dy_2, dz_2}{\sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2 + (z_2 - z)^2}} = V \quad (2)$$

En esta expresión, es claro que $d\omega$ representa el elemento de área de la capa (e); además, hemos llamado $x_2\, y_2\, z_2$ á las coordenadas de un punto cualquiera del espacio, según hemos dicho, porque á estas integrales ha de referirse la integral triple, al paso que en esta integración x, y, z son constantes, porque estamos tomando la potencial de todo el sistema con relación á este punto.

Asimismo hemos puesto Q_2, que será una función desconocida de $x_2\, y_2\, z_2$, dándole subacento para distinguirla de la cantidad Q que se refiere al punto x, y, z.

En suma, las ecuaciones del problema son: (1) (2) y (d), y si de esta última se elimina V por la ecuación (2), no que-

darán más que dos ecuaciones con dos funciones desconocidas, á saber: $\varphi(x, y)$ para la superficie (e), que expresará la densidad eléctrica en cada punto de esta capa;

y $Q(x, y\, z)$, ó sea la densidad en cada punto del dieléctrico. Según decíamos, son dos ecuaciones con dos funciones desconocidas, pero de una complicación y de una dificultad verdaderamente enorme.

Con lo cual se puede imaginar cuál sería la dificultad si en vez de un cuerpo conductor hubiera varios.

Claro es que todo lo que hemos expuesto no supone la pretensión de dar una solución al problema, sino de orientar en cierto modo el pensamiento de mís alumnos, como vamos á explicar en seguida.

***

No es la primera vez que advertimos á nuestros discípulos y á nuestros lectores, que al dar en clase, y publicar después estas conferencias, nuestro objeto es intentar la formación de una enciclopedia, que abarque lo más fundamental de la Física-matemática clásica y de la Física-matemática moderna.

Decimos *intentar*, y sólo intentar, llegando en nuestro trabajo hasta donde nuestras fuerzas alcancen.

Empresa aun así, sobradamente orgullosa, y á la vez justamente modesta.

Orgullosa, porque lo es, dado lo inmenso y lo difícil de la materia, sean cuales fueren las limitaciones que le pongamos.

Y á la vez modesta, decimos, por varias razones.

En primer lugar, porque no nos dirigimos á los maestros, á los que no tenemos la pretensión de enseñar nada nuevo, si bien en las críticas que hagamos de esta gran disciplina científica habrá ideas que consideramos propias.

De todas maneras, á los discípulos nos dirigimos, procurando allanarles el camino, desde los conceptos matemáticos más elementales, hacia las más elevadas cúspides de la ciencia moderna.

Allanar el camino, facilitar la marcha, hacer accesibles las cúspides á cuantos en España se dedican á estas materias, porque es evidente que muchos encontrarían grandes dificultades para marchar por sí solos.

En suma, como repetidas veces hemos dicho, estas conferencias constituyen una propaganda científica en España, que tan necesitada está de ello; propaganda, decimos, de la alta ciencia, llegando hasta donde podamos llegar, é invitando á otros á que continúen este viaje sin término.

Pero, en la difícil empresa, otro propósito nos anima, y es el de despertar las espontaneidades de la juventud.

Conveniente y aun necesario es el estudio de las obras de los grandes maestros y, en general, de los creadores de la Ciencia.

Conveniente, necesario, ineludible es estudiar lo que otros hacen, pero sin perder cada cual sus propias espontaneidades, pocas ó muchas, porque, de otra suerte, se adquiere erudición científica, pero nada más.

Debe crear el que tenga fuerzas para crear, y el que no las tenga no debe limitarse á aprender de una manera pasiva lo que otros han creado.

Debe apropiarse, asimilarse de tal manera el jugo científico que llegue á tener la ilusión de que aquello que aprende, él mismo lo inventa y lo crea, como si la obra del maestro que estudia no fuera más que el despertador de sus propias energías.

Y lo que antes explicábamos á propósito de la electro-estática, es un ejemplo práctico de lo que acabo de decir.

Es la solución que se le ocurriría á un joven discurriendo por sí solo sobre los datos del problema.

Más adelante, en otras conferencias, en otro curso, estudia-

remos los trabajos que han ido realizando maestres insignes.

Pero estas primeras ideas, este intento de solución, dará sentido y valor á otras soluciones más perfectas.

Cuanto acabamos de exponer, tendrá asimismo sentido y valor más adelante.

Por ahora, contentémonos con estos primeros avances de una empresa difícil y laboriosa.

***

Y vamos á concluir esta conferencia con dos observaciones y un ejemplo.

Primera observación. En la teoría antes expuesta, hemos admitido que q y q', es decir, las dos cantidades de electricidad de nombre contrario, desarrolladas en dos celdillas consecutivas, á lo largo de una línea de fuerza, eran desiguales.

Si fueran iguales se destruirían, Q sería igual á o, y la ecuación (d) se reduciría á la de Laplace

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = o$$

Y continuando el estudio del problema en esta hipótesis particular, vendríamos á parar á los métodos ordinarios que se exponen para esta hipótesis, y á varios teoremas fundamentales que estudiaremos en otro curso.

Segunda observación. Esta observación ya la hicimos antes, pero no hay que olvidarla; se refiere á que en toda esta teoría de la potencial, las distancias r de un elemento eléctrico cualquiera, al punto para el que se está calculando dicha potencial, dichas distancias r, repetimos, entran en el denominador, y cuando se anulan, el elemento diferencial se presenta bajo forma infinita; la integral cae ó parece caer en

defecto, lo cual exige un estudio especial, porque de lo contrario estaremos manejando fórmulas que no tendrán sentido ó significación, ó que no estaremos seguros que tengan significación ni sentido.

Este problema, como ya hemos anunciado, hemos de estudiarlo en una conferencia especial.

*
* *

Y vamos á terminar presentando un ejemplo.

Un ejemplo del tipo especial á que nos han conducido las ecuaciones antes establecidas, en las que la función desconocida se encuentra bajo una integral.

Esta teoría se estableció por Fredholm.

Cuando llegue el momento oportuno la estudiaremos con el detenimiento que merece.

Pero mientras este momento llega, si llega alguna vez, y por si mis alumnos quieren anticíparse á tales explicaciones, citaré dos obras en que pueden satisfacer su curiosidad, y son éstas:

1.ª *Exercices et leçons d'Analise par R. d'Adhémar.*

2.° *L'équation de Fredholm et les problemes de Dirichlet et de Neumann,* del mismo autor.

El ejemplo que vamos á presentar es elemental, sencillísimo, y sólo tiene por objeto dar una idea de la naturaleza y del carácter, por decirlo así, de estos nuevos problemas.

Tal ejemplo no es el de Fredholm; pero, si puedo expresarme de este modo, es un miembro modestísimo de la familia.

Sea la ecuación

$$\int_0^a \varphi(x) \cos zx \cdot dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos a(1+z)-1}{1+z} + \frac{\cos a(1-z)-1}{1-z}\right]$$

en la que $\varphi(x)$ es una función completamente desconocida.

x es la variable de la integración.

a es una cantidad conocida.

Y z una magnitud cualquiera.

El problema consiste en determinar la forma de $\varphi(x)$, de tal suerte que, efectuada la integración del primer miembro, resulte el segundo. Como si digéramos: despejar $\varphi(x)$.

Claro es que fijando la forma de $\varphi(x)$, y efectuada la integración, la x desaparecerá, y no quedarán en el segundo miembro más que z y la constante a.

Pertenece, pues, este ejemplo á las ecuaciones que pudiéramos llamar ecuaciones integrales, es decir, en que la función ó las funciones desconocidas entran bajo el signo integral y de ellas depende la integración.

¿Qué operaciones hay que efectuar con estas funciones para obtener el segundo miembro?

Precisamente una integración.

Pero, ¿cómo se ha de efectuar la integración, si no se conoce la forma de φ?

Precisamente esta es la dificultad del problema.

Es forzoso, volvemos á repetirlo, dar una forma á φ tal, que, efectuada la integración, resulte el segundo miembro.

Ni más ni menos que en una ecuación cualquiera hay que sustituir en vez de la incógníta un valor tal, que, efectuando sobre él las operaciones que la misma ecuación indica, resulte el segundo miembro, ó, si se quiere, que la ecuación quede satisfecha.

Sólo que en este caso las operaciones son mucho más complicadas, porque es forzoso hallar una integral.

El ejemplo anterior es, sin embargo, tan elemental, que la solución se encuentra inmediatamente.

La ecuación en último análisis ha de convertirse en una identidad, luego podremos dar á z un valor cualquiera.

Démosle el valor $z = o$, y tendremos que la ecuación se reducirá á la siguiente:

$$\int_o^a \varphi(x)\,dx = -\cos a + 1,$$

porque $\cos z\,x = \cos o = 1$.

Ahora bien; diferenciando la ecuación precedente con relación á a, según la regla bien conocida de cálculo integral, tendremos

$$\varphi(a) = \operatorname{sen} a.$$

Luego ya conocemos la forma de φ, y la ecuación fundamental se convertirá en ésta:

$$\int_o^a \operatorname{sen} x \cos zx \,.\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos a\,(1+z)-1}{1+z} + \frac{\cos a\,(1-2)-1}{1-2}\right]$$

que, en efecto, es una identidad, como se comprueba efectuando la integración del primer miembro, cuyos cálculos elementales desarrollamos á continuación.

La expresión $\operatorname{sen} x \cos zx$ puede ponerse bajo esta forma

$$\operatorname{sen} x \cos zx = \frac{1}{2}\Big(\operatorname{sen} x\,(1+z) + \operatorname{sen} x\,(1-z)\Big)$$

luego

$$\int_o^a \operatorname{sen} x \cos zx\,dx = \frac{1}{2}\int_o^a \operatorname{sen} x\,(1+z)\,dx + \frac{1}{2}\int_o^a \operatorname{sen} x\,(1-z)\,dx$$

é integrando

$$\int_o^a \operatorname{sen} x \cos zx\,dx = \left[-\frac{1}{2}\,\frac{\cos x\,(1+z)}{1+z} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos x\,(1-z)}{1-z}\right]_o^a$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos a\,(1+z)-1}{1+z} + \frac{\cos a\,(1-z)-1}{1-z}\right]$$

y por fin

$$\int_o^a \operatorname{sen} x \cos zx\, dx = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos a(1+z)-1}{1+z} + \frac{\cos a(1-z)-1}{1-z}\right]$$

que prueba la identidad de los dos miembros cuando en la ecuación propuesta se sustituya

$$\varphi(x) = \operatorname{sen} x.$$

Así, pues, sen x es la función que buscábamos.

Damos con esto por terminadas las aplicaciones de la fórmula de Green, y en la conferencia próxima estudiaremos la fórmula de Stokes.

XLII. — El Museo del Instituto Oceanográfico de Mónaco.

Por Joaquín G. Hidalgo.

La inauguración de dicho Museo, verificada el 29 de Marzo de 1910, ha sido un acontecimiento científico de importancia y un éxito de los más grandes para su fundador el Príncipe Alberto I de Mónaco. Los que hemos tenido ocasión de presenciarla, admirando la grandiosidad del edificio, las novedades científicas en él contenidas y la elevación de ideas que ha presidido á su fundación, hemos visto con placer retratado el entusiasmo en el semblante de una multitud selecta, compuesta en su mayoría de ex Presidentes de República, Ministros, Embajadores, Almirantes, Académicos, Directores de Museos, Profesores y Naturalistas de todas partes (1), y al mismo tiempo reflejada la satisfacción en el rostro del Príncipe por haber sido comprendido, que es lo que más estiman los verdaderos hombres de ciencia.

Allí, en el interior del Museo y en sus magníficos salones, están ya colocados multitud de objetos que tienen relación con la nueva ciencia á que se da el nombre de Oceanografía, que en breve se aumentarán con otros muchos aun no colocados y con los que se vayan adquiriendo sucesivamente.

La ciencia oceanográfica, constituída hoy día por los trabajos y exploraciones científicas de los navegantes, de los geógrafos y de los naturalistas, con más intensidad, continuidad y medios durante todo el siglo XIX y lo que va del

(1) Véanse sus nombres en el *Petit Monegasque*, de Mónaco, en el *Journal d'Alsace Lorraine*, de Strasbourg, y en la prensa periódica de diversos paises.

presente, ha tenido, sin embargo, un larguísimo y lento período de gestación y de evolución, que puede decirse principia en la actual época geológica, y del cual daremos breve idea haciendo ver cómo se han ido sucediendo hechos muy conocidos hasta llegar á constituir la ciencia para la cual se ha erigido hoy tan suntuoso templo.

Desde los tiempos más remotos, y en cuanto el hombre ideó útiles á propósito para la navegación, aunque primitivamente muy imperfectos, han sido los mares la única vía que han tenido los habitantes de los grandes continentes del globo para trasladarse á las islas más próximas, y después, más perfeccionados aquéllos, á otras más lejanas, para ir más tarde de unos continentes á otros y á todas sus costas, como está sucediendo en la actualidad.

Las más antiguas traslaciones, y aun algunas más modernas, verificadas sobre todo por las distintas razas humanas pobladoras del Asia y Europa, fueron debidas indudablemente á causas accidentales, como las corrientes y tempestades marinas, que llevaron á puntos más ó menos distantes á los que en pequeñas embarcaciones buscaban su sustento en el mar por medio de la pesca, ó habían iniciado un cambio de productos entre lugares no muy lejanos. Y esta suposición no deja de tener algún fundamento, pues hay motivos para creer que el hombre fué desde el Norte de Europa á América y las Azores, á través del Atlántico, y desde el Asia á América, por el Pacífico (antes del descubrimiento del continente americano por Colón), según algunas señales de su paso por dichos sitios y cierta semejanza de los monumentos de los antiguos mejicanos con los que son característicos de varios pueblos del Asia.

En épocas más modernas, pero en las cuales los pueblos cuya historia se conoce habitaban parte del Asia, de Europa y el Norte de África, fueron el mar Mediterráneo, el mar Rojo y el golfo Pérsico, los medios de comunicación entre los países situados alrededor de los mismos, y estas comu-

nicaciones tenían por objeto el comercio ó la fundación de colonias, según lo hicieron los fenicios en el Mediterráneo, ó las guerras de conquista, como la invasión de los árabes en distintas direcciones, hasta llegar al Occidente de Europa. Con la expulsión de éstos de su último refugio, de España, coincidió el descubrimiento de América por Cristóbal Colón, atravesando el Atlántico, persiguiendo su idea de encontrar un camino más corto para las Indias Orientales, y en la suposición de que la tierra tendría la forma esférica y no plana, como se creía en la antigüedad.

Realizado uno de los descubrimientos más importantes hechos por el hombre, y tan glorioso para Colón como para España y su Reina Isabel la Católica, los españoles y portugueses familiarizados con el terrible oleaje del mar Cantábrico (donde, según el célebre navegante Dumont d'Urville, se forman las olas más altas que ha conocido) y el de las costas portuguesas, se lanzaron atrevidos en busca de nuevos territorios, en embarcaciones todavía muy frágiles, y gracias al arrojo de Magallanes, Sebastián Elcano, Vasco de Gama, Vasco Núñez de Balboa, Pizarro, Hernán Cortés, Jorge Juan y otro gran número que atravesaron el Atlántico desde la Península á la América central, ó bajaron por el Occidente de África, ó dieron la vuelta desde la Florida en el océano Atlántico hasta California en el océano Pacífico, volviendo varios desde este mar al punto de partida, se descubrieron muchos de los países que hoy día figuran en todas las cartas geográficas.

El célebre Magallanes, que pasó al Pacífico por el estrecho que ha recibido su nombre, y al cual dieron muerte los indígenas de Filipinas, no pudo ver el fin de su viaje como su compañero Sebastián Elcano, natural de Guetaria, en el Norte de España, á quien cupo la gloria de ser el primero que dió la vuelta al mundo, con lo cual quedó demostrada la forma esférica de la tierra.

Desde esa época los mares han sido surcados en todas

direcciones por los europeos habitantes en los países que tienen costas en el Atlántico, ingleses, franceses, holandeses, etcétera, además de los de la península hispano-lusitana, y esas expediciones han tenido uno de tres fines, ó todos á la vez: interés comercial, interés científico, ó sea descubrimientos geográficos, ó adquisición de territorios; y gracias á ellas hoy día se conocen grandes continentes y grandes y pequeñas islas enteramente ignoradas de los antiguos pueblos del Asia y de Europa, á saber: toda América, Australia, parte del África, la Malasia, Melanesia, Micronesia y Polinesia y además su situación geográfica, sus dimensiones, su topografía, sus costas, sus habitantes, sus productos, etcétera. Pero aun falta que explorar regiones determinadas de esos países, entre ellas el interior del África y de la América del Sur (exploraciones que harán los vlajeros terrestres) y las regiones polares árticas y antárticas, con cuyo exacto conocimiento se ha de completar la larga serie de beneficios que han prestado á la ciencia geográfica y á la humanidad los incansables y esforzados marinos de todos los países.

Al retorno de las expediciones hechas en diversas direcciones iban llegando á Europa ejemplares de animales y plantas propios de la fauna y flora de esos países lejanos, distintos de los del continente europeo y parte occidental de Asia, los cuales fueron coleccionados por diferentes personas ó por algunos Museos, y dados á conocer en diversas obras publicadas por Lonicer, Rondelet, Gesner, Aldrovandi, Bonanni, Lister, Petiver, Rumph, Barrelier, Sloane, Hill, Valentyn, Adanson, Regenfuss, Gualtieri, Seba y otros, desde el año 1555 hasta mediados del siglo XVIII, en que floreció el célebre Linné. Este príncipe de los naturalistas, con su genio y con su talento, reunió los datos conocidos, agregó otros muchos, metodizó y vulgarizó su conocimiento, y desde entonces empezó la serie de exploraciones histórico-naturales, ya con este exclusivo objeto, ya atendiendo al mismo tiempo á

las transacciones comerciales ó á otros de los fines antes indicados.

Dado el impulso por Linné, y aumentado el gusto por la historia natural gracias á los trabajos de eminentes zoólogos franceses, como Buffon, Cuvier, Geoffroy, Lamarck, Blainville, Latreille y otros, han sido desde entonces innumerables las expediciones hechas en todo el siglo XIX para la adquisición de los seres naturales que viven en las diferentes regiones del globo, y enorme el material científico traído para su estudio y que llena hoy día los estantes y vitrinas de grandes Museos y de muchas colecciones particulares, pues se han recorrido los valles y las montañas y se han registrado los ríos, lagos y las orillas ó profundidades del mar en los puntos visitados. En la nota que abajo se incluye (1)

---

(1) Los principales buques en que se han hecho expediciones científicas son los siguientes:

Albatross.—Atlántico y Pacífico.
Alert. – Patagonia.
Amelia. – Portugal.
Astrolabe. – Alrededor del mundo.
Beagle.—Idem.
Bélgica. –Región antártica.
Blake.—Atlántico, Golfo de Méjico.
Bonite.—Alrededor del mundo.
Caudan.—Golfo de Gascuña.
Challenger. – Alrededor del mundo.
Chazalie. – Antillas, Canarias, Madera.
Coquille.—Océano Pacífico.
Curaçao.—Polinesia.
Eider. – Mediterráneo.
Eugenie. – Alrededor del mundo.
Favorite.—Asia y Malasia.
Fox. – Región ártica.
Gazelle.—Islas del Pacífico.
Herald.— Alrededor del mundo.
Hirondelle.—Atlántico.
Lightning. — Norte del Atlántico.
Magenta. — Alrededor del mundo.
Melita.—Atlántico y Mediterráneo.
Michael Sars. — Norte del Atlántico.
Nassau.—Magallanes y Patagonia.
Novara.—Alrededor del mundo.
Numancia.—América del Sur.
Pola. – Mediterráneo.
Porcupine.—Atlántico y Mediterráneo.
Princesse Alice.—Atlántico.
Princesse Louise. — Alrededor del mundo.
Samarang.—Malasia.
Seniavine.—Alrededor del mundo.
Siboga.—Malasia.

puede ver el lector una *incompleta* relación del nombre de los buques ó de los naturalistas que recordamos en este momento, con indicación abreviada de los sitios donde verificaron sus investigaciones. Se han dado á conocer los resul-

---

Southern Cross.—Región antártica.
Sulphur.—Alrededor del mundo.
Talismán.—Atlántico y Mediterráneo.
Thetis.—Océano Pacífico.
Travailleur.—Atlántico y Mediterráneo.
Tritón.—Hebridas y Faroes.
Uranie.—Alrededor del mundo.
Valdivia.—Atlántico, Oc. índico, islas del Sur.
Valorous.—Norte del Atlántico.
Vega.—Mares árticos.
Vettor Pisani. — Alrededor del mundo.
Venus.—Alrededor del mundo.
Violante.—Mediterráneo.
Wild Duck. — Bahamas.
Willem Barents.—Atlántico.

Expedición antártica francesa.
— — belga.
— prusiana al Asia oriental.
— holandesa á la Nueva Guinea.
— sueca al Spitzberg.
— de los Estados Unidos.
— á Sumatra.
— á Morea.
— danesa á Siam.
— noruega al Norte del Atlántico.
— de los Estados Unidos al Japón.
— á Borneo.
Misión al Cabo de Hornos.
— á Méjico.

Los naturalistas y viajeros que han explorado diferentes puntos del globo, son los siguientes:

Adanson.—Senegal.
Agassiz.—Atlántico de los Estados Unidos.
Arango.—Cuba.
Azara.—Paraguay.
Baranda.—Filipinas.
Beccari. — Borneo, Molucas, Nueva Guinea.
Belanger.—Indias Orientales.
Bennett.—Australia, Batavia, China.
Bodwich.—Madera, Puerto Santo, El Cabo.
Borelli. — Bolivia, Rep. Argentina.
Brancsik.—Nueva Guinea.
Castelnau.—Brasil, Bolivia, Perú.
Coste.—Francia, Italia.
Cousin.—Ecuador.
Crossland.—Zanzibar, Este Africa.
Decken.—Africa oriental.

tados de casi todas esas exploraciones, y algunas de las obras publicadas son, por el texto y por las láminas, verdaderamente monumentales.

Se puede establecer una línea divisoria entre todas las

Descourtilz.—Norte América, Antillas.
Deshayes.—Argelia.
Drouet.—Azores.
Dybowski.—Lago Baikal.
Eichwald.—Mar Caspio.
Ehrenberg.—Norte Africa, Oeste Asia.
Faurot.—Mar Rojo.
Folín.—Africa occidental.
Forbes.—Mar Egeo.
Forskael.—Oriente.
Gillis.—Hemisferio Sur.
Graells.—Norte España.
Gundlach.—Cuba, Puerto Rico.
Hagg.—Spitzberg.
Harriman.—Alaska.
Heude.—China.
Hirase.—Japón.
Humboldt.—América central.
Ingegerds.—Jutlandia.
Issel.—Mar Rojo, Suez.
Jagor.—Filipinas.
Jardín.—Marquesas.
Juan y Ulloa.—América Sur.
Kossmann.—Mar Rojo.
Kukenthal.—Molucas, Borneo.
Labat.—Islas de América.
Laperouse.—Alrededor del mundo.
La Sagra.—Cuba.
Lowe.—Madera, Puerto Santo.
Mac Andrew.—Atlántico, Mediterráneo, Mar Rojo.
Marión.—Mediterráneo.
Martínez.—América del Sur.
Meyer.—Malasia y Polinesia.
Michelena.—Norte de la América del Sur.
Milne Edwards.—Sicilia.
Mobius.—Mascarenas y Seychelles.
Mociño.—América central.
Montrouzier.—Nueva Caledonia
Morelet.—Cuba.
Orbigny.—Canarias, América del Sur.
Paz.—Cuba, América del Sur.
Perry.—China y Japón.
Poey.—Cuba.
Pollen.—Madagascar.
Poteret.—Chile, Perú, Filipinas.
Pourtales.—Gulf Stream.
Quadras.—Filipinas, Marianas.
Quiroga.—Río de Oro.
Rein.—Japón.
Ross.—Región antártica.
Ruiz y Pavón.—Perú.
Sarasin.—Molucas, Celebes.
Schomburghk.—Orinoco, Guyana.
Schrenck.—Amur, Norte Japón.
Semper.—Filipinas.
Sonnerat.—Nueva Guinea.
Spix.—Brasil.
Steenstrup.—Atlántico.
Tams.—Guinea.
Valentia.—India, Ceilán, Mar Rojo.
Vesco.—Africa occidental.
Wallace.—Malasia.
Webb.—Canarias.
Weber.—Indias holandesas.
Wied-Neuwied.—Brasil.

Y otro gran número que sería prolijo enumerar.

exploraciones mencionadas, separando en un grupo las que fueron llevadas á cabo antes de extraerse del fondo del Mediterráneo los dos extremos de un cable sumergido á *gran profundidad* (para componer su rotura), en los cuales se encontraron adheridos seres vivos, y en otro grupo las verificadas después de este hallazgo. De las primeras expediciones anteriores á ese hecho se habían traído á Europa muchos seres marinos sacados á profundidades poco considebles, siendo general la creencia de que no era posible la vida animal en sitios más profundos por la falta de luz, mayor presión, etc.; pero la existencia de seres vivos adheridos al cable extraído de muy hondo, despertó la curiosidad de los hombres de ciencia, y desde entonces las exploraciones posteriores se hicieron con aparatos ideados para recoger los objetos que hubiera en las grandes profundidades. Así se verificó con buques de alto bordo y bien preparados para tal objeto y se obtuvieron de los abismos del mar seres nuevos, muchos de formas extrañas y curiosas, que ya están descritos y figurados en multitud de obras publicadas.

Y no se ha limitado á la historia natural de los grandes fondos la investigación científica, sino que se está estudiando todo lo relativo al medio líquido en que habitan multitud de seres vivos. Se analizan las aguas de los mares para saber las substancias que contienen en grandes y pequeñas cantidades, la densidad y composición de las mismas, y su proporción en un metro cúbico; se inventan aparatos para medir el ácido carbónico, el oxígeno y nitrógeno que existe, para apreciar la penetración de la luz en el agua, para medir las corrientes y la dirección de las mismas, para recoger el agua de sitios más ó menos profundos, para medir con exactitud las diferentes profundidades y para traer á la superficie muestras del terreno ó de los depósitos que hay en el fondo del mar, por medio de sondas de diferentes sistemas. También se aprecia el color de las aguas, su temperatura en las partes altas y bajas y se multiplican los sondeos en todas

direcciones para obtener la topografía del fondo de los mares y comparar las mayores profundidades de los mismos con las mayores alturas que presentan las montañas de los continentes. Se perfeccionan las dragas empleadas en la recolección de los objetos naturales, las redes para pescar en plena velocidad y se inventa un tubo fosforescente para colocar en las Nasas y atraer á ellas á los seres marinos.

Otras muchas cuestiones ocupan igualmente la atención de los exploradores del mar en los tiempos presentes; la corriente del Gulf Stream, las corrientes profundas y superficiales del Atlántico Norte, las curvas barométricas obtenidas durante la navegación, la alimentación de los náufragos en alta mar, las corrientes profundas del Océano, un proyecto de observaciones meteorológicas en el Atlántico Norte y la creación de observatorios de dicha índole en las islas, comunicando con el continente por medio de cable, la distribución batimétrica de algunos animales, la geografía biológica marina, el lanzamiento de globos sondas y pilotos por encima del Océano, etc.

Todo lo que se acaba de citar y la descripción de los seres vivos encontrados en los mares del globo ó en los países descubiertos y adonde se ha llegado por medio de la navegación, se puede decir que es obra de siglo y medio, y para ello se han necesitado grandes medios y el concurso de muchos hombres científicos. Ocupa, entre éstos, un lugar preeminente el Príncipe Alberto I de Mónaco. Este Príncipe inteligente, simpático por su cultura y por su trato, es un buen ejemplo para demostrar los excelentes resultados que se obtienen en la investigación y producción científicas cuando á ciertas y determinadas condiciones antropológicas va unida la influencia del medio, y ésta es completamente favorable. Perteneciendo el Príncipe de Mónaco á la marina de guerra española durante algunos años, en los cuales ya se acostumbró á los viajes por mar; discípulo después del célebre Broca (autor del magnifico estudio sobre los cráneos de los vas-

cos españoles), con lo cual adquirió gusto por las ciencias naturales; enterado más adelante de las exploraciones marinas llevadas á cabo por diversos hombres de ciencia, y poseedor, además, de bienes de fortuna considerables, no es de extrañar que todo este conjunto de circunstancias determinara en su ánimo el propósito de dedicarse por completo á investigaciones marítimas, como lo verificó y sigue verificando con notable éxito durante gran número de años en sus barcos *L'Hirondelle* y la *Princesse-Alice*, acondicionados expresamente para tal objeto.

Si bien sus exploraciones han sido continuación de las de otros hombres de ciencia, tuvieron desde el principio un carácter y una finalidad distintas de las anteriormente verificadas, ó sea su constancia en repetirlas (pues lleva hechas 22 desde el año 1885 hasta el presente, y siempre dirigidas por él mismo) y su idea altruista de reunir después en un gran centro, con medios suficientes para su sostenimiento futuro, todos los materiales y datos obtenidos, y que éstos se hallen siempre á disposición de los sabios de todos los países para su ilustración y para su estudio.

Mr. J. Richard, el celoso y activo Director del Museo construído, ha consignado en un libro y en un folleto titulados *Les Campagnes scientifiques de S. A. S. le Prince Albert I de Monaco* y *Le Musée Oceanographique de Monaco*, todo lo relativo á las expediciones hechas, á los aparatos é instrumentos empleados (alguna vez modificados ó inventados por el mismo Príncipe), á las publicaciones de éste y de los especialistas que se han encargado de la descripción de los animales recogidos, de estudios anatómicos acerca de algunos de ellos, de análisis de aguas del mar, de la naturaleza de los cuerpos inorgánicos extraídos de los grandes fondos, etcétera. Da también interesantes noticias sobre la construcción del Museo, su distribución y objetos en él colocados hasta el presente, con 116 grabados en que se representan los buques exploradores, aparatos empleados y los se-

res más notables hallados durante todas las expediciones.

Tan interesantes fueron éstas desde su principio y las publicaciones del Príncipe Alberto, que al poco tiempo, en 1889, la Real Academia de Ciencias de Madrid le nombró miembro corresponsal á propuesta de varios Académicos, ya difuntos, y el que aun vive para referirlo.

Las Memorias publicadas hasta ahora son en gran número, se imprimen también á expensas del Príncipe con verdadero lujo en el texto y las láminas, y muchas están redactadas por especialistas acreditados. Respecto á las que tratan de moluscos, de cuya materia algo entendemos, podemos asegurar que están bien hechas, pues son debidas á Bergh, Joubin, Fischer, Vayssiere y Dautzenberg, malacólogos bien conocidos, y con muchos de los cuales tenemos amistad y relaciones científicas desde hace tiempo. De varias dimos ya cuenta hace seis meses en el tomo XV de las *Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid.* (Páginas 1096, 1128 y 1217.)

El Museo Oceanográfico ha sido construído en uno de los sitios más bellos de la costa del Mediterráneo, en la zona comprendida entre Cannes y Menton, con montes á un lado y el mar al otro, hermoseada por la mano del hombre con millares de blancas villas y hoteles que se destacan sobre la vegetación que las rodea, y embellecidas por multitud de palmeras, construcciones á cual más variadas y que en algunos sitios, Montecarlo, por ejemplo, se hallan asentadas sobre eminencias escalonadas del terreno y se presentan á la vista del viajero bajo el aspecto de grandes y elevadísimos anfiteatros.

En dicha zona está situado el atrevido y sólido Museo cuyos cimientos casi tocan á la orilla del mar y se eleva hasta la planicie del promontorio de Mónaco, adosado al alto acantilado vertical qne éste presenta al terminar en el Mediterráneo.

Sólo diremos de esta ciclópea construcción, debida al ta-

lento del arquitecto Delafotrie, que con tanta maestría supo interpretar y llevar á cabo la idea del Príncipe Alberto, que es un bello y monumental edificio, amplio, bien distribuido y grandioso y está colocado en una situación admirable. En él hay espacio para la sala de recepciones, salones de exposición de los aparatos é instrumentos usados en Oceanografía, y de las colecciones de seres recogidos, para laboratorios y gabinetes de estudio, para biblioteca, para acuarios que contengan animales vivos, para depósitos provisionales de los materiales que han de estudiarse, etc. Se llega, por fin, al piso inferior constituído por una gran bóveda formada sobre los pilares que sostienen todo el edificio, y que se halla todavía á 47 metros de altura sobre las rocas de la base del promontorio y la orilla del mar, según puede verse por un orificio dejado á propósito en el centro de la bóveda. La ilusión es completa; como por la abertura no pueden distinguirse las pilastras que sostienen el suelo, aparece la orilla del mar como si se contemplase desde la barquilla de un globo.

La previsión del Príncipe Alberto no tiene límites; se está terminando en París á sus expensas otro edificio, sucursal del de Mónaco, destinado principalmente á conferencias científicas, y cuyo porvenir quedará igualmente asegurado con la intervención del integro ex Presidente de la República francesa, Mr. Loubet, el Director del Museo de París, Mr. Perrier y un personal escogido. Continuarán las exploraciones de los mares por el Príncipe y los sabios adscritos á esta fundación ó por los de otros países, y en uno ó dos siglos más de febril actividad el hombre conocerá todo lo referente al Océano, á ese camino que puede recorrer en todas direcciones para comunicarse con sus semejantes, camino en el cual no hay que asentar vías, ni abrir trincheras, ni horadar montañas, ni construir puentes ó viaductos, ni hacer gasto de conservación alguno durante la existencia de los mares. ¿Tendrá, sin embargo, el hombre que volver á ocu-

parse de ellos para hacer estudios de transcendencia sobre los mismos? Evidentemente, sí. Llegará algún día en que se agote la gran fuerza de que dispone la humanidad para la navegación, y que está acumulada en las minas de carbón de piedra, y entonces estudiará las mareas y discurrirá los medios apropósito para utilizar su gran fuerza y suplir la que antes le suministraba el carbón mineral. Esta idea ha pasado ya por la mente del hombre, y de ella tendrán que ocuparse las generaciones futuras.

Sólo diremos al terminar esta breve reseña que debe estimularse en todos los países, y sobre todo en los más atrasados, la creación de centros científicos para que los ciudadanos adquieran alguna afición á instruirse y se ocupen poco ó mucho de algún arte, ciencia ó industria. Todo hombre estudioso es, por regla general, pacífico, sus aficiones le hacen sociable al reunirse con otros con quienes puede entenderse sobre lo que le instruye, entretiene ó complace, se establecen amistades y de esta manera se puede llegar paulatinamente á una dulcificación de costumbres tal que haga posible y duradera la fraternidad de unos pueblos con otros.

Y por último, si á la consoladora impresión que deja en el ánimo la realización de hechos tan memorables como el presente, se une el cúmulo de delicadas atenciones y fiestas prodigadas por el Príncipe Alberto á los delegados de las naciones y á todos los asistentes á la inauguración de su Museo, puede tener este campeón de la ciencia la seguridad de que todos, absolutamente todos los que la presenciaron, han de conservar de ella un inolvidable y agradable recuerdo.

APENDICE

Objetos ya colocados en dos grandes salones del Museo.

Elementos contenidos en las aguas del mar en pequeñas y grandes proporciones.

Peso y composición de las materias disueltas en un metro cúbico.

Aparatos para medir la cantidad de ácido carbónico, oxígeno y nitrógeno contenida en el agua, y su análisis.

Sales disueltas en el agua del mar.

Modelos que indican la superficie y altura de los continentes, comparadas con las superficies y profundidades de los mares.

Cantidad de sal disuelta en los mares y la contenida en un metro cúbico.

Areómetros.

Aparatos para apreciar la penetración de la luz en el agua.

Medidor de corrientes é indicador de la dirección de las mismas.

Flotadores.

Termómetros.

Botella de alta presión para recoger el agua del mar á diferentes alturas y también del fondo.

Sondas de diferentes clases y autores.

Ejemplares de los fondos marinos, según análisis mecánico.

Colección de peces encontrados en las exploraciones.

Es notable por el gran número de especies, por las nuevas formas recogidas y por su colocación en cajas rectangulares de cristal, en las que se incluyen láminas de cristal lechoso, un poco inclinadas, sobre las cuales está perfectamente adherido el ejemplar, pudiéndose apreciar bien sus caracteres.

Colecciones de Cefalópodos, Crustáceos, Asteridos, Equi-

nidos, Espongiarios, etc., dispuestas con el mismo gusto que la anterior y acompañadas las especies nuevas ó interesantes de los dibujos en color, hechos como modelo de las láminas publicadas.

Barbas de la Balenoptera Sibbaldi Gray.

Un magnífico esqueleto montado de Balenoptera.

Esqueletos y modelos de cetáceos.

Focas disecadas de gran tamaño.

Piedras dragadas á grandes profundidades.

Vista de la fachada del Museo que mira al mar.

Diversas aves marinas.

Modelos de especies de Lagena, Nodosaria, etc.

Acumuladores.

Dinamómetros.

Red cónica para pescar en plena velocidad.

Redes y dragas diversas.

Tubo fosforescente para colocar en las Nasas.

Modelos de lanchas.

Porcelanas de Caldas da Reinha, representando peces, tortugas, crustáceos, etc.

Esculturas en madera de objetos semejantes, por Trachel.

Dibujos de peces en color, japoneses.

Piedras perforadas por moluscos.

Colección de Políperos, probablemente de las islas Filipinas.

Huevos de Cefalópodos.

Productos extraídos de las algas.

Objetos hechos con pieles de aves marinas y focas.

Moluscos comestibles.

Son en bastante número. Parte de ellos se llevan para el consumo á las grandes poblaciones; los restantes, menos apreciados, sirven de alimento en las localidades donde se encuentran.

Diversas substancias empleadas como cebo en la pesca.

Cajas de conservas.

Bacalao y el aceite de hígado de bacalao.

Coral rosa y encarnado.

Conchas de madreperla con perlas.

Conchas de nácar y diversos objetos debidos á la industria del nácar.

Camafeos.

Biso de las Pinnas y objetos fabricados con el mismo.

Dientes de cachalote.

Alhajas artísticas inspiradas en las formas extrañas de algunos animales recogidos.

Carey y sus usos.

Secciones verticales de muchos géneros de moluscos univalvos.

Colección de los moluscos recogidos.

Muchas de las especies comunes y de poca profundidad han sido halladas á más de 500 brazas; pero sólo valvas sueltas ó ejemplares muertos y deteriorados, por lo cual no viven en esos sitios, sino que han sido arrastradas por las corrientes profundas. Otras muchas de las de máxima profundidad también se han encontrado muertas y no vivientes. Desde las profundidades relativamente pequeñas y cercanas á las costas, se ha ido casi de repente á la exploración de las grandes profundidades, con el deseo de encontrar especies nuevas, como así ha sucedido. ¿No convendría en expediciones posteriores explorar bien las profundidades intermedias, para averiguar dónde se encuentran *vivas* las especies halladas solo *muertas* en grandes fondos, y tal vez para encontrar otras que vivan en esas condiciones? Es probable que así se obtengan especies todavía muy raras como la *Voluta Junonia* del Golfo de Méjico, los *Murex Hidalgoi*, *Cabriti* y *Pazi* de las pequeñas Antillas, el *Conus gloria maris* de Filipinas y las *Pleurotomarias* del Japón.

XLIII. — De algunos fenómenos particulares de los cuerpos fotoluminescentes.

Por José Rodríguez Mourelo.

Antes de ahora me he ocupado en el estudio é investigación de varios fenómenos particulares observados en algunas masas fotoluminescentes, en las que eran disolventes los sulfuros de estroncio, bario y calcio, ejerciendo de fosforógenos ó materias activas compuestos metálicos de muy diversa naturaleza, empleados de continuo en exiguas proporciones. Insistiendo nuevamente en el tema, me propongo tratar en el presente estudio de otros hechos análogos ó semejantes, que formarán con los anteriores á modo de un capítulo relativo á la fosforescencia de los sulfuros alcalinoterrosos, en mi sentir no desprovisto de interés, por cuanto sirve de base para relacionar la dilución de las disoluciones sólidas impresionables por la luz con la fecunda ley del óptimo, de tan general y variada aplicación. De camino han de ser notadas conexiones con los ya clásicos experimentos de Lecoq de Boisbaudran, que considero siempre fundamentales cuando en cualesquiera formas tratase del estudio de las mezclas fosforescentes.

Muy conveniente hubiera sido completar el trabajo llevado á cabo con la observación, siempre interesantísima, de la catodoluminescencia y de los espectros producidos; falto de medios para experimentar, no fué posible, bien á pesar mio, el acometer semejante empresa, y así contiénese la que he realizado en bien estrechos límites, no tanto, sin embargo, que no consientan variar lo suficiente las condiciones experimentales, llegando á resultados de índole diversa, de ellas

dependientes en último término. Son, al cabo, pormenores y modificaciones, á veces muy leves, de hechos con razón calificados de generales, acerca de los que repetidamente he insistido, y así con este carácter pueden unirse á la labor antecedente; pues en algunos puntos la completan y esclarecen, siquiera nada singular le agreguen, ni en lo esencial la modifiquen ni rectifiquen.

Bueno será parar mientes, y corto espacio ha de ser, en la consideración de lo acontecido respecto del estudio de la fosforescencia y de los cuerpos que en alguna de sus numerosas formas la presentan. Poco tiempo hace, la producción de luz sin calor, ó como si dijera, luz fría, mediante lijeras excitaciones, parecía á modo de cosa privativa de aquellas materias todavía denominadas *fósforos*, entre los cuales eran, sobre todo, notados el fósforo de Bolonia ó sulfuro de bario y el fósforo de Cantón, constituído por el sulfuro de calcio, ambos resultantes de la reducción, más ó menos completa, de los correspondientes sulfatos naturales, que nunca se presentan puros; y no se relacionaba el hecho con las luminosidades de las fluoritas cuando son calentadas, ni con los casos de triboluminescencia, frecuentes en las blendas. Juzgando sólo por la manera de producirla, menos se podían suponer las concomitancias, ahora evidentes, entre la fosforescencia persistente en muchos cuerpos, luego de haber cesado la excitación que la provocara, y esta otra instantánea que llamamos fluorescencia, cuyas características están al presente bien determinadas. Tampoco era fácil incluir al lado de los primitivos hechos, que tanto dieron que hacer y que pensar á los alquimistas, estas otras especies de fosforescencia de indudable orígen eléctrico y las que tienen por causas acciones químicas de muy varia categoría.

No han pasado muchos años sin que aquellas nociones imperfectas, confusas, indeterminadas, transformadas y esclarecidas merced al persistente estudio del primitivo fenómeno, hayan llegado á constituir una verdadera doctrina, que

á su vez forma interesantísimo capítulo de la Química-Física, y dentro de ella diputo por lo más importante y transcendente el haber llegado á afirmar que la luminescencia es un fenómeno general, peculiar de la materia diluída. Preséntase, siquiera sus apariencias y el modo de producirla sean muy diversos, lo propio que sus efectos, en los sólidos, los líquidos y los gases, con propiedades específicas, dependientes, en gran parte, de la composición de los sístemas, sin excluir, no obstante, las substancias puras, en cuyo respecto vale citar, á guisa de modelos, las sales de uranilo, cuya fosforescencia ha recibido importantes aplicaciones.

Concurren en el hecho de la fosforescencia, de cualquiera clase que sea, múltiples y muy variadas circunstancias, tenidas antes como accesorias, reconocidas ahora por sus principales características; pues trátase al cabo de un fenómeno función de muchas variables, que es necesario discernir, apreciándolas en números y determinando en cada caso sus respectivos valores. De ello se ha originado una de las más interesantes aplicaciones de la fosforescencia, consistente en emplearla como procedimiento analítico, sin gularmente eficaz y sensible para el reconocimiento de los metales de las tierras raras; y ya Crookes, cuando estudiaba las propiedades de su materia radiante, algo había iniciado en tal respecto al examinar los espectros de la luminosidad catódica, producida en los tubos empleados para sus famosos experimentos; así, en realidad, el conocimiento fundamental de la fosforescencia empieza por sus aplicaciones analíticas, que se extienden y perfeccionan aun antes de haber reconocido la complejidad de los cuerpos que de ordinario la presentan ni averiguar cómo se influyen mutuamente sus componentes. Fué suficiente el examen de los espectros de fosforescencia, sin atender á los modos de excitarla, para establecer un sistema de análisis, el cual, llegado á sus actuales perfeccionamientos, es guía segurísimo para separar y aislar los más singulares cuerpos simples, median-

te progresivas concentraciones de aquellos minerales que en exiguas proporciones los contienen.

Obsérvase asimismo que desde el principio de su estudio sistemático se han reconocido en la luminescencia dos aspectos: el químico y el físico, que muchos han desligado, dando mayor importancia al segundo, y eso que, tratándose de los sulfuros alcalinoterrosos, objeto preferente de los clásicos estudios de Becquerel, es el moderno punto de partida el trabajo químico de Verneuil, á quien débese el conocimiento de la composición de aquellos cuerpos y los medios de realizar su síntesis. Sin embargo, nuestras actuales doctrinas acerca de la fosforescencia son esencialmente físicas, y en mi sentir fáltales el complemento químico; pues, sobre todo cuando de la fotoluminescencia trátase, parece indudable la existencia de acciones químicas reversibles entre los elementos constitutivos de los sistemas que la presentan.

Dícese, con muy buenas razones que así lo demuestran, que la fosforescencia, considerada en toda su generalidad, es un fenómeno molecular, y concretando más todavía, se afirma que constituye verdadero caso de disociación física de una disolución sólida diluída, que así es menester considerar las masas que la presentan cuando no son cuerpos puros, y en realidad el sulfuro alcalinoterroso presente en cuantas materias fosforescentes he obtenido en el curso de mis largos experimentos y en ellos utilizadas, actuaba de disolvente, ó mejor diría que era su oficio el de diluyente, y las impurezas de intento agregadas en cantidades no excedentes de milésimas, eran el fosforógeno, la materia sólo activa en aquellos grados de extremada dilución. Gracias á las influencias de la luz, único agente excitador que he empleado, efectuábase la disociación molecular de las disoluciones sólidas, y el fenómeno subsiguiente de su luminescencia en la obscuridad es simplemente el retorno al primitivo estado de equilibrio, pues la reversibilidad constituye una de las principales caracterís-

ticas del fenómeno, en el que no hay destrucción, sino cambio de estado contingente, en el cual los iones que la acción excitadora pone en libertad, dotados de toda su energía dinámica, vuelven á la materia á que estaban unidos, produciéndose luz en semejante recomposición. No podría admitirse esto si con tales acciones no fuesen concomitantes otras, de orden químico, reversibles también, llevadas á cabo entre el fosforógeno y la materia que constituye su diluyente, á lo menos dado el género de relaciones entre ambos términos existente.

Pero cabría separarse por entero de toda interpretación química, siguiendo el parecer de ciertos físicos de mucha nota, los cuales consideran el diluyente á modo de un electronógeno, susceptible de emitir electrones negativos, merced á la excitación recibida y por un fenómeno repulsivo. Entonces la llamada materia activa sería el luminóforo del sistema, como el anterior agregado de corpúsculos en un estado especialísimo de equilibrio, muy próximo del punto crítico de luminosidad; en definitiva, un sistema binario constituído por dos agregados de corpúsculos en diferente estado de equilibrio, de cuya ruptura es resultado la repulsión de electrones negativos destinados á actuar directamente sobre el luminóforo.

Esta ingeniosísima hipótesis, que tiene en su apoyo hechos muy bien determinados, no puede satisfacer, á lo menos en el momento actual ,á cuantos hemos experimentado, guiados por el afán de determinar propiedades y caracteríscas de las masas fotoluminescentes. Imposible negar ya su condición de disoluciones sólidas, nadie se aventura tampoco á quitar al fenómeno el carácter tan manifiesto de reversibilidad, que no tiene, por ejemplo, la termoluminescencia, cuando la elevación de temperatura implica descomposición química, como en el caso de ciertas fosforitas, y es consecuencia legítima de los estudios experimentales realizados que la fosforescencia, considerada en toda su generalidad é

independientemente de la composición química de los sistemas capaces de presentarla y de los agentes excitadores, constituye un fenómeno molecular, cuyo mecanismo íntimo nos es desconocido y lo indagamos por cuantos medios están á nuestro alcance. A mi ver, la disociación física es simultánea con un fenómeno químico reversible, y el hecho pertenece quizá á la misma categoría de ciertos casos de fototropia de la propia índole, en los cuales el cambio de color y el cambio de composición química van juntos, y asimismo juntos retornan al primitivo estado del sistema, prescindiendo por el momento de los intermedios por los cuales ha pasado durante el cambio; pero en éste, como en el que motiva la fosforescencia, es menester tener muy en cuenta, poniéndolas en primer término, las influencias mutuas de los componentes del sistema, ya se consideren disolvente sólido, y materias actívas disueltas ó agregados corpusculares dotados de distinto carácter.

Quizá para resolver algunos de estos problemas transcendentales de la fosforescencia convenga sobremanera volver á considerar los notables experimentos de Lecoq de Boisbaudran, tan fecundos en consecuencias. Punto de partida del presente trabajo, los he seguido para investigaciones mucho más sencillas; pero cuyos resultados concuerdan con los de aquel afamado experimentador y con los más modernos del profesor Urbain, que á términos tan generales y elevados ha llevado con sumo acierto las doctrinas fundamentales y las aplicaciones analíticas de la fosforescencia.

Fueron hace ya varios años asunto de preferentes investigaciones las materias llamadas activas ó fosforógenos en sus relaciones con los diluyentes, para determinar los grados de eficacia de aquéllas, medidos por la intensidad de la fos-

forescencia, producida siempre en idénticas condiciones, ó sea sometiendo las masas recién obtenidas á las influencias de la luz directa, sin insolación, durante el tiempo de dos minutos. Habiendo ensayado los nitratos de bismuto, de cobre, de manganeso, de uranilo, de níquel y de cobalto y el cloruro de torio, siempre en presencia de leves proporciones de cloruro y carbonato de sodio, aumentando ó disminuyendo las cantidades de cada fosforógeno y siendo disolventes, según los casos, los sulfuros de bario, calcio y estroncio, he llegado, por incrementos ascendentes ó descendentes de los primeros, hasta lograr masas inertes é incapaces de adquirir la fotoluminescencia. Consíguese, empero, el efecto máximo, en cuanto á la sensibilidad del producto y á la intensidad de la fosforescencia, cuando las proporciones del fosforógeno están dentro de la categoría de las milésimas, y esto parece independiente del metal pesado que contenga.

Recordaré aquí, por convenir á mis propósitos, cómo la disolución sólida fotoluminescente requiere ser obtenida á temperatura elevada, que alcanza el blanco y ha de ser durante bastante tiempo sostenida. No vale en ningún caso el mezclar, siquiera sea lo más perfecto posible, la materia activa con el disolvente, ambos en estado sólido, y calentar luego; procediendo así jamás logré productos fosforescentes; en cambio, resultaron excelentes y con la sensibilidad máxima, partiendo de los correspondientes carbonatos alcalinoterrosos, impregnándolos con una disolución acuosa de la materia activa, secando á cien grados, agregando la cantidad necesaria de azufre que se ha de mezclar lo mejor posible, y pasando luego á calentar en la forma que es dicha, evitando todo contacto del aire y siguiéndose lento enfriamiento. Aparte las cantidades de diluyente y fosforógeno, este sistema operatorio, que empleo hace tiempo, es el que me dió mejores resultados y lo atribuyo á la homogeneidad de los productos, porque la difusión de la materia activa en la masa de

su disolvente es uniforme y de una regularidad perfecta, siempre favorable.

Guarda ciertas relaciones el color de la luminescencia con la temperatura, siendo iguales los elementos del sistema, y á semejante propósito citaré un ejemplo no desprovisto de interés: era disolvente el sulfuro de estroncio (100 gr.), fundente un fluoruro de calcio incoloro, purísimo (2 gr.) y materia activa el nitrato de cobre (0,001 gr.) y el procedimiento el descrito. Cuando no se pasaba del rojo vivo sostenido durante cuatro horas, resultaban masas dotadas de extraordinaria sensibilidad para la luz, al punto de ser excitadas en algunos segundos, produciendo luego en la obscuridad por más de una hora intensísima fosforescencia de marcado color verde, del mismo tono que en otro trabajo anterior he considerado típico del sulfuro de estroncio. En cambio, si permaneciendo iguales las demás circunstancias era sostenida la temperatura al blanco por igual tiempo que en el caso anterior, si bien notábase menor sensibilidad y disminución de intensidad, tenía la luminescencia franco color rojo y extraordinaria persistencia en cuantos ensayos he practicado.

Si fuera menester probar de nuevo la eficacia de las diluciones extremadas, traería á cuento un experimento singular, y es el siguiente: habiendo necesitado para ciertos menesteres acetato de bario, ocurrióme atacar el sulfuro puro de este metal con ácido acético diluído; pero la reacción, aun calentando, no fué completa y en el producto quedó algo de sulfuro incólume, en proporciones no determinables, y, sin embargo, eficaces respecto de la fotoluminescencia. Mediante calcinación muy fuerte y prolongada destruí el acetato, recogiendo por resíduo barita cáustica bantante compacta y blanca, sin que en su masa fuera advertido el más leve punto carbonoso; encerrada en un frasco de vidrio para evitar el acceso del aire, y sometida por unos cinco minutos á la intensa luz directa del día, sin insolación, produjo en la obs-

curidad fosforescencia poco intensa, de corta duración y bien marcado color verde, y al cabo de varios años conserva su relativa sensibilidad, sin haber experimentado alteraciones particulares. Repetido el experimento fueron de contínuo iguales los resultados, y alguna vez las masas presentaban cierta fototropía poco intensa y no bien determinada, que desaparece reiterando las acciones de la luz.

Han limitado sus estudios y experimentos la mayoría de los investigadores que al estudio de la fosforescencia se consagraron, á la consideración de los sistemas binaríos, que son los de mayor sencillez, constituídos por un sólo diluyente y una sola materia activa, acompañada ó no de compuestos alcalinos. Con otros fines examinaba Lecoq de Boisbaudran sistemas ternarios de un disolvente y dos fosforógenos ó de dos disolventes y un fosforógeno y aún otros más complicados compuestos de varios diluyentes y varias materias activas; operaba en el vacío más extremado y servíanle de agente excitador las chispas eléctricas, habiendo obtenido por tal sistema los más singulares efectos de fosforescencia; y semejante linaje de estudios ha sido tan fecundo, que bien puede decirse que constituye la base de nuestro actual conocimiento de las tierras raras y de seguro el fundamento de los procedimientos para indagar los singulares metales en ellas contenidos.

Tuve el propósito, casi por entero realizado, de llevar mis estudios respecto de la fotoluminescencia por caminos análogos, preparando sistemas ternarios y cuaternarios y sometiéndolos á las directas influencias de la luz, con intento de apreciar su sensibilidad y examinar después sus respectivas fosforescencias, si es que de presentarlas eran capaces, y en los trabajos acerca de las mezclas fosforescentes, que datan de algunos años, dejo consignados los resultados de los primeros experimentos, en lo substancial iguales á los recientemente practicados. De contínuo sirviéronme como diluyentes los sulfuros de estroncio, bario y calcio, uno solo, mez-

cla de dos ó los tres juntos, formándolos á partir de los correspondientes carbonatos, impregnándolos con disolucíones acuosas de los fosforógenos en estado de nitratos, empleando los que dejo recordados y siguiendo en todo el procedimiento varias veces referido, para colocarme en idénticas condiciones experimentales, cuyo pormenor no necesito tratarlo ahora; lo que me interesaba era notar si los resultados de mis investigaciones, al estudiar lo más sencillo y elemental de la fotoluminescencia, sin vacío ni otro excitante que la directa acción de la luz, coincidían con los de otras indagaciones más complicadas y difíciles.

Iniciados que fueron los experimentos, se presentó un primer problema relativo á la eficacia de la temperatura. Es evidente que para adquirir cualquiera de mis sulfuros la fotoluminescencia permanente con carácter de reversibilidad y conservarla por tiempo indefinido, necesita indispensablemente someterse antes á las acciones del calor, á muy elevada temperatura, que sólo entonces se constituye la disolución sólida activa y sensible. Regulando el tiempo y la acción térmica, he logrado estos dos efectos extremos: no producir materias fosforescentes, resultando sistemas ínertes por falta de calor, y destruir la fosforescencia de los que la manifestaban con la intensidad máxima, empleándolo enérgico en exceso ó demasiado tiempo; entre ambos extremos está el punto eficaz, y hay también ocasiones en que el calor restituye la actividad á materias que la habían perdido.

Una serie bien curiosa de efectos, siempre los mismos, tengo notada en los experimentos de fosforescencia con sistemas ternarios, y todavía más complejos, que en gran número he preparado. A primera vista parece que la actividad de los fosforógenos de ella dotados debía sumarse, y sucede lo contrario; se perturban y neutralizan mutuamente, de tal modo que un sistema ternario, constituído por un solo diluyente y dos fosforógenos, es mucho menos excitable y mucho menos fotoluminescente que cualesquiera de los sistemas binarios

compuestos del diluyente y una de las dos materias activas, lo cual equivale á dotarlas de cierta individualidad específica, acaso dependiente de la propia naturaleza del metal en ellas contenido; á veces la neutralización de los fosforógenos es tan completa, que el sistema resulta inerte respecto de la luz. Predomina siempre, cuando de ella resulta dotado, la fosforescencia del sistema binario que la presenta más intensa en las condiciones ordinarias, con tal que la temperatura á que haya sido constituído el sistema ternario, no sea más elevada de la correspondiente á la formación de aquél por separado. Claro está que los hechos apuntados dependen, en primer término, más que de su naturaleza, de las proporciones de las materias que entrañan las mezclas, y según ellas sean, así cambian los efectos su intensidad.

Justamente acontece lo propio en aquella otra especie de sistemas ternarios en los que entra un sólo fosforógeno y dos disolventes; los efectos de estos últimos no se superponen, antes bien se paralizan, lo cual viene á demostrar las relaciones de cada materia activa con su diluyente. Bien se entiende que en el hecho ha de tener influencia directa el grado de dilución; pero siendo idéntica, resulta siempre más excitable y fosforece con mayor intensidad un sistema binario que otro ternario con la misma materia activa y dos diluyentes, como si entre ellos no pudiese dividirse el fosforógeno y, en igualdad de proporciones de aquéllos, la intensidad del fenómeno, cuando se realiza, está aminorada y el color de la fosforescencia es el correspondiente al sistema binario que lo tenga más enérgico en su tono.

Vese que, de una manera general, en los sistemas complejos, cuando es solo uno el diluyente, y dos ó más los fosforógenos, éstos se perturban unos á otros, experimentando

una especie de paralización que aminora de contínuo la intensidad del fenómeno; pero, al mismo tiempo, en cuanto al color de la fosforescencia, es bien marcado y notorio el predominio del peculiar del sistema que lo tiene más intenso y definido. Demuéstrase el hecho obteniendo un sulfuro de estroncio que contenga como fosforógenos nitrato de bismuto y nitrato de manganeso en la proporción de un miligramo de cada uno; resulta la masa activa y excitable por la luz, produciendo luminescencia no muy intensa, pero del mismo tono de color verde que si se tratase del sistema binario sulfuro de estroncio, nitrato de bismuto, y lo propio acontece si el compuesto de manganeso es sustituído con otros de cobre ó de antimonio, que por sí mismos y en sistemas binarios son particularmente aptos para la producción de luminescencias rojizas. Se necesita llegar á proporciones insignificantes del fosforógeno de bismuto, reduciéndolas á indicios para que predominen otros colores distintos del verde, cuando es diluyente único el sulfuro de estroncio, que empleando para iguales oficios los de calcio y de bario, las coloraciones advertidas y no muy intensas son violáceas ó amarillentas, iguales á las de los correspondientes sistemas binarios, obtenidos á la temperatura de mis experimentos.

Lógranse asimismo efectos curiosos empleando otros sistemas, también ternarios, en los que hay dos diluyentes y un sólo fosforógeno, aplicando de preferencia el nitrato de bismuto, considerado por ensayos anteriores de mayor actividad. Había que atender, sobre todo, á las cantidades respectivas de los diluyentes, cuya influencia en la fotoluminescencia de los sistemas apareció desde luego manifiesta, siempre aminorando ó paralizando sus correspondientes actividades en la forma antes indicada; sin embargo de lo cual, operando con 50 gramos de carbonato de estroncio, otro tanto de cal viva, 30 gramos de azufre y el nitrato de bismuto por fosforógeno, logré una masa impresionable por la luz di-

recta en tres minutos, y cuya fosforescencia verdosa ofrecía marcados tonos violáceos.

Ya se comprende lo que había de ocurrir aumentando las proporciones de sulfuro de estroncio en el sistema; siguieron á tales aumentos predominio del matiz verde, pero á la continua más claro de tono y bastante menos intenso que el de los sistemas binarios, en los que era diluyente único el mismo sulfuro de estroncío, porque es sabido que la complicación en la composición de las masas disminuye muchos grados su sensibilidad respecto de la luz. Sometiendo á la calcinación, á la temperatura del rojo, una mezcla que contenía 50 gramos de polvo finísimo de mármol blanco, 25 gramos de carbonato de estroncio de la mayor pureza, impregnándolos con un miligramo de nitrato de bismuto y 15 gramos de flor de azufre, obtuve una masa dura y granugienta de color agrisado muy claro, poco impresionable, en cuanto necesita estar sometida más de cinco minutos á las intensas acciones de la luz directa, para ser luego fosforescente en la obscuridad, con no mucho brillo y la luminescencia, de no bien definida coloración, presenta á modo de reflejos violados, sin que aparezca el tono verde característico de la fotoluminescencia de mis sulfuros de estroncio. Con los aumentos del sulfuro de calcio, obsérvase que la sensibilidad del sistema crece y en su fosforescencia se acentúa hasta predominar el color violeta, llegando á anular toda tonalidad verdosa cuando las proporciones del diluyente sulfuro de estroncio se reducen á menos del 20 por 100. Es decir, que en cuanto á los cambios de color, prodúcense el fenómeno inverso que en la disminución de las proporciones de sulfuro de calcio.

Muchos ensayos he practicado con el sistema ternario sulfuro de estroncio, sulfuro de calcio y un fosforógeno metálico cuya naturaleza variaba, cambiando también en la manera que es dicha las proporciones de los diluyentes, instituyendo por tal modo una larga serie de elementales y sen-

cillos experimentos, cuyos resultados han sido de continuo los mismos, con muy lijeras excepciones. Siempre fueron advertidas diferencias con los sistemas binarios, traducidas en disminuciones de sensibilidad respecto de la luz y de intensidad de la fosforescencia, en cuyo color es predominante el del sulfuro que entra en mayores proporciones en el sistema.

Admitían mis observaciones no pocas variantes, sin más que cambiar los díluyentes, sin salir de la serie de los sulfuros alcalino terrosos. En otros ensayos, fueron disolventes los de estroncio y bario, empezando por 75 partes del primero y 25 del segundo y aumentando progresivamente hasta 85 partes las cantidades de éste, formando en cada caso sistemas ternarios, sucediéndose en ellos los distintos fosforógenos que me han servido en todo mi trabajo y operando para formarlos á la temperatura correspondiente al rojo vivo, sostenida por cuatro horas. Como en los casos anteriores ya relatados, las masas resultantes compactas, duras, escoriformes y de colores agrisados bastante claros, eran menos sensibles para la luz que los sistemas binarios con igual fosforógeno, necesitando las más impresionables cuando menos cinco minutos de exposición á la luz directa del día, para presentar luego en la obscuridad fosforescencia de intensidad media, respecto de la peculiar de las diluciones sencillas. Tocante al color, estaba determinado por el predominío de uno de los disolventes, y ya desde los primeros términos de la serie, el verde característico de la fosforescencia del sulfuro de estroncio, hallábase influído por el amarillo peculiar de la luminescencia del sulfuro de bario, cuyo tono se acentuaba conforme crecían sus proporciones, hasta dominar cuando eran máximas, no sin que todavía fuese notada cierta ligera tonalidad verdosa en las doradas coloraciones de las masas más ricas de sulfuro de bario, y es de advertir, que su color amarillo de oro se acentuaba mejor cuando el fosforógeno era de los reconocidos aptos para engendrar luminescencias rojas.

Nunca me fué dado advertir grandes escepciones en este linaje de fenómenos, y apenas pude notar ligeras variantes que en nada cambian el efecto principal, en cuya generalidad no hay para qué insistir. Unicamente lo haré en la circunstancia indispensable de la más perfecta homogeneidad de las masas, sólo conseguida apelando al método de formar los sistemas en el acto de constituir los sulfuros, partiendo de los carbonatos impregnados de la materia activa y de la flor de azufre seca, y procurando que el calor no destruya la sensibilidad del producto.

Bastante diferentes fueron los resultados empleando como diluyentes, en el sistema ternario, los sulfuros reunidos de bario y calcio, porque la paralización de sus actividades respectivas es considerable y á veces total, particularmente si dominan las proporciones de sulfuro de calcio, lo cual significa que en ocasiones la intensidad de la fosforescencia se reduce á cero, que implica la inercia para la luz, y en otras se aminora de modo notable, y sólo aparece con matiz poco determinado luego que las masas han estado sometidas por quince ó más minutos á las influencias de fuerte y directa iluminación. No obstante, si el predominio del sulfuro de bario excediese de 70 por 100, empleando como fosforógeno el nitrato de bismuto ó el de manganeso, con enérgicas y prolongadas excitaciones llega á notarse una fosforescencia definida poco duradera, de muy claros tonos amarillentos, sin el menor indicio violado tan frecuente en la fosforescencia del sulfuro de calcio. Quizá pudiera haberse destruído en éste por el calor la cualidad luminescente, porque el de bario se forma á temperatura mucho más elevada; pero entonces lo mismo debiera acontecer en los demás experimentos que darían cuerpos dotados de fosforescencia amarilla, y no masas inertes ó apenas excitables que la presentan en extremo de-

bilitada y de color indefinido; aparte de que al igual de los sistemas anteriores, cuando domina el sulfuro de calcio (desde el 80 por 100), recibe incremento la sensibildad, y la fotoluminescencia resulta de color violeta, bien poco influído por el amarillo peculiar de la que presenta el sulfuro de bario solo.

Otro género de sistemas más complejos resulta cuando son varios los fosforógenos y varios también los diluyentes, á partir de agregados cuaternarios; nueva serie obtuve asimismo con un sólo diluyente y más de dos materias activas y las combinaciones crecen y se multiplican, porque puede ser una ó más constantes y asociarse de modos variadísimos. Y todavía cabe unir hasta tres sulfuros diluyentes para un sólo fosforógeno, cambiándolo en cada ensayo ó grupo de ensayos. Desde el primer grado, que es el más sencillo de las mezclas indicadas, he experimentado todas las posibles con los sulfuros de estroncio, bario y calcio por diluyentes, haciendo oficios de fosforógenos, cuya eficacia individual tenía bien probada, los nitratos de bismuto, manganeso, uranilo, cobre, niquel y cobalto y los cloruros de antimonio y torio, unas veces acompañados de materias alcalinas (cloruro y carbonato sódico, borax y sulfato potásico) ó de fluoruro de calcio, y otras veces libres de tales aditamentos, operando de continuo en las condiciones descritas y sin que la temperatura pasase en ninguna ocasión el rojo vivo.

Con muy raras y nunca constantes excepciones, los efectos de fosforescencia que he logrado fueron siempre iguales. Masas punto menos que inertes, según eran perezosas para dejarse influir por la luz, no siendo cuando era muy grande el predominio de uno de los diluyentes ó de un fosforógeno, hallándose los otros en estado de indicios; luminescencias poco perceptibles, indeterminadas, en no pocas ocasiones fugaces, sin color preciso, con la apariencia de leves y blanquecinos resplandores, ligerísimamente teñidos de verde, amarillo ó violeta, si ya eran considerables respectivamente

las cantidades de sulfuro de estroncio, de bario ó de calcio, con relación á las proporciones totales, tal es lo que tengo observado operando con estos sistemas complejos; demostración palmaria de las mutuas influencias de sus constituyentes, aun desempeñando cada cual las funciones correspondientes á su clase y naturaleza. Dijérase que la mayor complejidad trae aparejadas neutralizaciones de propiedades por otras semejantes, cuando, al parecer, debieran sumarse dando mayor intensidad á la fotoluminescencia.

Pérdida de individualidad de cada sulfuro, no la hay, aun cuando las apariencias tiendan á demostrar lo contrario, al observar los fenómenos acaecidos en los sistemas complejos que tan por menudo he examinado, y respecto de cuyo mecanismo tenemos al presente conocimientos bastante positivos. Confirma, en efecto, el análisis espectral cómo es menester atender á múltiples circunstancias cuando se trata de la fosforescencia de sistemas complejos, porque si partimos de un sólo diluyente y varios fosforógenos, aquél divídese entre todos ellos y fórmanse tantos sulfuros luminescentes cuantas sean las materias activas empleadas; hay una suerte de suma que se denota bien á las claras en la superposición de los correspondientes espectros, y cosa semejante se realiza siendo uno el fosforógeno y varios los diluyentes, que se reparte entre ellos, formando en realidad tantas materias activas fosforescentes cuantos sean los disolventes sólidos; pero las diluciones son mayores en cuanto su conjunto representa la unión de muchos sistemas binarios, cuyo término común es precisamente la materia activa, y también aquí se ha observado esta superposición de espectros, que prueba cómo se han constituído diferentes mezclas para componer el sistema.

Dijérase que en el conjunto de éste ha conservado cada agrupación binaria su propia individualidad específica, pero modificada, porque ni en el caso de la disolución con varios fosforógenos, ni en el de varios diluyentes, la intensidad del

espectro de cada sistema binario es la misma que si lo examinamos aislado, antes es evidente la disminución de su intensidad con singulares circunstancias, que implican cambios de monta en las propiedades. Se podría admitir que prodúcese una suerte de interferencia acaso parcial, porque aunque es de continuo dominante el sistema del fosforógeno dotado de mayor actividad, su propia sensibilidad para la luz y la intensidad de la luminescencia consiguiente hállanse siempre bastante disminuídas, siquiera de su parte anule los efectos de los sistemas menos activos, que si se manifiestan es de una manera incipiente, como si se tratase de diluciones extremadas, subordinándose todo ello á las proporciones de los elementos del sistema, cuya primordial importancia queda ya notada en el curso del presente trabajo.

Quizá esta tendencia de unas materias activas á anular ó á perturbar los efectos de otras con las cuales están asociadas, paralizando las más activas la fotoluminescencia de las que lo son menos, aumenta con su número, y por eso es mínima la sensibilidad para la luz de los sistemas muy complejos, aun conteniendo diluciones binarias individualmente dotadas de gran actividad, y mínima también su fosforescencia, cuando no está reducida á cero. Se demuestra que así acontece observando cómo ésta disminuye mezclando mecánicamente dos sulfuros que cada uno de por sí la tiene espléndida, y no se traduce el cambio tan solo en variantes de color, influyéndose, el verde del sulfuro de estroncio y el violeta del sulfuro de calcio, sino que al punto son notadas la disminución de sensibilidad y la de la intensidad de la fosforescencia, variando todo ello con las proporciones relativas de cada sulfuro, lo mismo respecto del fosforógeno que contenga, que del disolvente en cuya masa haya sido difundido. Vese en los sistemas complejos cómo hay en realidad coexistencia de sistemas binarios individuales, cuyos elementos, fosforógenos y diluyentes, se modifican mutuamente, conforme á sus relaciones cuantitativas, cuya variación per-

mite cambiar las propiedades de la masa, en la que predominan siempre las características y peculiares del componente dotado de mayores actividades.

Entre los agregados de materias fotoluminescentes que he preparado y estudiado á mi manera, hubo algunos constituídos por sulfatos y sulfuros, haciendo unos y otros, según los casos, de materias activas y de diluyentes, y con ellos formé sistemas ternarios y todavía más complejos, observando en todos fenómenos muy semejantes á los apuntados, aun cuando su intensidad hallábase á la contínua aminorada: y los resultados expuestos parécenme confirmar lo sucedido en los casos anteriores, y de ello ya se ha sacado partido, y ciertamente bien fecundo, en las investigaciones de la Química analítica, pues son la base de un delicado y excelente método. Resta mucho todavía por hacer en la Química de la fosforescencia y del mecanismo de las reacciones posibles entre los elementos integrantes de un sistema complejo, nada conocemos positivo, ni siquiera aplicando al caso de estas particulares diluciones sólidas los principios generales de las fecundas doctrinas en la actualidad admitidas.

Madrid, Abril, 1910.

XLIV.—Estudio completo de una clase especial de Integrales singulares.

(*Continuación*)

POR LAURO CLARIANA

V

GENERALIDADES ACERCA DE LA INTEGRAL DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE PRIMER ORDEN

Antes de terminar la primera parte, consideramos útil indicar los diferentes casos que pueden ocurrir al hallar la integral general de una ecuación diferencial de primer orden, conforme indican algunos autores, recabando así el orígen de las integrales singulares en las célebres fórmulas de Clairaut y Lagrange, todo lo cual nos servirá de base para entrar inmediatamente en la segunda parte, que tendrá por principal objeto desarrollar un método especial para deducir cierta clase de integrales singulares, que es el fin que perseguimos desde el principio de esta Memoria.

Comenzaremos por algunos casos particulares.

1.° Supongamos que la ecuación diferencial sea

$$F(x, y') = o;$$

si la podemos resolver según x, tendremos

$$x = \varphi(y'). \qquad (1)$$

de donde

$$dx = \varphi'(y')\,dy'. \qquad (2)$$

Además, se sabe que

$$dy = y' \, dx. \tag{3}$$

Luego, entre (2) y (3), se tiene

$$dy = y' \, \varphi' (y') \, dy'. \tag{4}$$

Ahora bien, de (4), al integrar, resulta:

$$y = \int y' \, \varphi' (y') \, dy' + \text{G}. \tag{5}$$

Luego, eliminando y' entre (1) y (5), se tendrá la integral de (1), expresada según una función tal como la siguiente:

$$f(x, y, \text{G}) = o.$$

Ejemplo:

Sea integrar la ecuación:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - 4\,xy\,\frac{dy}{dx} + 8\,y^2 = o,$$

que se puede expresar por

$$y'^3 - 4\,xyy' + 8\,y^2 = o. \tag{1}$$

Al despejar x, resulta:

$$x = \frac{y'^3 + 8\,y^2}{4\,yy'} = \frac{y'^2}{4\,y} + \frac{2\,y}{y'}.$$

Diferenciando

$$dx = \frac{1}{4}\,\frac{2\,yy'\,dy' - y'^2\,dy}{y^2} + 2\,\frac{y'\,dy - y\,dy'}{y'^2}.$$

Después de reducir, escribiendo $\frac{dy}{y'}$, en vez de dx, se deduce

$$dy = \frac{1}{2}\frac{y'^2}{y}dy' - \frac{1}{4}\frac{y'^3}{y^2}dy + 2\,dy - 2\frac{y}{y'}dy';$$

ó sea

$$\frac{dy}{y} - 2\frac{dy'}{y'} - \frac{1}{4}\frac{y'^3}{y^2}\left(\frac{dy}{y} - 2\frac{dy'}{y'}\right) = o;$$

ecuación que cabe escribir bajo la forma siguiente:

$$\left(\frac{dy}{y} - 2\frac{dy'}{y'}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\frac{y'^3}{y^2}\right) = o.$$

Esta igualdad queda satisfecha, siendo

$$\frac{dy}{y} - 2\frac{dy'}{y'} = o.$$

Luego, al integrarla, suponiendo que la constante se exprese por *l. 4 c*, se obtiene

$$y' = \sqrt{4\,cy}.$$

Por fin, eliminando y' entre esta ecuación última y (1), resulta:

$$\sqrt{4\,cy}\;4\,y\,(c - x) = -8\,y^2,$$

de donde elevando al cuadrado, se halla definitivamente como integral general de (1);

$$y = c\,(c - x)^2.$$

2.° Si la ecuación diferencial contiene sólo y é y', entonces la forma será

$$F(y, y') = o. \qquad (1)$$

Al resolver esta ecuación según y, se tiene

$$y = \varphi(y');$$

de donde

$$dy = \varphi'(y')\, dy';$$

empero, como

$$dy = y'\, dx,$$

resulta

$$dx = \frac{\varphi'(y')}{y'}\, dy',$$

integrando

$$x = \int \frac{\varphi'(y')}{y'}\, dy' + c. \qquad (2)$$

Luego al eliminar y' entre (1) y (2), se halla una función, tal como $f(x, y, c) = o$, que será la integral de (1).

Sin embargo, en ciertos casos será mejor resolver la función $F(y, y') = o$, según y', resultando en su virtud

$$y' = \varphi(y),$$

de donde

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = dx;$$

de modo que si es fácil hallar la integral

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)},$$

se tendrá inmediatamente la integral general, expresada por una función:

$$f(x, y, c) = o.$$

El siguiente ejemplo pondrá de manifiesto la ventaja que presenta este segundo procedimiento sobre el primero.

Sea hallar la ecuación de la curva cuya normal, en un punto cualquiera de la misma, es una cantidad constante.

Según Geometría Analítica, se tiene

$$(1) \qquad y\sqrt{1 + y'^2} = a,$$

siendo a la cantidad constante.

El primer procedimiento da

$$y = \frac{a}{\sqrt{1 + y'^2}},$$

de donde

$$y'\,dx = \frac{-a\dfrac{y'\,dy'}{\sqrt{1 + y'^2}}}{1 + y'^2}$$

ó sea

$$dx = \frac{-a\,dy'}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Para integrar esta ecuacion fácilmente, basta suponer

$$y' = \operatorname{tg} \varphi.$$

Así, pues, se tiene

$$dx = -a\,\frac{\dfrac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}}{\dfrac{1}{\cos^3 \varphi}} = -a \cos \varphi\, d\varphi;$$

de donde

$$x = -a \operatorname{sen} \varphi + G = -a \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} + G = \frac{-ay'}{\sqrt{1 + y'^2}} + G. \quad (2)$$

Eliminando y' entre (1) y (2), resulta por último

$$x = -a \frac{\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y}}{\frac{a}{y}} + G = G - \sqrt{a^2 - y^2};$$

ecuación que se resuelve en la del círculo

$$(x - G)^2 + y^2 = a^2.$$

Ahora bien, si hubiésemos aplicado el segundo procedimiento, tendríamos inmediatamente

$$y' = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y},$$

de donde

$$dx = \frac{y\,dy}{\sqrt{a^2 - y^2}},$$

é integrando,

$$x = -\sqrt{a^2 - y^2} + G;$$

ecuación que se reduce á

$$(x - G)^2 + y^2 = a^2,$$

correspondiendo este resultado con el anterior.

3.° Finalmente, si la ecuación diferencial es de la forma

$$F(x, y, y') = o, \qquad (a)$$

se podrá resolver según x ó y, obteniéndose en uno ú otro caso, las funciones siguientes:

$$(1) \qquad x = \varphi(y, y'), \quad \text{ó} \quad y = \psi(x, y'). \qquad (2)$$

Si diferenciamos (1), escribiendo $\frac{dy}{y'}$ en vez de dx, al integrar resultará una ecuación de la forma

$$\pi(y, y', \text{G}) = o,$$

la cual, combinándose con *(a)* al eliminar y', dará la integral general.

Si hubiésemos partido de (2), al diferenciar, escribiendo en vez de dy, la expresión $y'\,dx$, después de integrar, resultaría una función de la forma

$$\pi(x, y', \text{G}) = o;$$

de suerte que al eliminar y' entre esta ecuación y (2), se obtendría también la integral general de la ecuación diferencial *(a)*, lo mismo que en el caso anterior.

Notables son las ecuaciones diferenciales debidas á Clairaut y Lagrange, las cuales se hallan comprendidas en este tercer caso, iniciándose ya en la de Clairaut el origen de las integrales singulares, siendo dicha ecuación diferencial

$$y = xy' + f(y').$$

Al diferenciar esta ecuación como en los casos anteriores, se obtiene

$$y'\,dx = x\,dy' + y'\,dx + f'(y')\,dy',$$

de donde

$$[x + f'(y')]\,dy' = o.$$

Esta igualdad queda satisfecha haciendo $dy' = o$, ó también, $x + f'(y') = o$.

La primera condición supone $y' = c$, en cuyo caso, al eliminar y' entre esta ecuación y la primitiva, se obtiene

$$y = cx + f(c).$$

De este resultado, se deduce la regla siguiente:

Para hallar la integral general correspondiente á la ecuación diferencial de Clairaut, basta cambiar y' en una constante.

Ahora bien, si nos fijamos en la segunda condición,

$$x + f'(y') = o,$$

al eliminar y' entre esta ecuación y la primitiva, resulta una función en x é y, sin constante, cuya función no se puede deducir de la integral general por valor particular alguno de c, y en este concepto la función hallada toma el nombre de integral singular respecto á la ecuación diferencial dada.

Concretemos el caso.

Sea, por ejemplo, la ecuación correspondiente á la tangente en la circunferencia de radio r:

$$ydx - xdy = r\sqrt{dx^2 + dy^2},$$

cuya fórmula se reduce á la de Clairaut, al suponer $\frac{dy}{dx} = p$, como es costumbre, resultando

$$y = px + r\sqrt{1 + p^2}. \qquad (1)$$

Diferenciando, se tiene

$$dy = pdx = pdx + xdp + \frac{rpdp}{\sqrt{1 + p^2}},$$

de donde

$$\left(x + \frac{rp}{\sqrt{1 + p^2}}\right) dp = o.$$

Si se supone $dp = o$, resulta $p = c$, y, por consiguiente, se tiene

$$y = cx \quad r\sqrt{1 + c^2}. \qquad (2)$$

Ecuación de la integral general, la cual corresponde con una tangente particular cualquiera de la circunferencia, resultando así integrales particulares de la integral general, según sean los valores atribuídos á la constante c.

Empero, si

$$x + \frac{rp}{\sqrt{1 + p^2}} = o,$$

se deduce

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \sqrt{1 + p^2} = -\frac{rp}{x} = \mp \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Al sustituir estos valores en (1), se obtiene

$$y = \pm \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \mp \frac{r^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \mp \sqrt{r^2 - x^2},$$

ó sea

$$y^2 + x^2 = r^2.$$

Ecuación de la circunferencia de radio r, la cual constituye la integral singular de la ecuación (1), por cuanto la satisface, sín que pueda deducirse por valor particular alguno de c, de la integral general.

Notable es la consecuencia geométrica que inmediatamente se deduce de este resultado, pues la integral singular no

es más que la envolvente de las diferentes rectas tangentes á la circunferencia, ó bajo otros términos: dicha integral es la envolvente de las diferentes integrales particulares que se deducen de la integral general al atribuir á la constante diferentes valores particulares, representando dichas integrales particulares las involutas cuya envolvente es la integral singular, todo lo cual está conforme con lo que se explicó ya referente á la teoría de involutas y envolventes, pues bastaría derivar la ecuación (2) según c, igualando el resultado á cero, para que después de la eliminación de c, entre las dos ecuaciones anteriores, resultara la misma integral singular correspondiente á la envolvente.

Si pasamos ahora al estudio de la ecuación de Lagrange, como una extensión de la de Clairaut, se tiene

$$y = x\varphi(p) + f(p).$$

Al diferenciar, resulta:

$$dy = p\,dx = \varphi(p)\,dx + x\varphi'(p)\,dp + f'(p)\,dp,$$

de donde

$$\frac{dx}{dp} + \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p) - p}x = -\frac{f'(p)}{\varphi(p) - p}.$$

Según principios de Cálculo integral, se tiene:

$$x = -e^{-\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\left[\int \frac{f'(p)}{\varphi(p)-p} e^{\int \frac{\varphi'(p)}{\varphi(p)-p}dp}\,dp + G\right] (A)$$

Al eliminar p entre esta ecuación y la dada, resulta una función en x é y, que será la integral de dicha ecuación primitiva.

Para aclarar ideas, supongamos los ejemplos siguientes:

1.° Sea la ecuación diferencial

$$x + yy' = y'^2. \qquad (1)$$

Al diferenciar, resulta:

$$dx + y\,dy' + y'\,dy = 2\,y'\,dy',$$

de donde

$$dx + \frac{y'^2 - x}{y'}\,dy' + y'^2\,dx = 2\,y'\,dy'.$$

Luego la ecuación de Lagrange, toma en este caso la forma siguiente:

$$\frac{dx}{dy'} - \frac{x}{(1 + y'^2)\,y'} = \frac{y'}{1 + y'^2}.$$

Para integrar esta ecuación, al compararla con la fórmula (A), y al considerar $y' = \operatorname{tg} \varphi$, se tiene

$$\int \frac{dy'}{y'(1 + y'^2)} = \int \frac{\cos \varphi\, d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi} = l \operatorname{sen} \varphi = l \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

Así, pues, la fórmula (A), se transforma en

$$x = e^{l \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}} \left[\int e^{-l \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}} \times \frac{y'\,dy'}{1 + y'^2} + G_1 \right];$$

de donde

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \left[\int \frac{dy'}{\sqrt{1 + y'^2}} + l.\,\mathrm{G} \right],$$

y según las funciones hiperbólicas,

$$x = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\, l\,\mathrm{G} \left[y' + \sqrt{1 + y'^2} \right]; \qquad (2)$$

Eliminando, por fin, y' entre (1) y (2), se deduce la integral general.

Según lo que precede, se comprende que así como hemos hallado x en función de y', también podríamos suponer y en función de y', procediendo luego á la eliminación de esta derivada para alcanzar la integral general, como antes.

En efecto, al tomar otra vez la ecuación diferencial

$$x + yy' = y'^2 \qquad (1)$$

y diferenciarla, resulta

$$dx + y\,dy' + y'\,dy = 2\,y'\,dy'$$

y en el concepto de que $dx = \frac{dy}{y'}$, se tiene

$$\frac{dy}{y'} + y\,dy' + y'\,dy = 2\,y'\,dy',$$

de donde

$$\frac{dy}{dy'} + \frac{yy'}{1+y'^2} = \frac{2\,y'^2}{1+y'^2}.$$

Al aplicar á esta ecuación diferencial, la fórmula (A), para su integración, se obtiene inmediatamente

$$y = e^{l\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}}\left[\int e^{l\sqrt{1+y'^2}}\,\frac{2\,y'^2}{1+y'^2}\,dy' + G\right],$$

de donde:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}\left[\int \frac{2\,y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\,dy' + G\right]. \qquad (3)$$

Para determinar esta última integral, se puede seguir el método que á continuación se expresa

$$\int \frac{y'^2\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \int y' \frac{y'\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = y'\sqrt{1+y'^2} -$$

$$- \int \sqrt{1+y'^2}\,dy' = y'\sqrt{1+y'^2} - \int \frac{1+y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}\,dy.$$

De donde, fácilmente, se deduce

$$2\int \frac{y'^2\,dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = y'\sqrt{1+y'^2} - l(y' + \sqrt{y'^2+1}).$$

Luego, al eliminar y', entre esta última ecuación y (1), se obtendrá la integral general como en el caso anterior.

Cuando la ecuación diferencial es homogénea respecto á x é y, puede seguirse un procedimiento particular, aparte de los explicados ya.

Sea, por ejemplo, la ecuación diferencial:

$$x + 2yy' - xy'^2 = o.$$

Conforme á lo que precede, si se pretende resolver x, en función de y', el cálculo es el siguiente:

$$y = \frac{y'^2 - 1}{2y'}\,x,$$

de donde

$$y'\,dx = \frac{2y'^2+2}{4y'^2}\,x\,dy' + \frac{y'^2-1}{2y'}\,dx.$$

Después de sencillas operaciones, resulta

$$\frac{y'^2+1}{2y'}\,dx = \frac{y'^2+1}{2y'^2}\,x\,dy',$$

ó sea

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy'}{y'}.$$

Al integrar, se tiene

$$x = \mathrm{G}y'.$$

Y por fin, al eliminar y', entre esta ecuación y la dada, se deduce la siguiente integral general:

$$\mathrm{G}^2 + 2\,\mathrm{G}y - x^2 = o.$$

El procedimiento especial que en este caso podría seguirse, por ser homogénea la ecuación diferencial respecto á x é y, es como sigue:

Supóngase $y = zx$; después de la sustitución en la ecuación diferencial dada, se obtiene

$$y'^2 - 2\,zy' - 1 = o,$$

de donde

$$y' = z + \sqrt{z^2 + 1}.$$

Por otra parte, tenemos:

$$x\,\frac{dz}{dx} + z = y' = z + \sqrt{z^2 + 1};$$

luego

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}}.$$

De cuya igualdad, se deduce la integral

$$lx = l\mathrm{G}_1\,[z + \sqrt{1 + z^2}]. \qquad (1)$$

Por fin, como tenemos $z = \dfrac{y}{x}$, al sustituir este valor en

la fórmula anterior (1), después de sencillas simplificaciones, se obtiene

$$x^2 - 2\,G_1\,y = G_1^2.$$

Ecuación igual á la que habíamos hallado por el primer procedimiento, y que representa la integral general de la ecuación diferencial dada.

(Continuará.)

XLV.—Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia).

Por José Giral Pereira y Julio C. Sánchez Angoso.

Situación del manantial. — Las aguas objeto de esta Memoria emergen en el monte llamado Valdelazura, en una dehesa y á muy poca distancia de la margen derecha del río Jerte. Pertenece el manantial al término municipal de Plasencia (Cáceres), y dista de aquella población unos 15 kilómetros en la dirección NO. La carretera de Salamanca á Cáceres pasa á cosa de 5 kilómetros del manantial y el ferrocarril de Plasencia á Astorga á distancia algo mayor. Su situación queda bien determinada por el grado 40 del paralelo y 3 del meridiano. La altitud sobre el nivel del mar en el Mediterráneo es de 315 m.

Las aguas emergen en el fondo de una pequeña cañada y á flor de tierra entre rocas graníticas. El análisis químico y mineralógico de éstas ha demostrado la presencia exclusiva de cuarzo, feldespato y mica, componentes de la roca granítica: algunos depósitos ocráceos encontrados en los bordes del manantial provenían de una reducida veta de agua ferruginosa contigua á aquél y que estaba convenientemente aislada. Las aguas han sido protegidas por una pequeña arqueta de unos 3,5 m^3 de capacidad, con revestimiento interior de cemento portland, que rodea los puntos por donde manan, y en la cual quedan depositadas para darles salida por un caño lateral. De un aforo aproximado resulta un caudal de 10 litros por minuto.

La flora existente en los alrededores del manantial es extensa y muy variada. Aparte de las plantas forestales propias de aquel clima, tales como encinas, robles, quejigos,

alcornoques y otras cupulíferas, tuvimos ocasión de recolectar diversos ejemplares de retamas, campánulas, manzanilla, margaritas, sanguinaria menor, ballico y otras muchas cuyo detalle no consignamos por no ser pertinente al objeto de este trabajo.

La temperatura en los días de observación (Julio y Agosto) era de 19,5° dentro del depósito y 33,5 fuera, todo á la sombra.

Trabajos efectuados en el manantial.—En las diferentes excursiones que á él hicimos, practicamos los trabajos siguientes:

1.° Determinación geográfica y topográfica del manantial, su altitud.

2.° Flora y gea del sitio en que emergen las aguas.

3.° Aforo del manantial.

4.° Vaciado del depósito y toma de muestras para análisis:

a) Dos botellas de un litro de capacidad para el estudio físico-químico (radiactividad, conductibilidad eléctrica, etcétera).

b) Un frasco de unos 250 ^{cc} de capacidad lleno de lodos arenáceos recogidos en los mismos puntos de emergencia, para estudio de su radiactividad.

c) Un kilogramo de trozos de roca para su análisis químico y mineralógico.

d) Dos tubos ampollas de 25 ^{cc} y dos matraces cerrados á la lámpara de 300 ^{cc} perfectamente esterilizados y en condiciones apropiadas para el análisis bacteriológico. Igual cantidad fué tomada con el mismo objeto después de lleno el depósito en el caño de salida.

e) 10 bombonas de 16 litros de capacidad para el análisis químico completo.

f) 2 frascos de más de un litro de capacidad, previa adición de Cl_2Ba amoniacal, para determinación de CO_2 total en el Laboratorio.

5.° Determinación de la temperatura del aire ambiente y y de la del agua en los mismos puntos de emergencia.

6.° Determinación de la cantidad total de gases disueltos y análisis cualitativo y cuantitativo de ellos, como se describirá más adelante.

7.° Observación de los caracteres organolépticos, y

8.° Análisis cualitativo.

ANALISIS QUÍMICO

Análisis cualitativo y caracteres organolépticos. El agua mana perfectamente transparente é incolora; al cabo de algún tiempo de reposo, se observa desprendimiento de finas burbujas de gas ácido carbónico y ténue depósito amarillo ocráceo de hidrato férrico. Se desprenden al mismo tiempo, y como gases espontáneos, pequeñas cantidades de ácido carbónico.

El agua es inodora, de sabor alcalino y salado. Su reacción es ácida á la fenoltaleina y neutra al tornasol, anaranjado de metilo y azul soluble de Poirrier. Después de hervida, resulta alcalina para todos estos indicadores.

El papel de acetato de plomo no se alteró.

El agua directamente recogida y embotellada, dió, sin evaporar, las siguientes reacciones (parte de las cuales se efectuaron también en el mismo manantial y van señaladas con la letra *M*).

Agua de cal.—Abundante precipitado blanco, soluble en exceso de agua mineral y en los ácidos diluídos (Presencia de CO_2 y carbonatos.)

Acido clorhídrico diluído.—Desprendimiento de abundantes burbujas gaseosas inodoras (*M*). (Presencia de ácido carbónico y carbonatos.)

Cloruro báríco.—Previa adición de algunas gotas de ácido clorhídrico produjo una fuerte opalinidad, que por reposo se

concretó en tenue precipitado blanco (*M*). (Presencia de sulfatos.)

Nitrato de plata.—Después de acidular con ácido nítrico, dió abundante precipitado blanco cuajoso, soluble en amoníaco (*M*). (Presencia de cloruros.)

Molibdato amónico.—No produjo reacción sensible, ni en frío ni en caliente. (Ausencia de fosfatos en cantidad apreciable.)

Ioduro potásico, engrudo de almidón y ácido sulfúrico diluído.—No produjo alteración. (Ausencia de nitratos.)

Reactivo de Nessler.—No dió reacción. (Ausencia de amoníaco.)

Nitroprusiato sódico.—No dió reacción ni antes ni después de la adición de potasa (*M*). (Ausencia de ácido sulfhidrico y sulfuros.)

Oxalato amónico, cloruro amónico y amoníaco.—Precipitado blanco soluble en los ácidos diluídos (*M*). (Presencia de sales de calcio.)

Fosfato sódico amónico.—En el líquido filtrado de la reacción anterior produjo precipitado cristalino blanco. (Presencia de sales de magnesio.)

Sulfuro amónico.—Acidulada el agua con unas gotas de ácido clorhídrico, añadiendo después amoníaco en exceso y sulfuro amónico, se produjo un tenuísimo precipitado negro. depositado por reposo al cabo de veinticuatro horas. (Presencia de sales de hierro.)

Ferrocianuro potásico. — No se produce reacción apreciable.

Ferricianuro potásico.—Lo mismo que la anterior.

Acido tánico.—Ligera coloración pardo-violeta.

Estas últimas reacciones corroboran la existencia de pequeñas cantidades de hierro, ya perceptibles por los tenues depósitos ocráceos que aparecen mediante reposo del agua.

Observada directamente el agua al espectroscopio, se per-

cibió fuertísima la raya amarilla del sodio y muy débiles las características del litio y calcio.

Diez litros de agua fueron evaporados á sequedad; el residuo dejó una porción insoluble en los ácidos (silice) y otra porción soluble. Esta disolución fué precipitada por el amoníaco, reconociéndose en este precipitado la existencia de los radicales hierro, aluminio y ácido fosfórico. En el líquido amoniacal filtrado se investigó con resultado negativo el manganeso y con resultado positivo el sodio y litio. El detalle de estas operaciones, así como la investigación de otros elementos (fluor, arsénico, bromo, iodo, etc), van consignadas en el análisis cuantitativo. Allí puede verse también la determinación de los gases disueltos en el agua. Como resumen de todo ello debe asegurarse que en el agua mineral de Valdelazura existen los elementos y radicales siguientes: Cloro.—Oxígeno.—Nitrógeno.—Sodio.—Litio.—Calcio.—Magnesio.—Hierro.—Aluminio.—Acidos silícico, carbónico, fosfórico y sulfúrico.—Materia orgánica.

ANÁLISIS CUANTITATIVO. — 1.° *Densidad.*—Determinada ésta á la temperatura de 22° c. resultó, como término medio de dos determinaciones, igual á 0,99943, cuyo número, aun siendo superior al que representa la densidad del agua destilada á la misma temperatura, demuestra ya la pequeña cantidad de cuerpos sólidos disueltos en el agua mineral que estudiamos.

2.° *Resíduo fijo.*—250 cc de agua fueron evaporados lentamente en baño de arena, continuando la evaporación en baño de María y terminándola en estufa de desecación á 100° c. hasta peso constante; descontado el peso de la cápsula de platino en donde fué hecha la evaporación, resultó un residuo de 0,2088 grs. que referido al litro resulta ser de 0,8352 grs. Este resíduo fué calentado en la misma cápsula y estufa á 180° hasta peso constante, resultando igual á 0,8280 grs. por litro.

El mismo residuo calentado al rojo sombra quedó reduci-

do á 0,7304 grs. por litro, resultando, por lo tanto, las siguientes variaciones de peso:

1.° Residuo fijo á 100° c. = 0,8352 grs. por litro de agua.
2.° » » á 180° c. = 0,8280 » » »
3.° » » al rojo sombra = 0,7304 grs. por litro de agua.

Estas variaciones demuestran la existencia de substancias volátiles y están en estrecha relación, como más adelante veremos, con la proporción de ácido carbónico, carbonatos neutros y ácidos (alcalinos y alcalinos térreos).

Una nueva determinación del resíduo dió resultados concordantes con la anterior y fué calentada con ácido sulfúrico en ligero exceso (calcinándolo al rojo vivo previa adición de carbonato amónico), para transformar todas las bases en él existentes en sulfatos neutros y deducir de su peso un modo de comprobación del análisis cuantitativo, recomendado por Fresenius, y cuyo detalle va al final de esta parte de la Memoria.

3.° *Determinación del ion cloro.* (Cl). — 100°cc fueron acidulados por unas gotas de ácido nítrico y precipitados con solución acuosa de nitrato de plata en ligero exceso. Recogido el precipitado (previamente lavado por decantación) sobre filtro, y lavado hasta que las aguas de loción no dieron reacción de sales de plata, fué pesado é incinerado con las precauciones convenientes. Pesó 0,1338 grs.; esta cifra, multiplicada por el factor 0,24728, dió 0,033086 grs. de cloro, correspondiendo al litro 0,33086 grs. del citado ion. Por este procedimiento pudieran haberse precipitado también los iones bromo y iodo, que no son tenidos en cuenta por no existir el primero y haberse descubierto tan sólo indicios del segundo.

4.° *Determinación del ion sulfúrico* (SO_4).—Cinco litros de agua fueron acidulados con ácido clorhídrico y evaporados hasta sequedad en baño de arena; el resíduo se calentó con nueva cantidad de ácido y se trató por agua destilada,

filtrando para separar la sílice asi insolubilizada. En el líquido filtrado se precipitaron los sulfatos por el cloruro bárico en caliente. El precipitado lavado, recogido sobre filtro, desecado é incinerado, pesó 0,7652 grs.; se calentó con ácido clorhídrico, se lavó y filtró, se evaporó con cloruro bárico el líquido ácido filtrado, se diluyó en agua y filtró el resíduo que se adicionó al primero para desecarlos é incinerarlos juntos, único medio de hacer una determinación rigurosa del ion SO_4. La nueva pesada nos dió 0,7598 grs. de sulfato bárico, que multiplicados por el factor 0,3432 y dividido el producto por 5, resultan 0,05219 grs. por litro de anhídrido sulfúrico SO_3, correspondiendo á 0,062628 grs. por litro del ion sulfúrico SO_4. Puede tomarse esta cifra como exacta, pues aparte de la purificacion del primer precipitado de sulfato bárico, reconocimos que la sílice separada al principio de la operación no contenía ni indicios de esta citada sal.

5.° *Determinación del ion sodio* (*Na*).—El líquido procedente de la separación de los sulfatos, conforme á la determinación anterior, fué evaporado en baño de María hasta sequedad. El residuo tratado por agua se hirvió con un ligero exceso de lechada de cal pura, se filtró, se precipitó el líquido con carbonato amónico y amoníaco, y después con oxalato amónico, se filtró nuevamente, se evaporó á sequedad, se calentó al rojo para volatizar las sales amónicas, se diluyó en agua y se repitió el tratamiento con cal, etc., para eliminar lo más completamente posible los iones magnesio, calcio y amonio, así como la alúmina y hierro. El residuo últimamente calentado al rojo fué pesado en la misma cápsula de platino, dando un resultado de 2,9022 grs., que corresponde al conjunto de cloruros alcalinos (salvo el amónico) en cinco litros de agua.

Este residuo, observado al espectroscopio, demostró la existencia de gran cantidad de sodio, muy apreciables cantidades de litio y muy ligeros indicios de potasio. En vista de

tal resultado prescindimos de la determinación cuantitativa de este último elemento.

Restando del peso anteriormente encontrado el correspondiente al cloruro de litio (deducido de la cantidad de este elemento, cuya determinación se consigna en el núm. 12), y dividiendo la diferencia por cinco, tendremos el cloruro sódico por litro, de cuyo dato puede deducirse la cantidad de óxido sódico (Na_2O) y de ion sodio (Na):

	Gramos.
Peso de los cloruros alcalinos de 5 litros de agua....	2,90220
Corresponden á un litro.....	0,58044
Cloruro lítico.....	0,02019
Cloruro sódico por diferencia.....	0,56025
Oxido sódico equivalente.....	0,297268
Sodio correspondiente.....	0,220554

Se comprobó la pureza del residuo anterior, disolviéndolo en agua é investigando en la disolución la presencia de sales de bario, calcio y magnesio; con todas dió resultado negativo.

6.° *Determinación del ion silícico* (SiO_3).—Cuatro litros de agua acidulada con ácido clorhídrico fueron evaporados á sequedad en baño de María y en cápsula de platino; humedecido el residuo con dicho ácido, se calentó débilmente en baño de arena, se trató por agua y se filtró, lavando el precipitado, que fué recogido sobre filtro, desecado é incinerado. Pesó 0,1629 gramos, correspondiendo al litro 0,04075 gramos de silice (SiO_2).

El residuo de silice de la determinación consignada en el número 4, nos dió un resultado algo mayor, debido á que la evaporación del agua se efectuó en cápsula de porcelana. Resultó 0,2084 gramos, correspondiendo al litro 0,04168.

Otras determinaciones practicadas aprovechando residuos de investigaciones diversas, nos dieron resultados muy concordantes con esta segunda cifra consignada. Tomando la media aritmética de los dos números anteriores, resulta una

proporción de anhidrido silícico por litro igual á 0,041215 gramos, que corresponden á 0,052199 gramos del ion SiO_3.

Los productos resultantes de la incineración de la silice fueron calentados hasta ebullición con una solución concentrada de carbonato sódico, observándose completa disolución al cabo de una hora. Esto prueba la pureza del producto pesado y la exactitud de la cifra consignada como sílice.

7.° *Determinación del ion hierro (Fe).*—El líquido, separado por filtración de la sílice determinada conforme al número 6, fué precipitado por el amoníaco en caliente; lavado el precipitado y redisuelto en ácido clorhídrico, se adicionó á la disolución carbonato amónico hasta ligero enturbiamiento; se hizo hervir y se separó por filtración este nuevo precipitado, el cual, después de lavado, fué redisuelto en ácido clorhídrico; se añadió á la disolución una pequeña cantidad de ácido tartárico y un exceso de amoníaco y de sulfuro amónico, y se dejó el conjunto en matraz casi lleno doce horas, para recoger después el sulfuro de hierro depositado. Este sulfuro se disolvió, por último, en el ácido clorhídrico con unas gotas de ácido nítrico y se hirvió y precipitó en caliente por un exceso de amoníaco; el precipitado de hidrato férrico, lavado, desecado é incinerado, pesó (al estado de óxido férrico) 0,0062 gr., correspondiendo por litro de agua, 0,00155 gramos, cuya cantidad equivale á 0,001395 gr. de óxido ferroso (FeO) y 0,001085 gr. de ion ferroso (Fe'').

El resíduo de la calcinación fué disuelto en ácido clorhídrico sin depósito apreciable; en la disolución se comprobó la no existencia de manganeso, alúmina, ácido fosfórico y metales alcalino-térreos, á cuya separación completa obedece la marcha analítica anteriormente descrita. Interesa consignar que la determinación del hierro fué practicada en el agua perfectamente transparente, después de tres días de recogida, y que las investigaciones del análisis cualitativo probaron que el citado elemento se encuentra al estado de

compuesto ferroso, por cuya razón consignamos el tanto por litro de dicho ion ferroso.

8.° *Determinación del ion aluminio* (Al).—El líquido, separado por filtración del sulfuro de hierro procedente de la anterior operación, se evaporó á sequedad con carbonato sódico; el residuo, adicionado de algunos cristales de nitrato potásico, se calentó al rojo sombra y se disolvió después en ácido clorhídrico diluído. La disolución filtrada se precipitó por exceso de amoníaco y el precipitado recogido, lavado, desecado é incinerado, pesó 0,0061 grs., correspondiendo al litro 0,00152 grs. Como el líquido filtrado daba reacción de ácido fosfórico con el molibdato amónico, se consideró el precipitado anterior como fosfato de aluminio y se empleó el factor 0,4185 para transformar su peso en el correspondiente de alúmina, resultando de ésta (Al_2O_3) 0,000636 gramos por litro, correspondiendo á 0,000336 grs. de ion aluminio (Al).

El precipitado anterior fué disuelto en ácido nítrico y reprecipitado con molibdato amónico, corroborando de este modo la total saturación de la alúmina existente en él por el ácido fosfórico.

9.° *Determinación del ion fosfórico* (PO_4).—El anterior precipitado de fosfato alumínico fué disuelto en ácido nítrico, y se añadió á la disolución un exceso de molibdato amonico y de nitrato amónico, calentando el conjunto hasta iniciarse la ebullición; el precipitado amarillo producido fué recogido sobre filtro. El líquido, separado por filtración del fosfato alumínico, en la determinación núm. 8, fué acidulado con ácido nítrico y precipitado por molibdato amónico de idéntico modo; el precipitado se recogió en el mismo filtro que el anterior, y el conjunto de ambos fue redisuelto en amoníaco y nitrato amónico, adicionado de molibdato y reprecipitado en caliente por el ácido nítrico. Recogido en filtro tarado y desecado en estufa á 160° hasta peso constante, dió 0,0984 gramos, correspondiendo al litro 0,0246 grs. Empleando el

factor de Finkener 0,03794 para calcular la cantidad de anhídrido fosfórico correspondiente, resultó 0,00094 grs. de éste por litro de agua, lo cual equivale á 0,001258 grs. del ion fosfórico PO_4.

El precipitado, separado del filtro, era completamente amarillo y soluble en amoníaco.

10. *Determinación del ion calcio* (*Ca*).—El líquido separado por filtración del precipitado de sales básicas de hierro, y el obtenido filtrando el primer precipitado de hidrato férrico, según se detalla al principio de la determinación número 7, fueron reunidos, acidulados ligeramente con ácido clorhídrico y concentrados; añadiendo un exceso de sulfuro amónico y dejando en reposo el conjunto durante veinticuatro horas á un suave calor, no se percibió ningún precipitado, lo cual prueba la no existencia del ion manganeso. En vista de ello, se aciduló el líquido con ácido clorhídrico, se concentró para aglomerar el azufre y se filtró, añadiendo al líquido filtrado amoníaco y oxalato amónico en ligero exceso; el precipitado producido, filtrado, lavado, secado y calcinado al rojo, fué redisuelto en ácido clorhídrico y reprecipitado del mismo modo, terminando la operación por una fuerte calcinación. Pesó el residuo de óxido cálcico (*CaO*) 0,377 gr., correspondiendo al litro 0,09425 grs., ó sea gramos 0,068321 del ion calcio. Este residuo de cal observado al espectroscopio no dió las rayas características del estroncio. El residuo depositado al concentrar hasta $\frac{1}{15}$ 16 litros de agua, tampoco tenía estroncio. De esto se deduce que el óxido cálcico pesado debe considerarse como tal en toda su integridad.

11. *Determinación del ion magnesio* (Mg).—Los líquidos procedentes de filtrar el calcio al estado de oxalato, según la determinación núm. 10, fueron evaporados á sequedad y calentado el residuo al rojo para volatilizar las sales amónicas; adicionado aquél de unas gotas de ácido clorhí-

drico y evaporado en baño de María, se disolvió en agua acidulada con el mismo ácido; se comprobó que la disolución no precipitaba con amoníaco y oxalato amónico, y se le añadió fosfato sódico-amónico y un exceso de amoníaco. Al día siguiente fué recogido el precipitado formado, lavado con agua amonical al $\frac{1}{3}$, desecado é incinerado. El pirofosfato magnésico obtenido pesó 0,1742 grs., correspondiendo al litro 0,043550 grs.; y empleando el factor 0,36036, resulta 0,01569 grs. de magnesia (MgO) por litro, ó sea 0,009414 gramos del ion magnesio.

El residuo de pirofosfato magnésico era completamente blanco y soluble en el ácido clorhídrico.

12. *Determinación de ion litio* (Li).—Dada la gran dificultad que presenta la determinación cuantitativa del litio en las aguas minerales, fueron varios los procedimientos empleados para averiguar la proporción del citado elemento en las aguas que nos ocupan:

A°. El residuo de cloruros alcalinos procedentes de la determinación del sodio, según el detalle consignado en el número 5 (1), estaba constituído por cloruro sódico, cloruro lítico y mínimas cantidades de cloruro potásico, que no pudieron determinarse. Este residuo fué tratado repetidas veces por alcohol absoluto hirviendo, hasta que el depósito insoluble en el mismo no acusó al espectroscopio la raya característica del litio. Los líquidos alcohólicos separados por filtración, fueron evaporados á sequedad en baño de María, dando un residuo cuyo peso fué de 0,2593 grs., se añadió á este residuo una solución concentrada de fosfato sódico, se comprobó la déblil alcalinidad del líquido turbio resultante y se evaporó á sequedad; se trató el residuo

(1) Como todas las determinaciones fueron hechas en doble, uno de los residuos se destinó á investigar su pureza, según el final del número 5, y el otro á determinar el litio por este procedimiento.

por 20^{cc} de agua y otros 20^{cc} de solución de amoníaco ($D = 0{,}923$) y se dejó el conjunto á un suave calor durante doce horas; se filtró, se lavó con 50^{cc} de una mezcla de volúmenes iguales de solución de amoníaco y agua; se evaporó á sequedad el filtrado y las aguas de loción, se trató el residuo por agua y amoníaco del mismo modo; se filtró sobre el mismo filtro y se repitió el tratamiento cinco veces más. El filtro, con los precipitados recogidos, se desecó, se incineró por separado uno y otros, y se reunieron las cenizas, que pesaron 0,0808 grs. En los 50^{cc} de agua amoniacal empleados para lavar el fosfato de litio precipitado, queda disuelto de éste 0,01273 grs. conforme á su coeficiente de solubilidad en dicho líquido (una parte en 3.920 de agua amoniacal), que sumado á la cantidad anterior, da un total de fosfato de litio normal (PO_4Li_3) en cinco litros de agua, igual á 0,0935 grs., correspondiendo al litro 0,0187 grs.; empleando el factor 0,3884, resulta 0,007262 grs. de litina (Li_2O) por litro de agua.

B°. El residuo obtenido por evaporación á baño de María y hasta peso constante de los 200 centímetros cúbicos de líquidos alcohólicos mencionados en la determinación anterior, pesaba 0,2593 grs. La cantidad de cloruro sódico disuelto en dicho líquido era 0,1808 grs., según el coeficiente de solubilidad determinado por nosotros para dicha sal, y para el alcohol hirviendo que empleamos (0,0904 grs. en 100 ^{cc}); luego restando 0,2593 — 0,1808 = 0,0785 grs., que corresponden al cloruro lítico de 5 litros de agua, ó sea 0,0157 grs. por litro, empleando el factor 0,47128 se tiene 0,007399 grs. de litina por litro de agua.

C°. Diez y seis litros de agua se redujeron por evaporación á 1.500 ^{cc}; se filtró y lavó el precipitado formado con agua hirviendo hasta que no dió reacción de litio al espectroscopio. El líquido filtrado se evaporó á sequedad, y el residuo se trató repetidas veces por alcohol absoluto hirviendo (decantando y filtrando éste en cada tratamiento) hasta que no

se observó al espectroscopio la raya del litio en el alcohol filtrado. Los líquidos alcohólicos fueron evaporados á sequedad, y humedecido el residuo con ácido clorhídrico, se repitió el tratamiento con alcohol absoluto, y, por último, con éter-alcohol al tercio, evaporando los líquidos resultantes. El residuo acidulado con ácido clorhídrico se disolvió en agua, se le añadió un par de gotas de cloruro férrico y un exceso de lechada de cal, hirviendo el conjunto y filtrándolo. Se continuó el tratamiento para eliminar la cal, la magnesia y las sales amónicas, del mismo modo que se detalla en el núm. 5 para determinar el ion sodio, y el último residuo se precipitó con fosfato sódico siguiendo la marcha detallada en el apartado *A°* del presente capítulo. El fosfato de litio calcinado pesó 0,2652 grs., y el disuelto en los 50 cc. de aguas de loción 0,0127 grs., ó sea un total para 16 litros 0,2779 grs., que corresponden al litro 0,01737 grs. Empleando el factor 0,3884 resultan 0,006747 grs. de litina por litro, cantidad algo menor á las encontradas en *A°* y *B°* en virtud de lo complicado de esta determinación.

Hallando la media aritmética de las tres determinaciones detalladas en *A°*, *B°* y *C°*, tendremos:

Cifra encontrada según *A°*.....	0,007262	grs.	por	liiro.
» » » *B°*.....	0,007399	»	»	»
» » » *C°*.....	0,006747	»	»	»
Suma de las tres.	0,021408	»	»	»
Tercera parte de esta suma.....	0,007136	»	»	»

tomando como cifra media 0,007136 grs. de litina por litro de agua, ó sea 0,003363 grs. del ion litio (Li).

Los residuos de las calcinaciones finales detalladas en *A°* y *C°* se disolvieron totalmente en ácido clorhídrico, y la disolución saturada de amoníaco no se enturbió.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

Informe acerca de la obra de Mecánica Racional del Sr. Ruiz Castizo. Ponente, *Nicolás de Ugarte*..... 689

XLI.—Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia décima. 698

XLII.—El Museo del Instituto Oceanográfico de Mónaco, por *Joaquín G. Hidalgo*..... 721

XLIII.—De algunos fenómenos particulares de los cuerpos fotoluminescentes, por *José Rodríguez Mourelo*... 737

XLIV.—Estudio completo de una clase especial de integrales singulares (continuación), por *Lauro Clariana*..... 756

XLV.—Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia) por *José Giral Pereira* y *Julio C. Sánchez Angoso*..... 771

La subscripción á esta Revista se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

C. & G. SURVEY,
LIBRARY AND ARCHIVES

TOMO VIII.—NÚM. 11.

(Mayo de 1910.)

FEB 7 1926
National Museum.

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

C. & G. SURVEY,
LIBRARY AND ARCHIVES
JUN 3 - 1911
Acc. No.

XLVI.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

Dos teoremas son fundamentales, entre otros, para la Física Matemática moderna.

La fórmula de Green y la fórmula de Stokes.

Hemos considerado la primera como característica en cierto modo de la electro-estática, sin que esto quiera decir que dicha fórmula ó dicho teorema no reciba otras muchas aplicaciones.

Donde para un espacio cerrado haya de ponerse en relación una divergencia con un flujo, aparecerá la fórmula de Green, que enlaza integrales de volumen con integrales de superficie transformando unas en otras.

Donde haya que poner en relación el flujo de ciertos vectores de superficie con determinados vectores de línea, aparecerá, como veremos en breve, la célebre fórmula de Stokes, que caracteriza las relaciones fundamentales de la electro-dinámica moderna.

El estudio de la fórmula de Green y de sus principales aplicaciones, lo dimos por terminado en la conferencia precedente.

En ésta, y en las que á ella sigan, hemos de estudiar la ya citada fórmula ó teorema de Stokes.

Decimos teorema, porque á su enunciado, forma de teorema se le puede dar; pero en rigor, ambas fórmulas pueden considerarse como fórmulas de transformación.

Ya insistimos sobre esto en la primera; insistiremos sobre lo mismo en la que vamos á estudiar en la presente conferencia.

*
* *

Fórmula de Stokes.—Decíamos que el teorema de Green, ó la fórmula de este autor, servía para transformar una integral de volumen en una integral de superficie, y que á cualquier integral triple se le podía aplicar esta transformación, introduciendo el concepto moderno á que se ha dado el nombre de vector.

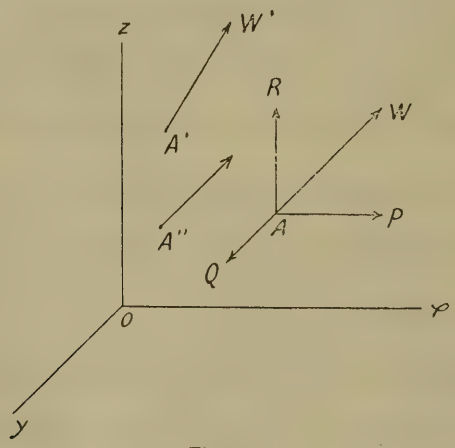


Figura 24.

A su vez, el teorema de Stokes sirve para transformar una integral doble ó de superficie en una integral sencilla ó de línea, precisamente de la linea que limita la superficie ó en que la superficie se apoya.

Y también aquí se introduce el concepto de vector; pero

no empezamos la exposición de la fórmula con la misma generalidad que empezamos la fórmula de Green.

Esta generalización exige explicaciones que á su tiempo daremos.

Pero entremos, desde luego, en materia.

Imaginemos un campo de vectores, es decir, un espacio, en el cual á cada punto corresponde un vector W, cuyas tres componentes designaremos por P, Q, R, componentes que tendrán dirección positiva ó negativa, y que determinarán, por lo tanto, para cada punto la dirección de W y el sentido en que actúa, ó en que podría actuar si fuera un vector concreto, expresión de algún fenómeno físico.

La figura 24 representa este campo de vectores, referido á tres ejes x, y, z, y á cada punto, como hemos dicho, corresponde un vector.

Al punto A, el vector W; al punto A', el W'; al punto A'', el vector W'', y así sucesivamente para los infinitos puntos del campo ó del espacio que estamos considerando.

Y según acabamos de explicar, cada vector, por ejemplo W, estará definido por sus tres componentes, que dependerán de las coordenadas del punto A que se considere.

Es decir, que cada una de dichas tres componentes se expresarán de este modo:

$$P = P(x, y, z), \quad Q = Q(x, y, z), \quad R = R(x, y, z).$$

En este campo de vectores imaginemos una superficie abierta S (fig. 25) terminada por una línea L.

Y por el pronto, para simplificar, supondremos que la superficie cumple con esta condición: que una paralela cualquiera al eje de las x, al de las y ó al de las z, no corta á dicha superficie más que en un sólo punto.

Después generalizaremos el problema.

A fin de que las integrales que vamos á escribir no sean ilusorias, ó de otro modo, para que no tengan elementos

infinitos ó indeterminados, sobre las expresiones P, Q, R, haremos hipótesis ó estableceremos limitaciones análogas á las ya establecidas para la fórmula de Green.

Supondremos, por lo tanto, que P, Q, R.

1.° Son funciones contínuas.

2.° Que son, asimismo, funciones uniformes, es decir, que cada una de ellas, para un sistema de valores x, y, z, no tienen más que un sólo valor.

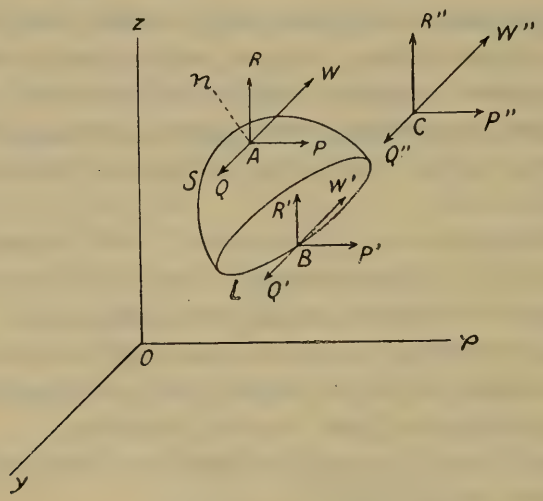


Figura 25.

3.° Que admiten derivadas, cada una de ellas, con relación á las otras dos variables, correspondientes en la sustitución circular de x, y, z. Más claro, P, tiene derivada con relación á y, z; Q, con relación á x, z; R, con relación á x, y. Porque, de lo contrario, el segundo miembro de la ecuación que vamos á establecer, no tendría sentido. Sobre este punto aún podríamos generalizar y hacer observaciones análogas á las que hicimos en el teorema de Green.

4.° Dichas derivadas, también supondremos que son contínuas en el campo de la integración.

Recordado esto, y decimos recordado, porque es repetir lo que expusimos en un caso análogo, escribiremos la ecuación que representa el teorema ó la fórmula de Stokes, y que es la siguiente:

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \int\int_S \left[\alpha\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + \right.$$
$$\left. + \beta\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\sigma.$$

Como habrá que escribir esta fórmula muchas veces de memoria, no estará de más dar alguna regla nemotécnica para recordarla.

El primer miembro no ofrece dificultad, es la integral á lo largo de la línea L, de una expresión análoga al trabajo de la fuerza W, cuyas componentes fueran P, Q, R, á todo lo largo de dicha línea L. Sobre esto luego insistiremos.

En suma, el primer miembro es una *integral de línea:* la que termina la superficie.

El segundo miembro es una *integral de superficie*, por lo tanto, integral doble, que se extiende á toda la superficie S limitada por la línea L.

Veamos ahora cuál es el elemento diferencial de esta integral doble.

Tiene tres términos: en cada uno de ellos entra como factor α, β ó γ, que son los cosenos de los ángulos que forma con los tres ejes una normal cualquiera $A\,n$ á la superficie S en un punto de esta, A.

Cada uno de dichos factores α, β, γ está multiplicado por un binomio que se forma tomando la diferencia de las derivadas de P, Q, R respecto á x, y, z, de este modo:

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

Para no equivocarse en el orden y en los signos de estos tres grupos, conviene recordar el siguente cuadro, en que el orden de las letras es el orden alfabético,

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \beta & \gamma \\ P & Q & R \\ x & y & z \end{array}$$

y en que podemos suponer que se corresponden verticalmente los primeros, segundos y terceros lugares.

Empezando por α le pondremos como factor un binomio, en cuyos denominadores escribiremos y, z, que son las que siguen á α, porque ésta tiene el primer lugar, al paso que y, z ocupan el segundo y tercero. En el numerador pondremos Q, R, que corresponden á y, z, pero invertidas; y claro que los dos términos del binomio son dos derivadas, lo cual no se olvida con facilidad.

Análogamente, en el segundo término, á β le pondremos como factor otro binomio de derivadas, formado según la misma regla. Así, en los denominadores, escribiremos z, x, que son las que en la sustitución circular de lugares siguen á β, toda vez que ésta tiene el segundo lugar, z el tercero, y cerrando el ciclo se vuelve á x, que tiene el primero. En el numerador pondremos R y P, que corresponden á z, x, pero invertidas también.

Por último; en el tercer término, agregaremos á γ como factor otro binomio de derivadas formado por la misma regla nemotécnica. Así, en el denominador de dichas derivadas, pondremos x é y, que son las que en la sustitución de lugares siguen á γ; y en el numerador P, Q, que corresponden á x, y; pero invertidas, como siempre.

Con esto que acabamos de explicar, la estructura algebraica de la fórmula se recuerda sin dificultad de ningún género, y en cualquier momento puede escribirse de memoria.

Y ahora vamos á ver lo que la fórmula significa, es decir, qué clases de operaciones están simbolizadas en ella.

Trabajo éste, que vamos á tomarnos, en rigor inútil, para todo el que conozca los símbolos matemáticos, que en la fórmula se emplean; pero que nunca está de más para el alumno que por primera vez estudia estas materias, y que convierte lo más sencillo en algo difícil y complicado.

En gracia al objeto de estas conferencias, se nos han de disculpar ciertas minuciosidades que de otro modo serían indisculpables.

***

El primer miembro de la fórmula

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz)$$

es una integral de la línea L, y depende de dicha línea, como es natural.

Para determinar dicha integral en cada caso, no habrá más que eliminar, por ejemplo, las z y la y, en función de la x, de las tres funciones P, Q, R, con lo que estas tres funciones quedarán reducidas á funciones de x.

Asimismo, eliminaremos dz, dy en función de dx.

Las anteriores eliminaciones y éstas son facilísimas, puesto que la línea L estará definida por dos ecuaciones, por ejemplo:

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)$$

de donde sacaremos los valores de y, z, dy, dz en función de x y dx.

Con esto la integral quedará convertida en una integral perfectamente determinada de x.

El resultado de la integración dependerá evidentemente de la forma y posición de L.

En cualquier ejemplo práctico el primer miembro se convertirá en un número N.

Y en el segundo miembro, que se extiende á toda la superficie S, los tres términos del primer factor, son funciones perfectamente definidas de x, y, z; porque α, β, γ dependerán del punto de la superficie, en el cual se considere la normal, cuyos cosenos de dirección, es decir, de los ángulos que forma con los tres ejes coordenados, serán funciones de las tres variables x, y, z; y además, P, Q, R ya hemos dicho que son funciones de las mismas variables x, y, z, y por lo tanto, funciones definidas de estas tres variables serán las derivadas de P, Q, R que entran en los términos que vamos considerando.

Claro es, que si todo este primer factor es en último análisis una función de x, y, z, de la ecuación de la superficie, que será conocida, por ejemplo,

$$S(x, y, z) = o,$$

podremos deducir z en función de x, y; y eliminando esta variable z del factor de que se trata, lo habremos reducido á una función de x, y.

Por último, el segundo factor $d\sigma$ es la diferencial del área de la superficie S y se sabe expresar esta diferencial en función de x, y, y de dx, dy.

En suma, todo el segundo miembro, es una expresión de esta clase:

$$\int\int_S F(x, y)\, dx\, dy$$

que entra en la forma general de las integrales dobles.

Podrá efectuarse esta integración, al menos en teoría, y en cada caso particular, y efectuadas las dos integraciones, obtendremos un número que dependerá de la forma de la superficie S.

Sea este número N, que será precisamente el que obtuvimos para el primer miembro,

Dada, pues, la superficie S y la curva L, los dos términos de la fórmula de Stokes, tienen una forma perfectamente definida.

El primer miembro como integral de la variable x, el segundo como integral doble de las variables xy, y la fórmula expresa que el número que se obtiene para el primer miembro es igual al número que se obtiene para el segundo:

$$N = N.$$

Y aquí hemos de repetir lo que dijimos para la fórmula de Green.

La fórmula de Stokes no es una ecuación de la cual podamos deducir una cantidad desconocida en función de otra conocida, como no se puede deducir de

$$a(b + c) = ab + ac$$

ni el valor de a, ni el de b, ni el de c.

No es tampoco una identidad, puesto que el segundo miembro tiene una forma distinta del primero. Podemos decir más bien que es una fórmula ó igualdad, de transformación: el primer miembro se puede poner bajo la forma que afecte al segundo, y recíprocamente.

Y así dicho, una vez demostrada la exactitud de la fórmula, como la demostraremos en breve, parece que dicha fórmula, ó el teorema que representa, ni ofrecen novedad, ni tienen importancia: toda integral doble, efectuando una integración, puede convertirse en integral sencilla.

Y sin embargo, sin variar la esencia de lo que hemos dicho, preséntase todo ello bajo una forma completamente nueva, y es de una gran fecundidad por sus aplicaciones á la Física matemática moderna.

En todas las teorías, en todas las hipótesis, al obtener las ecuaciones de los campos eléctricos ó magnéticos, nos encontraremos con la fórmula de Stokes.

En ella se introduce, como en el teorema de Green, este concepto, relativamente moderno, de los vectores, y así en el primer miembro, como en el segundo, en función de los vectores W, ó de sus componentes P, Q, R, se expresan las integrales.

Porque, en efecto, si en un campo de vectores, como el de la figura 24, colocamos una superficie S, limitada por la curva L (figura 25), como antes decíamos, ocurrirán estos tres casos:

1.° Que el punto de aplicación C del W'' esté fuera por completo de dicha superficie.

2.° Que el punto de aplicación B del vector W' esté sobre la línea L.

Y 3.° Que el punto de aplicación A del vector doble W esté sobre la superficie.

Pues bien; el teorema de Stokes expresa que una cierta integral sencilla de vectores como W', correspondiente á la línea L, es igual á una integral doble de vectores análogos al W, ó sea de superficie.

Estos vectores entran en las integrales por sus componentes P, Q, R, bajo cierta forma analítica, que el primer miembro y el segundo de la fórmula de Stokes expresa.

Pudiéramos aquí hacer una aclaración análoga á la que hicimos al tratar de la fórmula de Green, respondiendo á esta objeción, que acaso nos formulara algún principiante poco familiarizado con estos problemas. Pero la enseñanza de muchos años me ha hecho ver que ninguna objeción debe desdeñarse, por grande que sea la ignorancia que revele.

La enseñanza es para vencer ignorancias, no para ilustrar sabidurías, que no lo necesitan.

Pudiera decirse: ¿cómo una integral de superficie puede expresarse por una integral de línea?

O en otra forma más vulgar: ¿cómo *lo que pasa* en una superficie puede depender de *lo que pasa* en su contorno?

Esto ya lo explicamos en otra ocasión, á que antes nos referimos, minuciosamente, y presentando el ejemplo de la integral del área de una curva que no depende más que de las abscisas extremas, cuando la ecuación de la curva es conocida.

Aquí sucede una cosa análoga, porque todos los vectores ó sus componentes están dentro de una ley general, y esa ley enlaza los vectores de la superficie con los vectores del contorno, como en el teorema se explica y como se explica en la demostración.

Desembarazado ya el terreno de estas pequeñeces, y explicado claramente el sentido de la fórmula de Stokes, pasemos á su demostración.

*
* *

Muchas demostraciones se han dado de esta célebre fórmula, y todas ellas en el fondo son sencillísimas, entendiéndose, por de contado, que las integrales no caen en ningún caso de excepción, ni real ni aparente; que en esta última hipótesis sería preciso hacer un estudio especial del problema.

De estas varias demostraciones citaremos algunas, fijándonos en la que nos parece más clara y más directa.

Una de ellas pueden verla mis oyentes ó mis lectores en el Tratado de Mecánica de Mr. Apell.

Otra en el de Análisis de Mr. Humbert.

Tenemos noticia de otra tercera muy original y que aún puede simplificarse, debida á un matemático norteamericano, cuyo nombre no recordamos en este instante.

Y, por último, citaremos la demostración que aparece en la obra de electricidad y óptica de Poincaré.

De las anteriores demostraciones escogeremos la última,

que nos parece la más sencilla, aun cuando tengamos que hacer en ella una pequeña aclaración.

La fórmula de Stokes que nos proponemos demostrar, y cuyo sentido y significación hemos explicado ampliamente,

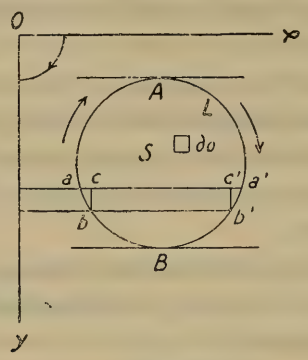


Figura 26.

es, como queda dicho, la siguiente, que de nuevo reproducimos

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_S \left[\alpha\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + \right.$$
$$\left. + \beta\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + \gamma\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\sigma.$$

Para demostrarla, es decir, para demostrar, que ambos miembros son equivalentes, aunque la forma es distinta, empezaremos por un caso particular, á saber: cuando la superficia es plana y coincide con uno de los planos coordenados.

Supongamos, pues, que la superficie S del caso general, se convierte en una porción del plano de las x y, encerrada en la curva L (figura 26).

En esta hipótesis, la normal á la superficie es una recta perpendicular á dicho plano de las x y para todos los puntos del plano S.

Por consiguiente, será una recta paralela al eje de las z; luego tendremos evidentemente

$$\alpha = \cos(z, x) = o, \quad \beta = \cos(z, y) = o, \quad \gamma = \cos(z, z) = 1.$$

Además, el elemento de superficie $d\sigma$ será en este caso $dx.\, dy$.

Con lo cual, la fórmula general se reduce á la siguiente, puesto que siendo $z = o$ para todos los puntos de la curva L, en el primer miembro desaparece dz:

$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int\int_S \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx \cdot dy.$$

Y esta es la que vamos á demostrar ante todo.

Descomponiendo el segundo miembro en dos partes, resultará,

$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int dy \int \frac{dQ}{dx} dx - \int dx \int \frac{dP}{dy} dy.$$

Obtengamos ahora las dos integrales del segundo miembro.

Pero $\int \frac{dQ}{dx} dx$ tiene por integral evidente Q, y como la integración se refiere á x, es decir, á un filete cualquiera $aa'\, b'b$, el límite superior, que corresponderá al punto a' lo designaremos por Q_1 y el límite inferior, que se referirá á su vez al punto a, por Q_0.

Y tendremos

$$\int \frac{dQ}{dx} dx = Q_1 - Q_0.$$

Análogamente, en la segunda parte del segundo miembro

la integral $\int \frac{dP}{dy} dy$ tiene por integral indefinida á P y como se refiere á un filete $bb'\ c'c$ (fig. 26 bis), paralelo al eje de las y, puesto que la y varía, y la x permanece constante en la integración, llamando P_1 al valor de P para el límite superior b', y P_0 al valor correspondiente al límite inferior b, resultará:

$$\int \frac{dP}{dy} dy = P_1 - P_0.$$

Y poniendo ambas integrales parciales en la fórmula primitiva, obtendremos

$$\int_L (Pdx + Qdy) = \int dy\,(Q_1 - Q_0) - \int dx\,(P_1 - P_0)$$

ó bien

$$\int_L (Pdx + Pdy) = \int Q_1 dy - \int Q_0 dy - \int P_1 dx + \int P_0 dx;$$

pero el segundo miembro puede ponerse bajo otra forma más sencilla, que es precisamente la forma bajo la cual está puesto el primer miembro, y hecha esta transformación, los dos miembros de la ecuación resultan iguales, y la identidad queda demostrada.

Supongamos, en efecto, que un punto va recorriendo la línea L de la figura 26 en un sentido determinado; por ejemplo, en el que marca la fecha, que es el de las manecillas de un reloj.

En esta hipótesis, si trazamos las dos tangentes paralelas al eje de las x, la superior que pasa por el punto A y la inferior que pasa por el punto más bajo B, en la integral $\int Q_1\ dy$ todos los incrementos de y desde el punto A al

punto B, en el arco de la derecha, serán positivos, puesto que el eje y se cuenta hacia abajo, y la integral tendrá la misma forma que acabamos de escribir.

En cambio, la integral $-\int Q_0\, dy$ que corresponde al arco de la izquierda de la curva de B á A, dy será siempre negativa; y si convenimos en considerarla como tal, la integral precedente tomará la forma $+\int Q_0\, dy$, y por lo tanto, las dos primeras integrales pueden reducirse á una sola

$$\int Q\, dy,$$

conviniendo en que para cada punto de la curva hemos de dar á Q el valor que le corresponde, y á dy el signo positivo en el arco de la derecha que es el de subida, y el signo negativo en el arco de bajada, que es el de la izquierda, recordando siempre que las y positivas se cuentan hacia abajo.

Por ejemplo, para el punto b el incremento $dy = bc$ será negativo, y para el punto a' dicho incremento dy será igual á $+ b'c'$.

En suma, las dos primeras integrales

$$\int Q_1\, dy - \int Q_0\, dy$$

se reducen á una sola

$$\int Q\, dy.$$

La misma simplificación podemos hacer para las dos últimas integrales.

Pongamos aparte la figura 26 en 26 bis, tracemos las dos

tangentes paralelas al eje de las y en A, B, y admitiendo el mismo sentido de la rotación, según marca la flecha, veremos, que para la integral $\int P_0\, dx$ el incremento dx siempre será positivo, y la integral quedará como la hemos escrito; pero en la segunda integral $-\int P_1\, dx$ que corresponde al arco

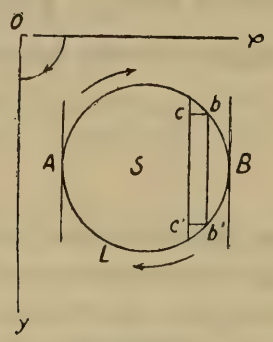


Figura 26 bis.

inferior, los incrementos dx son negativos. Si suponemos, pues, que á dx se le da el signo que le corresponde, es decir, el signo —, esta última integral podrá ponerse bajo la forma $\int P_1\, dx$, de suerte que las dos integrales que estamos considerando pueden reducirse á una sola

$$\int P dx,$$

en que al recorrer el punto la línea L en el sentido de la flecha, se le dará á dx el signo que le corresponda, es decir, positivo ó negativo, según crezca ó decrezca la variable x.

En resumen, las dos últimas integrales que estamos considerando, se podrán escribir de este modo:

$$-\int P_1\,dx+\int P_0\,dx=\int Pdx,$$

y la ecuación primitiva se transformará en ésta:

$$\int_L (Pdx+Qdy)=\int Q_1\,dy-\int Q_0\,dy-\int P_1\,dx+$$
$$+\int P_0\,dx=\int Q\,dy+\int Pdx$$

ó bien

$$\int_L (Pdx+Qdy)=\int_L (Pdx+Qdy)$$

que es una identidad.

Queda, pues, demostrada la fórmula de Stokes en este caso particular.

Cuanto hemos dicho es independiente de la forma de la curva L, aunque para simplificar la explicación la hayamos dado la forma sencilla de las figuras 26 y 26 bis.

Todo se reduciría en el caso general á que los filetes paralelos á los ejes, en vez de cortar á la curva en dos puntos no más, la cortasen en mayor número de puntos, que siempre sería par, por ser la curva cerrada, según exige el teorema.

Queda, pues, demostrada esta fórmula

$$\int_L (Pdx+Qdy)=\iint_S \left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)dx\cdot dy$$

que, como hemos dicho, es un caso particular de la fórmula de Stokes; pero que algunos autores designan con el nombre de fórmula de Rieman.

*
* *

El método que hemos empleado para la demostración de este caso particular de la fórmula de Stokes, en el fondo es idéntico al que empleamos para la fórmula de Green, es decir, efectuar integraciones inmediatas por aparecer bajo el signo integral las diferenciales de P y Q; y después, reunir en una integral los valores que corresponden á los límites de la primera integración.

Ahora bien, lo mismo que hemos hecho para el plano de las $x\,y$, podemos hacer para los otros dos planos coordenados, considerando otros dos casos particulares de la fórmula general.

Consideremos el plano de las $x\ z$; tendremos que hacer, en primer lugar, $y = o$.

Y además, como la curva L está en el plano de las $x\,z$, su normal será paralela al eje de las y, y tendremos

$$\alpha = o, \quad \beta = 1, \quad \gamma = o.$$

En las figuras 27 y 27 bis, que son una misma, duplicada para más claridad en las explicaciones sucesivas, hemos representado la curva L y el área que comprende, que como siempre designaremos por S.

Haciendo las sustituciones antes indicadas, la fórmula general de Stokes, se reduce á

$$\int_L (P dx + R dz) = \int\int_S \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) dx\, dz.$$

Aplicando los mismos razonamientos que antes, tendremos:

$$\int_4 (P dx + R dz) = \int dx \int \frac{dP}{dz} dz - \int dz \int \frac{dR}{dx} dx$$

é integrando

$$\int_4 (Pdx + Rdz) = \int dx\,(P_1 - P_0) - \int dz\,(R_1 - R_0) =$$

$$= \int P_1\,dx - \int P_0\,dx - \int R_1\,dz + \int R_0 dz.$$

Los dos primeros términos $\int P_1\,dx$ y $-\int P_0\,dx$ están evidentemente comprendidos en $\int P\,dx$ según las convenciones establecidas, porque admitiendo (fig. 27) que el punto

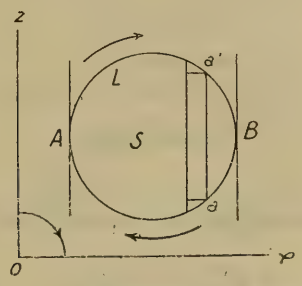


Figura 27.

móvil que recorre la línea L camina como antes, en el sentido de las agujas de un reloj, para el punto a' que corresponde á $P_1\,dx$, se ve claramente que x va creciendo desde A á B; y dx es positiva, como en $\int P_1\,dx$.

Y para a, que corresponde á $P_0\,dx$, la variable x disminuye desde B á A, y dx es negativa como en $-\int P_0\,dx$.

Del mismo modo, en la figura 27 bis, que es repetición de la anterior, pero que corresponde á los dos términos, $-\int R_1\,dz$, $+\int R_0\,dz$ vemos que en a' ó sea en $-R_1\,dz$, dz es negativa, porque disminuye de B

á A, y la integral correspondiente, dando á dz el signo —, está comprendida en $\int R\, dz$.

Asimismo $\int R_0\, dz$ está comprendida á su vez en $\int R\, dz$, dando á dz el signo $+$, pues que en efecto en a, z va creciendo.

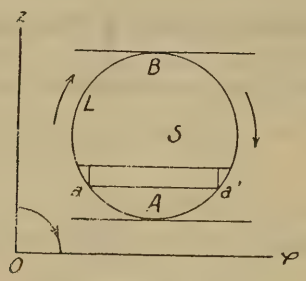


Figura 27 bis.

En suma, la fórmula anterior se convierte en

$$\int (Pdx + Rdz) = \int Pdx + \int Rdz = \int (Pdx + Rdz)$$

que es una identidad.

Queda, pues, demostrada la fórmula de Stokes para este segundo caso particular, es decir, para un área plana comprendida en el plano de las $x\ z$, y limitada por una línea cerrada L.

***

Por último, suponiendo que la superficie se reduce á una porción del plano de las $y\ z$, tendremos que hacer

$$x = o, \quad \alpha = 1, \quad \beta = o, \quad \gamma = 0$$

en la fórmula general, que se reducirá en este caso particuá la siguiente:

$$\int_L (Qdy + Rdz) = \int\int_S \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) dy\, dz,$$

y repitiendo lo explicado para los otros dos planos,

$$\int_4 (Qdy + Rdz) = \int dz \int \frac{dR}{dy} dy - \int dy \int \frac{dQ}{dz} dz =$$

$$= \int R_1 dz - \int R_0 dz - \int Q_1 dy + \int Q_0 dy.$$

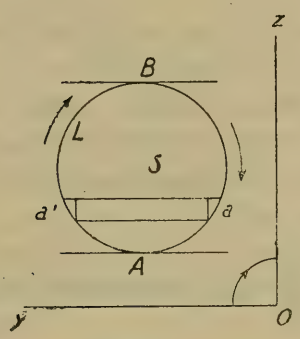


Figura 28.

En la figura 28 se ve que los dos términos $\int R_1\, dz$ y $-\int R_0\, dz$ pueden considerarse comprendidos en $\int R\, dz$, porque $\int R_1\, dz$ corresponde al punto a', para el que dz es positiva, porque z va creciendo desde A á B, admitiendo siempre la rotación que marca la flecha; y al contrario, $\int R_0\, dz$ corresponde al punto a, y dz es negativa.

Del mismo modo, en la figura 28 bis, tendremos que $-\int Q_1 dy$ corresponde al punto a' en que dy es negativa, porque y va disminuyendo desde B á A; así, pues, $-\int Q_1 dy$ estará comprendida en $\int Q dy$ si le damos á dy el signo que le corresponde en este caso.

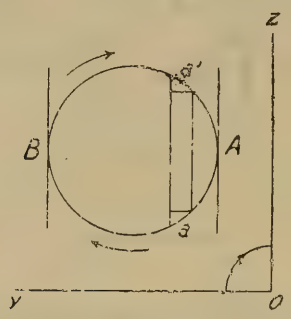


Figura 28 bis.

Finalmente, $+\int Q_0 dy$ corresponde al punto a y dy es positiva: también está comprendida, según esto, en $\int Q dy$

Tendremos, pues,

$$\int (Q dy + R dz) = \int Q dy + \int R dz = \int (Qy + R dz)$$

que es una identidad, con lo cual queda demostrado el teorema de Stokes para el caso particular que acabamos de suponer.

***

En resumen, para porciones limitadas por una línea plana L en cada uno de los planos coordenados, queda demostrada la fórmula de que se trata.

Hemos empleado seguramente en esta demostración una minuciosidad excesiva, repitiendo tres veces los mismos razonamientos; pero es que deseábamos alejar toda duda y evitar toda confusión.

Por eso hemos demostrado el mismo teorema para una figura plana situada en cada uno de los planos coordenados, en el de las xy, en el de las xz y en el de las yz, cuando en rigor con una sola figura era bastante.

Además, para cada plano hemos empleado dos figuras, una para los filetes paralelos á un eje, y otra para los filetes paralelos al otro eje.

Y es que los principiantes pueden encontrar cierta confusión respecto á los signos que dependen del sentido de las rotaciones. Por eso hemos tenido en cuenta, que al llegar á la demostración general, hemos de aplicar estos casos particulares á figuras situadas en tres planos paralelos á los planos coordenados, y es preciso que dichas tres figuras estén en armonía y no en contradicción, que las rotaciones sean en el mismo sentido, y que acoplando los tres planos, resulte el triedrio ordinario.

La clave de esta armonía está en el orden de la sustitución circular de

$$x, y, z,$$

De este orden depende el sentido en que sobre la curva límite ha de caminar el punto móvil.

Este orden debe ser tal, que aplicada dicha sustitución á los ejes en cada plano coordenado, ha de llevar el eje de las x al de las y; el de las y al de las z; y el de las z al de las x, cerrando de este modo la sustitución circular.

Precisamente esto es lo que se observa en todas las figu-

ras, desde la 26 hasta la 28 bis, según marcan las flechas.

Si por el contrario, se quisiera aplicar este teorema á la figura 29, el movimiento del punto siendo inverso del de las

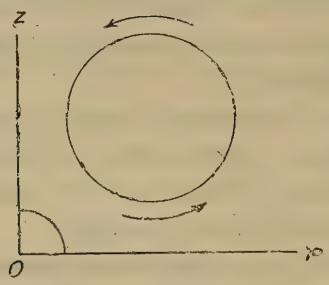


Figura 29.

figuras anteriores, había de modificarse la sustitución circular.

*
* *

Hemos estudiado tres casos particulares de la fórmula de Stokes, que en el fondo es uno solo.

Vamos á estudiar ahora otro caso, que comprende los tres precedentes y por el cual llegaremos con facilidad suma á la demostración del teorema general.

Imaginemos, figura 30, tres rectas ox, oy, oz, paralelas á los ejes coordenados, y un triángulo ABC que corte á dichas rectas en los puntos A, B, C.

Y vamos á demostrar el teorema para este triángulo.

Claro es que la figura está colocada en el campo de los vectores P, Q, R.

El triángulo OBC es evidentemente la proyección del triángulo ABC sobre el plano yz.

A este triàngulo OBC podemos aplicarle la fórmula de Stokes, puesto que constituye uno de los casos particulares que hemos explicado, y tendremos:

$$\int_L (Qdy + Rdz) = \int\int_S \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) dy\, dz$$

en la que la línea L es evidentemente el contorno

$$L = OB + BC + CO, \text{ y } S = \text{área } BOC.$$

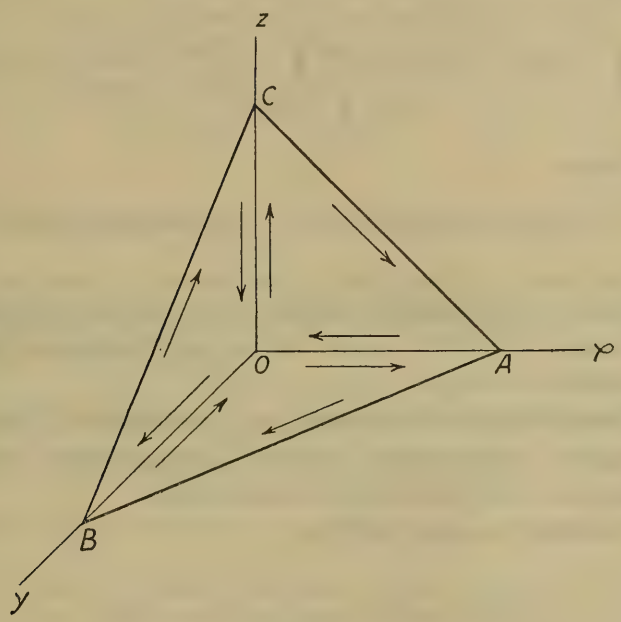


Figura 30.

Del mismo modo, el triángulo OAC, es la proyección del ABC sobre el plano de las xz.

Constituye aquél una figura á la cual se le puede aplicar la fórmula del caso particular que hemos considerado, y tendremos, por consiguiente,

$$\int_{L'} (Pdx + Rdz) = \int\int_{S'} \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) dx\, dz$$

siendo

$$L' = OC + CA + AO, \quad \text{y} \quad S'' = \text{area } OAC.$$

Por último; el triángulo OAB es la proyección sobre xy del triángulo ABC. Puede considerarse como una figura plana trazada en este plano, y aplicándole la fórmula de Stokes como caso prticular, podemos escribir

$$\int_{L''} (P\,dx + Q\,dy) = \int\int_{S''} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx \cdot dy$$

en la que

$$L'' = OA + AB + BO \quad \text{y} \quad S'' = \text{area } AOB.$$

Para los tres triángulos BCO, AOC y BOA, la rotación es siempre la misma, según indican las flechas que están marcadas en la figura.

Sumando las tres fórmulas que corresponden á los tres triángulos, observaremos que hay partes comunes que se destruyen, como indican las mismas flechas.

En efecto, la suma será esta

$$(1) \quad \int_L (Q\,dy + R\,dz) + \int_{L'} (P\,dx + R\,dz) +$$

$$+ \int_{L''} (P\,dx + Q\,dy) = \int\int_S \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) dy\,dz +$$

$$+ \int\int_{S'} \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) dx\,dz + \int\int_{S''} \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) dx\,dy.$$

Consideremos ahora los términos con $P\,dx$, que son

$$\int_{L'} P\,dx + \int_{L''} P\,dx$$

ó bien

$$\int_{OC+CA+AO} Pdx + \int_{OA+AB+BO} P\,dx.$$

Pero estas integrales pueden descomponerse en las siguientes:

$$\int_{OC} Pdx + \int_{CA} Pdx + \int_{AO} Pdx + \int_{OA} Pdx +$$
$$+ \int_{AB} Pdx + \int_{BO} Pdx.$$

Ahora bien; la integral $\int_{OC} Pdx$ es evidentemente nula, porque como hay que tomarla á lo largo de OC, y para todos los puntos del eje de las z la diferencial dy es igual o, la expresada integral se anula.

Asimismo se anula $\int_{BO} Pdx$ por la misma razón, porque para todos los puntos de OB, dx es igual á o.

Además, las integrales $\int_{OA} Pdx$ y $\int_{AO} Pdx$ son iguales y de signo contrario, porque en una se integra en el sentido OA, y en la otra en sentido contrario; de modo que los elementos diferenciales correspondientes al mismo punto serán iguales y de signo contrario y se destruirán.

Queda, pues, tan sólo estos dos términos

$$\int_{CA} Pdx + \int_{AB} Pdx.$$

A los cuales no hay inconveniente en agregar un término que sea igual á cero y que, sin embargo, dé una forma, más propia para la demostración, á la suma precedente.

Este término será

$$\int_{BC} Pdx$$

que en razón á que la línea BC está en el plano de las yz, es, en efecto, igual á cero, porque todas las diferenciales dx para la expresada línea BC serán nulas, con lo cual podremos escribir

$$\int_{L'} Pdx + \int_{L''} Pdx = \int_{CA} Pdx + \int_{AB} Pdx + \int_{BC} Pdx$$

ó bien.

$$\int_{L'} Pdx + \int_{L''} Pdx = \int_{CAB} Pdx. \qquad (a)$$

Del mismo modo que hemos tomado del primer miembro de la fórmula (1) los dos términos en Pdx, tomemos ahora los dos términos en Qdy, es decir,

$$\int_{L} Qdy + \int_{L''} Qdy,$$

y transformemos estos dos términos como hemos hecho con los dos anteriores, suprimiendo las explicaciones intermedias. Así tendremos, sucesivamente,

$$\int_{L} Qdy + \int_{L''} Qdy = \int_{OB+BC+CO} Qdy +$$
$$+ \int_{OA+AB+BO} Qdy = \int_{OB} Qdy + \int_{BC} Qdy +$$
$$+ \int_{CO} Qdy + \int_{OA} Qdy + \int_{AB} Qdy + \int_{BO} Qdy.$$

Pero $\int_{OA} Q\,dy$ y $\int_{CO} Q\,dy$ son dos integrales nulas, porque las líneas de integración OA y CO son perpendiculares al eje de las y, y, por lo tanto, para todos los puntos de ambas líneas $dy = o$.

Además $\int_{OB} Q\,dy$ y $\int_{BO} Q\,dy$ son iguales y de signo contrario, y se destruyen porque las líneas OB y BO se recorren en sentido contrario, y los elementos diferenciales se destruyen dos á dos.

Quedan tan sólo de las seis integrales

$$\int_{BC} Q\,dy + \int_{AB} Q\,dy$$

y agregando la integral nula $\int_{CA} Q\,dy$, que es, en efecto, nula porque la recta CA está en el plano de las xz, y para todos sus puntos $dy = o$, tendremos que las seis integrales anteriores se reducirán á estas tres:

$$\int_{AB} Q\,dy + \int_{BC} Q\,dy + \int_{CA} Q\,dy = \int_{ABC} Q\,dy$$

de modo que

$$\int_{L} Q\,dy + \int_{L''} Q\,dy = \int_{ABC} Q\,dy. \qquad (b)$$

Por último, tomando en la ecuación (1) los dos términos que contienen $R\,dz$, y aplicando los mismos razonamientos y tranformaciones que hemos explicado ya dos veces, tendremos:

$$\int_L Rdz + \int_{L'} Rdz = \int_{OB+BC+CO} Rdz +$$
$$+ \int_{OC+CA+AO} Rdz = \int_{OB} Rdz + \int_{BC} Rdz +$$
$$+ \int_{CO} Rdz + \int_{OC} Rdz + \int_{CA} Rdz + \int_{AO} Rdz,$$

y puesto que

$$\int_{OB} Rdz = o; \int_{AO} Rdz = o; \int_{CO} Rdz + \int_{OC} Rdz = o,$$

resultará

$$\int_L Rdz + \int_{L'} Rdz = \int_{BC} Rdz + \int_{CA} Rdz$$

y agregando

$$\int_{AB} Rdz = o$$

se obtendrá, por último,

$$\int_L Rdz + \int_{L'} Rdz = \int_{BCA} Rdz. \qquad (c)$$

Reuniendo, pues, las tres fórmulas (a) (b) (c), el primer miembro de la ecuación (1) podrá escribirse de este modo:

$$\int_{CAB} Pdx + \int_{ABC} Qdy + \int_{BCA} Rdz$$

y como la línea de integración es siempre la misma y en el sentido que marcan las flechas, que es el de siempre para el

triángulo $A\,B\,C$, tendremos, por último, que el primer miembro de la fórmula (1) será precisamente el primer miembro de la fórmula de Stokes

$$\int_{ABC} (Pdx + Qdy + Rdz).$$

***

Pasemos al segundo miembro.

Si suponemos infinitamente pequeño el tetraedro $O\,A\,B\,C$, podremos suponer para todos los puntos del mismo, de sus aristas y de sus caras, que P, Q, R y sus derivadas con relación á x, y, z, tienen el mismo valor, y podrán salir fuera de las integrales, que se refieren á las tres caras S, S', S''.

Asi, pues, el segundo miembro de la fórmula (1) podrá escribirse de este modo:

$$\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right)\int_S dy\,dz + \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right)\int_{S'} dx\,dz + \\ + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\int_{S''} dx\,dy.$$

Pero $\int_S dy\,dz$ es el área del triángulo $O\,B\,C$, que es proyección de $A\,B\,C$ sobre el plano de las $y\,z$.

De modo que, trazando una normal á dicha cara $A\,B\,C$, y represntando por l, m, n los cosenos de los ángulos que forma la expresada normal con los tres ejes, y por $d\omega$ el área del triángulo $A\,B\,C$, tendremos

$$\int_S dy\,dz = \text{area } OBC = l\,d\omega$$

y asimismo

$$\int_{S'} dx\, dz = m d\omega$$

$$\int_{S''} dx\, dy = n d\omega$$

con lo cual el segundo miembro de la fórmula (1) tomará esta forma

$$\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) l d\omega + \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) m d\omega +$$
$$+ \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) n d\omega$$

y por fin

$$\left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + u\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dC}{dy}\right)\right] d\omega.$$

Sustituyendo en la fórmula (1) el primer miembro y el segundo, tal como los hemos transformado, tendremos

$$\int_{ABC} (P dx + Q dy + R dz) = \left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) +\right.$$
$$\left. + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{do}\right) + u\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\omega$$

que es la fórmula de Stokes para el caso particular de un triángulo infinitamente pequeño *A B C*.

Partiendo de esta fórmula se demuestra fácilmente la fórmula general.

Porque, como dice Mr. Poincaré, «si la integral curvilí»nea debiera tomarse á lo largo de una curva cualquiera *C*, »limitando una superficie finita, podríamos siempre descom-

»poner esta superficie en elementos triangulares infinitamen-
»te pequeños, y obtendríamos la integral curvilínea, efec-
»tuando la suma de las integrales tomadas á lo largo de los
»contornos triangulares que limitan dichos elementos».

Esto es perfectamente claro y correcto.

Sin embargo, á los principiantes se les puede ocurrir una dificultad, que salvaremos en la conferencia próxima, completando en ella la demostración de la importante fórmula que nos ocupa.

XLVII.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

Por José Echegaray.

Conferencia duodécima.

Señores:

Siguiendo escrupulosamente, hasta ahora, el programa que ofrecimos para las conferencias de este curso, en la primera de ellas, y después de haber dado una idea general de la teoría de los vectores, concepto principalísimo en la Física matemática moderna, y de haber demostrado la fórmula de Green haciendo aplicación de esta fórmula á la electro-estática, expusimos y demostramos en la conferencia anterior la fórmula de Stokes, que es también fórmula fundamental, aparte de otras aplicaciones que de ella pueden hacerse, en la electro-dinámica moderna.

Entre todas las demostraciones, escogimos la que en nuestro concepto es más clara y más sencilla, á saber, la que expone Mr. Poincaré.

Tan sencilla, que en rigor, en dos páginas puede desarrollarse, aunque nosotros hayamos empleado toda una conferencia. Pero es porque en nuestro trabajo, de enseñanza y propaganda, suponemos que nos dirigimos siempre á principiantes.

Y en ésta, nuestra enseñanza elemental, no olvidamos nunca aquella máxima, que dice: que ciertos libros serían mucho más breves, si fueran mucho más largos.

De todas maneras, la demostración, como recordarán mis oyentes, estaba reducida á estos tres términos: 1.° Demostrar el teorema para un caso particular, aquél en que la superficie S era plana, estaba limitada por una línea, plana también, L y coincidía con uno de los planos coordenados. 2.° Considerábamos después otro caso particular, que la superficie fuera también plana, y estuviese limitada por un triángulo, cuyos vértices se apoyasen sobre los tres ejes coordenados x, y, z. 3.° Pasábamos al caso general; descomponiamos la superficie S en triángulos infinitamente pequeños, á cada uno de ellos le aplicábamos la fórmula de Stokes ya demostrada para dicho caso, y sumando estas diferentes fórmulas, resultaba la fórmula general.

Nada más sencillo y nada más directo.

* * *

Pero al terminar la última conferencia, dijimos que aquel tercer punto, merecía algunas explicaciones para salvar cierta duda que pudiera ocurrir.

No olvidemos que el triángulo ABC (fig. 31), que era el que correspondía al segundo caso particular de la fórmula de Stokes, había de tener sus tres vértices, A, B, C, sobre los tres ejes coordenados x, y, z, ó mejor dicho, sobre tres paralelas á estos ejes trazadas por un punto, de modo que se formase un tetraedro por los ejes y el triángulo.

Tal era la figura típica para dicho caso particular, y á esta figura se aplica la fórmula de Stokes y para ella la demostramos, no para un triángulo en cualquiera otra posición.

Ahora bien, si trazamos en la superficie S triángulos infinitamente pequeños, que determinen áreas infinitamente pequeñas, pero trazados arbitrariamente, estos triángulos no corresponderán á la figura que hemos escogido como tipo.

Más claro; si ABC (fig. 31) es uno de estos triángulos, y por el vértice A trazamos una paralela Ax' al eje de las x, por el vértice B una paralela By' al eje de las y, y por el vértice C otra tercera paralela Cz' al eje de las z, en general, las tres rectas Aa, Bb, Cc se cruzarán, es decir, que no pasarán por un punto, con lo cual el triángulo ABC no se encontrará en las condiciones que antes indicábamos, ni *á*

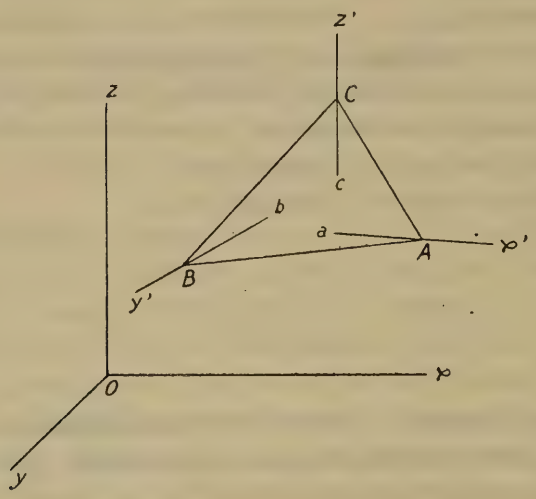


Figura 31.

priori, ni en buena lógica, le podremos aplicar la fórmula demostrada, ni nos servirá la demostración de la fórmula general.

Pero esta duda y esta objeción se desvanecen demostrando que toda superficie S se puede descomponer de muchas maneras en elementos triangulares, que cumplan con la condición requerida, como vamos á ver desde luego.

En efecto, sea la superficie $AMDM'''$ (fig. 32) y vamos á probar que esta superficie puede dividirse siempre en triángulos infinitamente pequeños abb'....., tales que, trazando por los vértices paralelas á los ejes coordenados x, y, z, por b'

una paralela al eje de las x, por b otra paralela al eje de las y, y por a otra tercera paralela al eje de las z, estas tres rectas se encuentren en un mismo punto d; con lo cual el triángulo abb' y el triedro $dabb'$ se encontrarán precisamente en el mismo caso que la figura típica que nos ha servido para demostrar el teorema de Stokes en el triángulo fundamental. Y agregaremos que toda la superficie puede cubrirse de triángulos análogos al abb' y gozando de la misma propiedad.

Pero esto que hemos enunciado es elemental.

Cortemos la superficie S por una serie de planos paralelos, por ejemplo, al plano de las xy, infinitamente próximos unos á otros.

Tendremos una serie de líneas AM, BM', CM''....., que podremos llamar líneas de nivel, y también infinitamente próximas unas á otras.

Consideremos ahora el punto b, por ejemplo, y tracemos un plano paralelo al de las yz, que cortará á la zona AM $M'B$, según la línea ab.

Por el punto a tracemos otro plano paralelo al de las xz, que cortará la misma zona, según la línea ab'.

Estos dos planos se cortarán evidentemente, según la recta ad paralela al eje de las z. Y si d es el punto en que esta recta corta el plano de nivel AM, los dos planos que acabamos de trazar cortarán evidentemente á éste, según dos rectas db' paralela al eje de las x y db paralela al eje de las y, con lo cual queda demostrado que el triángulo abb' tiene sus vértices sobre el ángulo triedro trirrectangular d paralelo al de los ejes xyz.

Pero la zona AM $M'B$ puede descomponerse desde luego en triángulos análogos al anterior.

Por b' podemos hacer pasar un plano paralelo al de las yz, que cortará la superficie, según la línea $b'a'$. Y por el punto a' podemos hacer pasar asimismo un plano paralelo al de las xz que cortará á la faja que vamos consideran-

do, según la línea $a'b''$. Y por de contado, todas estas líneas pueden considerarse, dada su pequeñez, como líneas rectas.

Vemos, lo mismo que antes, que los tres planos, el que pasa por $a'b'$ y es paralelo al yz; el que pasa por $a'b''$ y es paralelo al xz; y el paralelo al xy, forman un triedrio, cuyo vértice es d'', paralelo al de los ejes.

En suma, el triángulo $a'b'b''$ se encuentra en el mismo caso que el anterior, y así podemos seguir la descomposición en triángulos infinitamente pequeños para toda la faja $AMM'B$.

Pero en esta faja, y entre la serie de triángulos que hemos definido hasta aquí, cuyas bases bb', $b'b''$ ....., están en la línea de nivel AM, quedan otros triángulos intermedios, como el $aa'b'$, que hay que demostrar que se encuentran en el mismo caso què los anteriores, lo cual es evidente, ó casi evidente, como veremos desde luego.

En efecto, prolongando el plano $ab'd$, que es paralelo al de las xz; prolongando asimismo el plano $b'd''$, á que es paralelo al de las yz, y el plano de nivel bM', estos tres planos se cortarán en el pnnto d' formando el triedro $d'aa'b'$, cuyas tres aristas $d'a$, $d'a'$, y $d'b'$ son paralelas á los tres ejes x, y, z. Luego el triángulo $aa'b'$, se encuentra en el mismo caso que los anteriores.

En suma, la faja $AMM'B$ se puede dividir en triángulos que todos se encontrarán en idénticas condiciones, es decir, que tendrán sus tres vértices sobre un triedro trirrectángulo paralelo al xyz.

Con la diferencia que en unos abb' el triedro estará en un lado de la superficie; el vértice d está, por decirlo así, detrás de esta superficie en la figura, y en otros triángulos $aa'b'$, que alternan con los primeros, el vértice d' está delante de la superficie.

Siguiendo este procedimiento para todas las demás fajas, $BM'M''C$..... quedará dividida la superficie en triángulos, á

los cuales será aplicable la fórmula que demostramos en la conferencia anterior.

Dividida la superficie en estos triángulos infinitamente pe-

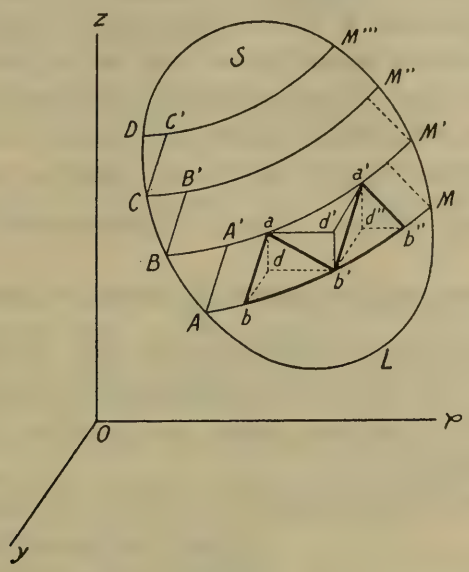


Figura 32.

queños, la línea límite L, que en la figura 32 es $ABCD$....., quedará sustituída por la línea quebrada $AA'BB'CC'$ .....

***

Y ahora, apliquemos la fórmula ya demostrada para cualquier triángulo ABC (fig. 33), á saber:

$$\int_{ABC} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + n\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\omega$$

á todos los triángulos de la red que acabamos de definir.

Es evidente que si para cada triángulo se escribe la fórmula anterior que le corresponde y se suman los primeros miembros y los segundos de estas ecuaciones, en el primer miembro que resulte se destruirán dos á dos las integrales, ó, mejor dicho, las partes de las integrales que corresponden á cada lado BC común á dos triángulos ABC, $A'BC$ (fig. 33).

Porque el sentido de la rotación es el mismo, y las flechas indican que $\int_{CB} (Pdx + Qdy + Rdz)$, siendo BC un lado del triángulo ABC, y siendo $\int_{BC} (Pdx + Qdy + Rdz)$ la parte de la integral correspondiente á BC, como lado del triángulo $A'BC$, son dos integrales iguales, elemento á elemento, pues la línea es la misma, pero de signo contrario, y que se destruirán.

Luego en la red de triángulos de la figura 32, todas las integrales correspondientes á los diferentes lados de los triángulos serán nulas, y sólo quedarán las integrales correspondientes á la línea quebrada del contorno $AA'BB'CC'$ .....

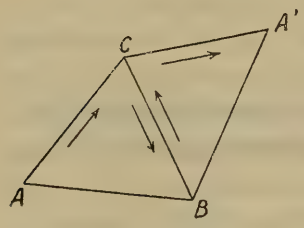


Figura 33.

Ahora bien, esta integral tiene la forma del trabajo de una fuerza, cuyos componentes fuesen P, Q, R, y dicho trabajo es el mismo para la línea quebrada que para la línea ABC..... $= L$.

Esto es evidente por el teorema del trabajo de las fuerzas, suponiendo por de contado que P, Q, R tienen el mismo valor para la línea quebrada que para la línea continua.

Resulta, por lo tanto, que el primer miembro de la suma será $\int_L (Pdx + Qdy + Rdz)$. En cuanto al segundo miem-

bro, que será la suma de todos los segundos miembros de las ecuaciones que hemos escrito para los triángulos elementales, se reducirá á la integral doble de la expresión general escrita en la fórmula precedente.

Es decir, que tendremos

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \int\int_S \left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + n\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\omega;$$

$d\omega$, en rigor, es el área infinitamente pequeña de cada triángulo; pero se sabe, por la definición de las integrales, que puede ser un área cualquiera infinitamente pequeña de la superficie S; precisamente por eso tiene un sentido la integral, porque el límite de la suma de los elementos infinitamente pequeños es independiente del sistema de dlvisión, ó sea de los elementos de área que se escojan.

Con esto queda demostrada la fórmula de Stokes, demostración larga por las observaciones minuciosas en que nos hemos entretenido; pero en el fondo, de una sencillez elemental. Mr. Poincaré la condensa en dos páginas.

*
* *

Pues todavía hemos de hacer una observación más, previniendo otra duda.

¿No podrá suceder que la superficie S tenga en algún punto ó en alguna zona su plano tangente paralelo á uno de los ejes coordenados, en cuyo caso el elemento de superficie á que nos referimos no podría contener un triángulo que cortase á los tres ejes?

Puede suceder esto, ciertamente; pero el caso es tan sen-

cillo, que nos contentaremos con hacer ligeras indicaciones.

Será agregar á los dos casos particulares otro tercero.

Consideremos una (fig. 34) superficie infinitamente pequeña $ABB'A'$ limitada en forma de rectángulo por sus intersecciones AB con el plano de las xy, ó paralelo al mfsmo : BB' intersección con el plano de las yz : $B'A'$ intersección con un plano paralelo al de las xy : y AA' intersección con el plano de las xz.

Si aplicamos el primer caso particular á las áreas $OAA'C'$ y $OBB'C'$, así como á los triángulos OBA y $C'B'A'$, tendremos:

1.° Que las integrales de línea se destruirán, como indican las flechas, á lo largo de OA, OB, OC', $A'C'$ y $B'C'$; no quedarán más que las integrales del contorno $ABB'A'$: es decir, el primer miembro de la fórmula de Stokes.

2.° Las íntegrales de superficie de los triángulos OAB y $C'A'B'$ se destruirán porque el sentido de la rotación es opuesto.

3.° Quedarán las integrales de superficie para los rectángulos $OAA'C'$ y $OBB'C'$.

Llamando s' y s á las áreas de estos rectángulos, tendremos

$$\int_{ABB'A'} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= s\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + s'\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right),$$

y siendo

$$s = ld\omega, \quad s' = md\omega, \quad d\omega = \text{area } ABB'A'$$

$$\int_{ABB'A'} (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right)\right] d\omega,$$

que es la fórmula de Stokes para este caso particular, puesto que la normal á la superficie $ABB'A'$ es perpendicular al eje de las z, y así $n = o$, con lo cual desaparece el último término de la fórmula.

***

La fórmula en cuestión puede escribirse y puede enunciarse en términos mucho más sencillos.

Respecto al primer miembro, hemos observado ya, que la

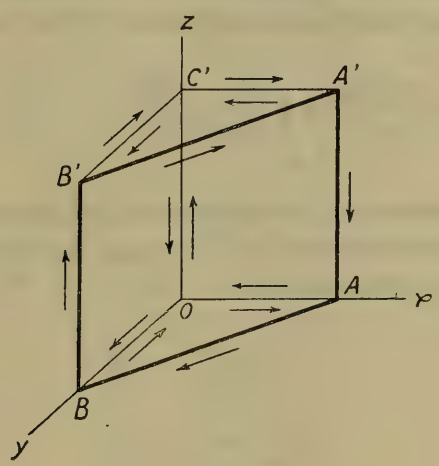


Figura 34.

expresión $Pdx + Qdy + Rdz$ representaría el trabajo elemental de una fuerza, cuyas componentes fuesen P, Q, R al recorrer el elemento de línea ds, cuyas componentes fuesen á su vez dx, dy, dz.

W es el vector abstracto del campo que consideramos; y P, Q, R son sus componentes, abstractas también; pero si W fuese una fuerza, entonces la expresión anterior representa-

ría un verdadero trabajo mecánico, y por extensión podemos decir que la integral representa el trabajo sobre la línea L del vector W.

De modo que si para abreviar representamos por W_s la proyección del vector W en cada punto de la línea L sobre la tangente, el primer miembro podrá escribirse

$$\int_L W_s \, . \, ds.$$

O sea el trabajo del vector á lo largo de la línea L.

Pasemos al segundo miembro, que es una integral doble, extendida á toda la superficie S, limitada por la línea L, y en que el coeficiente de la diferencial del área $d\omega$ es

$$l\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)+m\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right) \quad n\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right).$$

Si consideramos á los tres binomios de los tres paréntesis como las componentes de un vector, que llamaremos T, y representamos estas componentes por T_x, T_y, T_z, es decir, si hacemos,

$$T_x=\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz},$$

$$T_y=\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx},$$

$$T_z=\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy},$$

la expresión anterior tomará esta forma:

$$T_x l+T_y m+T_z n$$

que representa evidentemente la proyección del vector T so-

bre la normal al punto de la superficie que se considere y cuyas coordenadas sean x, y, z.

Porque, en efecto, la normal n forma con los ejes ángulos cuyos cosenos son l, m, n, luego la expresión precedente es la proyección sobre dicha normal del polígono que forman los tres componentes T_x, T_y, T_z.

Repitamos esto mismo, y fijemos bien las ideas, en la figura 35.

S es la superficie que se considera.

L es la línea que limita dicha superficie.

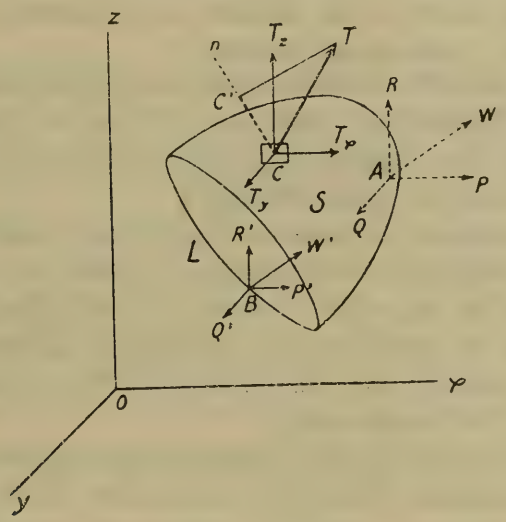


Figura 35.

La superficie y la línea se hallan en el campo de vectores, y como expicábamos en otra ocasión, para cada punto A de la superficie, habrá un vector W cuyas componentes serán P, Q, R. Y para cada punto B de la línea L, habrá asimismo un vector W' cuyos componentes serán P', Q', R'.

Estos vectores de la línea L quedan, por decirlo así, íntegros, y el primer miembro de la fórmula de Stockes repre-

senta, como hemos explicado hace un momento, el trabajo de dichos vectores, sobre la expresada línea L; trabajo, por decirlo así, abstracto ó de pura fórmula, si el vector es abstracto; trabajo mecánico y efectivo, si el vector se convierte en una fuerza.

Los vectores W de la superficie, no quedan, en cambio, íntegros, sino que por una combinación analítica determinada, que consiste en tomar las derivadas de sus componentes y las diferencias de estas derivadas, en la forma que antes expresamos, se obtienen las tres cantidades T_x, T_y, T_z, que se consideran como componentes de un nuevo vector T, derivado del W y á que se puede dar el nombre de *vector torbellino*, ó si se quiere, *torbellino*.

En la figura 35, lo hemos representado para el punto C, en vez de representarlo por el punto A, á fin de no complicar la figura; pero entiéndase que para cada punto de la superficie S existe un vector torbellino T.

Permítasenos que insistamos para evitar confusiones.

Para cada punto de la superficie S, existen dos vectores; el vector del campo W y el vector T, ó vector torbellino, que se deriva del anterior por una combinación analítica en que entran para cada punto las derivadas de P, Q, R correspondientes al expresado punto.

Para el punto C de la superficie, hemos representado el vector torbellino T y sus tres componentes, T_x, T_y, T_z.

Ahora bien, si trazamos por el punto C la normal Cn á la superficie S, y proyectamos T sobre n, es claro que CC', que representa dicha proyección, será evidentemente igual á

$$CC' = T_x l + T_y m + T_z n.$$

Y designando por la notación T_n dicha proyección, es decir, haciendo

$$T_n = CC' = T_x l + T_y m + T_z n$$

el segundo miembro de la fórmula de Stokes, toma la nueva forma, que es mucho más sencilla que la anterior,

$$\int\int_S \left[l\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)+m\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right)+n\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)\right] d\omega =$$

$$= \int\int_S (l T_x + m T_y + n T_z)\, d\omega = \int\int_S T_n\, d\omega$$

con lo cual, la fórmula completa puede escribirse de este modo:

$$\int_L W_s ds = \int\int_S T_n d\omega.$$

El primer miembro, ya hemos dicho que simboliza el trabajo del vector á lo largo de L; pues el segundo miembro tiene también una interpretación muy sugestiva, muy natural, y muy fecunda para las aplicaciones á la Física matemática.

En efecto; proyectar la línea T, (fig. 35), sobre la normal n en CC' y multiplicar CC' por el área $d\omega$ infinitamente pequeña que está representada en la figura, es en cierto modo expresar el flujo del vector T para el punto C; porque si T simbolizase la velocidad de un flúido que saliera á través de la superficie S, el flujo de salida sería un cilindro oblícuo cuyas aristas tuviesen la longitud T y en que la base fuese $d\omega$. Pero el volumen de este cilindro sería su base por la altura CC'.

De aquí resulta, que la fórmula de Stokes puede expresarse de esta manera abreviada: *trabajo del vector W á lo largo de L = flujo del vector T á través de la superficie.*

Pero como el vector T está derivado de W con el nombre de torbellino, también puede expresarse la fórmula de este modo conciso y abreviado:

Trabajo vector W = flujo vector torbellino W.

***

El vector T, cuyas componentes T_x, T_y, T_z se determinan por medio de P, Q, R, no sólo recibe el nombre de vector torbellino, sino otros muchos nombres análogos; se llama también *vórtice*, es decir, vórtice de W; rotación, ó sea rotación de W; y los ingleses le llaman *curl*, que significa algo asi como bucle, es decir, siempre la idea de algo que se retuerce, que gira, que es á modo de torbellino ó de vórtice.

La razón de estas denominaciones, ya la explicaremos más adelante.

De todas maneras, permítasenos que insistamos aun sobre esta nomenclatura que se repite constantemente en la Física matemática moderna.

Así pues, si encontramos estas denominaciones

Torbellino W, ó abreviadamente.....	Tor. W.
Vórtice W, ó bien.....	Vórt. W.
Rotación W, ó sea.....	Rot. W.
y, por fin.....	Curl. W.

todas ellas significarán lo siguiente:

Que hay que tomar los tres componentes P, Q, R del vector W;

Que con estas tres cantidades, que son funciones de x, y, z, hay que formar los tres binomios

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \quad \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \quad \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy};$$

Que hay que considerar al primer binomio como la componente paralela al eje de las x de un nuevo vector, componente que podremos designar por T_x; de modo que

$$T_x = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dx};$$

Que asímismo hay que considerar al segundo binomio como la componente paralela al eje de las y del nuevo vector que estamos formando, de suerte que, designando por T_y á dicha componente, tendremos

$$T_y = \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx};$$

Y por último, que consideraremos al tercer binomio como la componente paralela al eje de las z del nuevo vector expresado, es decir,

$$T_z = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

Formando un vector T, que tenga por componentes T_x, T_y, T_z éste será precisamente el que hemos designado por los nombres Tor. W, Vórt. W, Rot. W, Curl. W.

En suma

$$\text{Tor } W = \text{Vórt } W = \text{Rot } W = \text{Curl } W \left\{ \begin{array}{l} T_x = \dfrac{dR}{dy} - \dfrac{dQ}{dz} \\ T_y = \dfrac{dP}{dz} - \dfrac{dR}{dx} \\ T_z = \dfrac{dQ}{dx} - \dfrac{dP}{dy} \end{array} \right.$$

significan vector, cuyas componentes son:

Su magnitud será evidentemente

$$\text{magnitud-}\textit{vector torbellino} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)^2}$$

no tomando más que una de las denominaciones anteriores.

Insistamos todavía sobre este género de notaciones.

Si queremos expresar que un vector A, cuyas componen-

tes sean A_x, A_y, A_z es igual al vector T deducido del vector W, bastará que escribamos

$$A = \text{Tor. } W; \qquad (1)$$

que es como escribir

$$A = T.$$

Pero no se olvide que esta es una ecuación vectorial, la cual significa, que en el espacio coinciden el vector A y el vector T. Si queremos emplear las notaciones ordinarias, la igualdad de los vectores en ecuaciones ordinarias, que en este caso se llaman ecuaciones escalares, supone la igualdad de las tres componentes de ambos vectores, es decir:

$$A_x = T_x,$$
$$A_y = T_y,$$
$$A_z = T_z;$$

ó bien

$$\left.\begin{aligned} A_x &= \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \\ A_y &= \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} \\ A_z &= \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Tendremos, por último, que la ecuación vectorial (1) equivale á las tres ecuaciones escalares (2).

Cada ecuación vectorial se resuelve, pues, en tres ordinarias.

Son más cómodas, más breves las primeras; pero la ma-

yor parte de las veces, al efectuar los cálculos, hay que acudir á la segunda notación.

* * *

Estas denominaciones, torbellino, vórtice, rotación y curl, no son arbitrarias; nacen en cierto modo de la esencia de los vectores á que se aplican tales nombres, porque como iremos viendo en las aplicaciones, á todos estos vectores se une en cierto modo la idea de rotación, de giro, de torbellino.

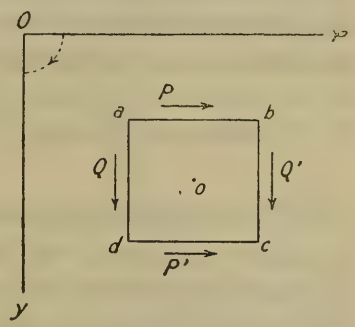


Figura 36.

Para aclarar más esta idea, pongamos un ejemplo.

Supongamos que el vector T se reduce á una de sus componentes, la paralela al eje de las z, perpendicular, por lo tanto, al plano de las $x\ y$ (fig. 36).

Esta componente tiene por valor

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

Pues bien, consideremos un rectángulo $abcd$ cuyos lados tengan las longitudes,

$$ab = dx, \qquad ad = dy.$$

Supongamos que sobre el lado ad actúa la componente Q en el sentido de la flecha.

El trabajo que Q ejercería, si fuese una fuerza, á lo largo de ad, sería

$$Q\,dy.$$

En la cara opuesta, el vector Q tendría el mismo valor Q, aumentado en la diferencial correspondiente al incremento $ab = dx$, es decir, $Q' = Q + \frac{dQ}{dx} dx$.

Y el trabajo que ejecuta á lo largo de bc será

$$Q'dy = Qdy + \frac{dQ}{dx} dx\,dy.$$

Si fijáramos el centro o del rectángulo $abcd$, ambos vectores considerados como fuerzas tenderían á hacer girar dicho rectángulo alrededor de su centro, con un trabajo igual á la diferencia de los dos anteriores

$$Qdy + \frac{dQ}{dx} dx\,dy - Qdy = \frac{dQ}{dx} dx\,dy.$$

Y si no se quiere hablar de trabajos, también pudiéramos considerar la fuerza Q como esfuerzo por unidad; pero como no establecemos una teoría, ni siquiera un teorema, sino que más bien sugerimos una imagen, diremos que

$$\frac{dQ}{dx} dx\,dy$$

expresa una tendencia al giro alrededor de o valuada numéricamente por la expresión anterior.

Repitiendo esto mismo para los lados ab, cd, tendremos otra tendencia al giro, pero en sentido contrario, medida por

$$\frac{dP}{dy} dx\,dy.$$

Y por fin una tendencia expresada por la diferencia, y por unidad de superficie

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy},$$

lo cual justifica las denominaciones anteriores.

Hemos hablado en términos vagos de *tendencia al giro;* pero esto lo precisaremos más en otra ocasión.

Si quisiéramos ahora dar precisión á nuestra idea, nos separaríamos demasiado del objeto principal de esta conferencia.

Muchas veces, de propósito, anticipamos ideas en forma vaga é imprecisa, para despertar en nuestros alumnos, con cierta expontaneidad, conceptos á que luego hemos de dar forma más rigurosa.

En nuestro globo, antes de la luz del sol, está la claridad indecisa de la alborada; en las inteligencias sucede otro tanto, y quizá conviene que suceda, y tal vez no pueda suceder de otro modo; es decir, que la verdad, antes de ser comprendida con su claridad propia, es sospechada con la media luz del amanecer.

Y perdónesenos esta digresión, y continuemos el estudio de la fórmula de Stokes.

Hemos visto que dicha fórmula expresa en su primer miembro el trabajo de un vector, y en su segundo miembro el flujo de *otro vector*, que se deriva analíticamente del vector extendido por todo el campo ó por todo el espacio, variable de un punto á otro, y cuyas componentes son, como es natural, funciones de x, y, z.

Por eso decimos abreviadamente:

Trabajo total de W sobre L = flujo de Torb. de W en la superficie S.

Y decimos que esta fórmula es una fórmula de transformación, que el primer miembro es una transformación del segundo, lo cual viene á identificar en cierto modo el flujo al trabajo. Precisamente para que se comprenda el sentido de la fórmula, hemos presentado el ejemplo de la figura 36. En ella el flujo en el elemento $dx\,dy$ era el resultado de un trabajo en su perímetro, y por eso se comprende por cierta intuición que, dividiendo á la superficie en elementos, esta especie de trabajo se vaya compensando en la extensión

de la superficie, dando algo así como una resultante en el perímetro *L*.

Todavía son estas ideas un tanto vagas, que anticipamos á modo de sugestión.

Y pasemos ya á las aplicaciones del teorema de Stokes.

*
* *

Siempre que la materia se presta á ello, pero aprovechando todas las ocasiones, buscamos y procuramos poner en relieve al exponer una teoría, analogías, semejanzas, simetrías, si vale la palabra, con otra teoría anteriormente expuesta; á ser posible en el fondo, ó por lo menos en el procedimiento.

Por esta razón, y porque estas analogías y semejanzas son útiles al enseñar una ciencia, y porque de ellas se desprende algo así como un conato de unidad, entre unas y otras materias, por esta razón, repetimos, al hablar del teorema de Stokes, procuramos seguir la misma marcha que seguimos en la fórmula ó teorema de Green.

En uno y en otro, se tiende á reducir una integral múltiple á otra de grado inferior; una integral triple, á una integral doble; una integral doble á una integral sencilla.

En una y en otra fórmula, la cantidad que se expresa bajo los signos de integración se refiere á los vectores de un campo.

En una y en otra, se trata de una igualdad de transformación, no de una ecuación en que se despeje una incógnita en función de los datos.

En la fórmula de Green, una vez demostrada, pasamos á estudiar casos particulares, considerando en la expresión diferencial de las tres componentes del vector del campo *F, G, H* varios casos particulares.

A saber: cuando

$$Fdx + Gdy + Hdz,$$

ni era una diferencial exacta, ni tenía ningún factor de integrabilidad; cuando dicha expresión, podía integrarse mediante la multiplicación de determinado factor; y por último, cuando era una diferencial exacta.

Correspondiendo estos tres casos á aquellos en que el vector, cuyos componentes eran F, G, H dependía de tres escalares, ó de dos, ó de una sola función escalar.

Y ahora, siguiendo el mismo paralelismo para la fórmula de Stokes, consideraremos tres casos análogos á los tres citados.

1.° Cuando

$$Pdx + Qdy + Rdz,$$

ni es una diferencial exacta, ni existe factor de integrabilidad.

2.° Cuando existe un factor en x, y, z tal que multiplicando por él la expresión anterior, ésta se convierte en una diferencial exacta de dichas tres variables.

3.° Cuando la expresión, por si misma, es una diferencial exacta.

El paralelismo entre la marcha que seguimos al estudiar el teorema de Stokes y la que seguimos en el teorema de Green, no puede ser más completa.

El primer caso, de los tres antes señalados, nada ofrece de particular.

La fórmula de Stokes conserva toda su generalidad.

***

Pasemos al segundo caso, que da lugar á un resultado verdaderamente curioso.

Supongamos que $Pdx + Qdy + Rdz$ no sea una diferencial exacta, de modo que $Pdy + Qdy + Rdz = o$ no se pueda integrar directamente, pero que exista un factor de integrabilidad, es decir, una función de x, y, z, que representaremos por $\frac{1}{\psi(x, y, z)}$, ó, abreviadamente, por $\frac{1}{\psi}$; y ya explicamos en la fórmula de Green, que ponemos bajo esta forma dicho factor sólo por la comodidad del cálculo; función tal que, multiplicando por ella la expresión diferencial precedente, el resultado

$$\frac{1}{\psi}(Pdx + Qdy + Rdz)$$

sea una diferencial exacta de una función x, y, z, que representaremos por $\varphi(x, y, z)$.

Tendremos, según esto,

$$\frac{1}{\psi}(Pdx + Qdy + Rdz) = d\varphi$$

ó bien

$$\frac{1}{\psi} Pdx + \frac{1}{\psi} Qdy + \frac{1}{\psi} Rdz = d\varphi.$$

Si el primer miembro es una diferencial exacta de la función φ, es claro que tendremos

$$\frac{1}{\psi} P = \frac{d\varphi}{dx}, \qquad \frac{1}{\psi} Q = \frac{d\varphi}{dy}, \qquad \frac{1}{\varphi} R = \frac{d\varphi}{dz},$$

ó bien

$$P = \psi \frac{d\varphi}{dx}, \qquad Q = \psi \frac{d\varphi}{dy}, \qquad R = \psi \frac{d\varphi}{dz},$$

expresiones que nos permiten determinar para este caso de integrabilidad una relación muy notable entre el vector W, cuyas componentes son P, Q, R y el vector torbellino T, cuyas componentes hemos representado por T_x, T_y, T_z, siendo

$$T_x = \frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}, \quad T_y = \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}, \quad T_z = \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}.$$

En efecto, vamos á demostrar que en este caso de integrabilidad el vector del campo W y el vector torbellino T son por el pronto para todos los puntos de la superficie S perpendiculares entre sí.

En efecto, se sabe por la Geometría analítica, que la condición para que dos rectas que pasan por un punto sean perpendiculares es, que entre sus componentes se verifique la relación,

$$PT_x + QT_y + RT_z = 0.$$

Relación que expresa que el coseno del ángulo que forman W y T es de 90°.

Pero esta relación para cualquier punto x, y, z queda verificada, es decir, es una identidad.

Para converse de ello, basta sustituir en la relación precedente, en vez de T_x, T_y, T_z, sus valores en función de P, Q, R, con lo cual tendremos que se convertirá en

$$P\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + Q\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + R\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right) \quad (c)$$

Y sólo resta sustituir en esta expresión, en vez de P, Q, R los valores que antes obtuvimos, y además, las derivadas que contiene la ecuación (c).

Tenemos, pues,

$$P = \psi \frac{d\varphi}{dx}, \qquad Q = \psi \frac{d\varphi}{dy}, \qquad R = \psi \frac{d\varphi}{dz}$$

$$\frac{dP}{dy} = \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}, \qquad \frac{dP}{dz} = \frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dz}$$

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}, \qquad \frac{dQ}{dz} = \frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dy} + \psi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}$$

$$\frac{dR}{dx} = \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dz} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dz}, \qquad \frac{dR}{dy} = \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dz} + \psi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}$$

y sustituyendo en (c)

$$\psi \frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dz} + \psi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz} - \frac{d\psi}{dz}\frac{d\psi}{dy} - \psi \frac{d^2\varphi}{dy\,dz}\right]$$
$$+ \psi \frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dx} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dz} - \frac{d\psi}{dx}\frac{d\psi}{dz} - \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dz}\right]$$
$$+ \psi \frac{d\varphi}{dz}\left[\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} + \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\psi}{dx} - \psi \frac{d^2\varphi}{dx\,dy}\right] = 0$$

y suprimiendo los términos que se destruyen desde luego

$$\psi \frac{d\varphi}{dx}\left[\frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dy}\right] +$$
$$+ \psi \frac{d\varphi}{dy}\left[\frac{d\psi}{dz}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dz}\right] +$$
$$+ \psi \frac{d\varphi}{dz}\left[\frac{d\psi}{dx}\frac{d\varphi}{dy} - \frac{d\psi}{dy}\frac{d\varphi}{dx}\right] = 0;$$

ó bien

$$\frac{d\psi}{dy}\left(\frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dz}\frac{d\varphi}{dx}\right) +$$
$$+ \frac{d\psi}{dx}\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz} - \frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dz}\right) +$$
$$+ \frac{d\psi}{dz}\left(\frac{d\varphi}{dy}\frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx}\frac{d\varphi}{dy}\right) = 0$$

que se reduce á

$$0 = 0.$$

La condición queda, pues, satisfecha, no sólo para todos los puntos de la superficie, sino para todos los puntos del campo vectorial.

De aquí resulta *que es condición necesaria* para que la expresión $Pdx + Qdy + Rdz$ sea integrable, que el vector torbellino sea en cada punto perpendicular al vector del campo, es decir, que se verifique la condición (c).

En cálculo integral se demuestra que esta condición no sólo es necesaria, sino que es suficiente, y los que quieran refrescar sus ideas en este punto, pueden consultar cualquier tratado de Análisis infinitesimal, por ejemplo, el tratado excelente de cálculo de Mr. Humbert, donde verán cual es el método de integración, siempre que se verifique la condición de integrabilidad (c).

Las notaciones son distintas, y la condición de integrabilidad tiene otra forma, pero con facilidad suma se identifican ambas condiciones; la forma (c) puede decirse que es clásica.

***

El tercer caso es aquel en que $Fdx + Qdy + Rdz$ es una diferencial exacta.

Para que esto se verifique es preciso que el vector torbellino se anule, porque en efecto, se sabe por el estudio del cálculo infinitesimal, que las condiciones necesarias y suficientes para que dicha expresión sea una diferencial exacta, son estas:

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = 0, \quad \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} = 0, \quad \frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = 0.$$

Pero éstas son precisamente las componentes del vector T; luego en efecto, para que la expresión de que se trata sea integrable, es forzoso que el vector torbellino sea nulo.

Lo será, por lo tanto, el segundo miembro de la forma de Stokes.

Y es evidente que también lo será por sí el primero, porque si la integral de $Pdx + Qdy + Rdz$ es una función de x, y, z, al integrar á lo largo de la línea L, coincidirán los dos límites de la integración en un sólo punto, y la integral se reducirá á o.

En la conferencia próxima todavía seguiremos estudiando la fórmula de Stokes.

XLVIII.— Estudio completo de una clase especial de integrales singulares.

POR LAURO CLARIANA

SEGUNDA PARTE

I

INTEGRALES SINGULARES DEDUCIDAS DE LA INTEGRAL GENERAL Ó DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL $F(x, y, y')=o$, SEGÚN LOS PROCEDIMIENTOS ORDINARIOS

Esta segunda parte, como la más interesante, tiene por objeto el estudio de las integrales singulares en los diferentes conceptos que cabe deducirlas, y á este fin hemos considerado que no estaría fuera de lugar empezar á obtenerlas de la integral general.

La ecuación diferencial de Clairaut, dió, como ya se ha visto, origen á esta clase de integrales especiales, que tienen la condición de satisfacer á la ecuación diferencial, sin que puedan deducirse de la integral general por ningún valor particular atribuído á la constante.

Hay que advertir, sin embargo, que los procedimientos analíticos que se conocen para determinarlas, pueden conducirnos en ciertos casos, á integrales particulares, así como en otros, adquirir el doble carácter de singular y particular.

Además, según indica Boole, es posible que la integral singular pueda presentarse bajo tres aspectos diferentes, esto es:

1.° Cuando la constante G, recibe un número infinito de valores dependientes de x, según una cierta ley.

2.° Cuando G, toma un determinado número de valores, dependientes aún de x, y también según una cierta ley; y 3.° y último, cuando G, recibe un número determinado de valores, independientes completamente de x.

Después de estos preliminares, precisa pasar inmediatamente á la determinación de las diferentes fórmulas que, según los procedimientos ordinarios, nos pueden conducir á la determinación de las integrales singulares.

Sabido es, que dada la función finita como integral, se obtiene la ecuación diferencial que le corresponde, derivando la función integral, según x, y eliminando luego la constante.

Empero las integrales singulares corresponden á la envolvente de las diferentes involutas representadas por las integrales particulares que se deducen de la integral general; de suerte, que el estudio de las integrales singulares, nos pone en relación de todo lo que se consigna también en la primera parte de esta Memoria, haciéndose á este punto indispensables las consideraciones analíticas y geométricas contenidas en la misma, al objeto de explicarnos ciertas anomalías aparentes que presentan dichas integrales singulares.

Supongamos que

$$f(x, y, G) = o, \qquad (1)$$

sea la integral general de una ecuación diferencial de primer orden y de un grado cualquiera, tal como: (2) $F(x,y,y') = o$.

La integral singular de (2), podemos suponer que sea $\varphi(x, y) = o$, la cual debe satisfacer á (2); sin que sea posible deducirla de (1), por ningún valor particular atribuído á la constante G.

Ahora bien, si suponemos que G sea función, en general, de x é y, cabe admitir: $f(x, y, G) = \varphi(x, y)$; de modo que al deducir de esta igualdad la expresión de G, sustituyendo luego su valor en f, debe dar por resultado una identidad.

Esta generalización, atribuída á la integral general, nos permite extender el círculo de acción, pasando más allá de lo que pueden dar las integrales particulares, entrando ya en el terreno de la teoría de las involutas y envolventes, y por ende al estudio de las integrales singulares.

Comencemos suponiendo que la constante dependa sólo de una de las variables, y en este concepto podremos sentar los principios siguientes:

Cuando G es función sólo de x, la integral singular contiene á entrambas variables, ó en el caso de contener una sola, ésta será y.

En efecto, suponiendo conocida la integral general, así como la singular, si se quiere expresar G en función de una de las dos variables, es preciso eliminar la otra, entre las dos ecuaciones anteriores; de modo que si G es función de x, precisa eliminar la y, lo cual obliga que ésta conste en la integral singular.

De un modo análogo puede demostrarse que si G es función de y, la integral singular debe contener x, ya sola ó junto con y.

Después de lo que precede, supongamos ahora que la integral general (1), se resuelva según y; así tendremos

$$y = \pi\,(x, \mathrm{G}).$$

Si se considera G constante, la derivada de esta ecuación será:

$$y' = D_x\,\pi\,(x, \mathrm{G}).$$

Eliminando G entre estas dos ecuaciones, se obtendrá la ecuación diferencial correspondiente (2).

Empero, si suponemos que G dependa de x, se tiene

$$y' = D_x\,\pi\,(x, \mathrm{G}) + D_{\mathrm{G}}\,\pi\,(x, \mathrm{G})\,D_x\,c,$$

y para que esta igualdad corresponda con la anterior, es

preciso que $D_c \pi(x, c) D_x c = o$; igualdad que queda satisfecha siendo

$$D_x \mathrm{G} = o, \text{ ó también } D_{\mathrm{G}} \pi(x, \mathrm{G}) = o.$$

La primera condición da $\mathrm{G} =$ constante, originándose una integral particular.

La segunda condición,

$$D_{\mathrm{G}} \pi(x, \mathrm{G}) = \frac{dy}{d\mathrm{G}} = o \qquad (3)$$

da lugar á la integral singular.

Según se desprende de (3), el resultado se convierte en una función de la forma $\psi(x, \mathrm{G}) = o$, y los diferentes valores de G, que pueden obtenerse de esta función, son los que procuran las diferentes integrales singulares, en general, pertenecientes á la ecuación diferencial anterior; empero, si alguno de los valores que se obtiene para G fuese constante, ó, aun dependiendo de x, fuese tal que sustituído en la integral general se pudiera obtener de ésta, por algún valor particular de G, la solución obtenida no sería singular, sino particular.

Consideremos, por ejemplo, la misma ecuación diferencial estudiada ya en la primera parte.

Sea

$$y'^3 - 4\, xyy' + 8\, y^2 = o,$$

cuya integral general, es

$$y = \mathrm{G}\,(x - \mathrm{G})^2. \qquad (b)$$

Al derivar esta igualdad, según G, y aplicando los principios anteriores, se tiene

$$D_c y = (x - \mathrm{G})\,(x - 3\,\mathrm{G}) = o = \psi(x, \mathrm{G}).$$

Los valores de G, que satisfacen á esta igualdad, son:

$$G = x, \quad y \quad G = \frac{1}{3} x.$$

Fácilmente se concibe que el primer valor no corresponde á la integral singular, puesto que sustituído en la integral general (b), queda ésta satisfecha igualmente que si consideráramos para la constante G el valor particular $G = o$.

En cambio, al sustituir en (b) el segundo valor $G = \frac{1}{3} x$, se obtiene

$$27\, y = 4\, x^3; \qquad (d)$$

y como este valor no se puede deducir de (b) por ningún valor particular atribuído á la constante G, satisfaciendo, no obstante, dicha ecuación (d) á la ecuación diferencial, resulta que esta solución debe considerarse como una integral singular.

Notable es la interpretación geométrica que permite este problema, respecto á la primera solución $G = x$.

En efecto, las integrales particulares que resultan de la integral general, representan parábolas tangentes al eje x, siendo todos los ejes de las parábolas paralelos al eje y, pero con la particularidad notable de que á medida que el vértice de dichas parábolas se acerca al origen de coordenadas, tienden éstas á convertirse en rectas; el eje x adquiere el doble carácter de integral particular y singular; con todo, á este resultado, sólo se le concede carácter de integral particular, por ser consecuencia directa de la integral general por un valor particular atribuído á la constante.

Demos un segundo ejemplo que consideramos notable por la interpretación geométrica sencilla á que puede sujetarse la integral singular, problema que ya hemos estudiado anteriormente, bien que bajo otro punto de vista.

Sea la ecuación de la circunferencia

$$(x - \text{G})^2 + y^2 = r^2. \qquad (1)$$

Esta ecuación tiene por ecuación diferencial

$$y^2 \left[1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \right] = r^2.$$

De la igualdad (1), se deduce

$$y = \sqrt{r^2 - (x - \text{G})^2};$$

Luego la fórmula general

$$D_c y = \frac{dy}{d\text{G}} = \psi(x, \text{G}) = o,$$

aplicada á este caso particular, da

$$D_c y = \frac{x - \text{G}}{\sqrt{r^2 - (x - \text{G})^2}} = o; \text{ de donde } x = \text{G}.$$

Al sustituir este valor en (1), se tiene la integral singular

$$y^2 - r^2 = o.$$

Este resultado corresponde con el de la envolvente que ya encontramos referente á las involutas expresadas por la ecuación (1), en virtud de la variabilidad del parámetro G. De suerte, que esto nos dice que la integral singular hallada, expresa geométricamente la envolvente de las diferentes circunferencias expresadas por la ecuación (1) al dar á G diferentes valores particulares.

Volviendo á la ecuación primitiva

$$f(x, y, \text{G}) = o,$$

si la resolviéramos ahora, según x, podríamos hacer análogas consideraciones á las anteriores, al objeto de alcanzar la ecuación

$$D_c\, x = \frac{dx}{d\mathrm{G}} = \psi\,(y, \mathrm{G}) = o;$$

cuyas consecuencias serían completamente análogas á las del caso anterior.

Consideremos, por fin, la integral general

$$f\,(x, y, \mathrm{G}) = o \text{ (1), sin resolver.}$$

Al tomar la derivada, resulta:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{dy}{dx} = o \qquad (2)$$

Luego, al eliminar la constante G entre (1) y (2), se obtiene la ecuación diferencial

$$F\,(x, y, y') = o.$$

Ahora bien, si consideramos G, con toda generalidad, al derivar la ecuación (1), se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{G}}\,\frac{d\mathrm{G}}{dx} = o \quad » \quad \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \mathrm{G}}\,\frac{d\mathrm{G}}{dy} = o,$$

de donde

$$\frac{dx}{d\mathrm{G}} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{G}}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}}, \quad \frac{dy}{d\mathrm{G}} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{G}}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}}.$$

Y como para la determinación de la integral singular según hemos visto, debe verificarse

$$\frac{dx}{d\mathrm{G}} = o, \quad \text{ó} \quad \frac{dy}{d\mathrm{G}} = o,$$

naturalmente se deduce, de las igualdades anteriores, las condiciones para determinar dichas integrales singulares, para cuando la función sea implícita, siendo éstas las que á continuación se expresan:

$$\text{(m)} \qquad \frac{\partial f}{\partial G} = o,$$

ó también, en el supuesto de que se resuelvan en la tercera categoría de cantidad, las derivadas

$$\text{(n)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ó} \quad \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Interesantes son á este punto, las observaciones siguientes:

1.ª Las condiciones (n) no tienen aplicación, cuando la ecuación $f(x, y, G) = o$, es racional y entera.

2.ª Aunque dicha ecuación sea entera, la condición (m), será insuficiente, si $\frac{\partial f}{dG}$, se anula por algún factor de $\frac{\partial f}{dx}$ ó $\frac{\partial f}{\partial y}$, pues en este caso la relación definitiva $\frac{dx}{dG}$ ó $\frac{dy}{dG}$, que son las verdaderas expresiones determinativas de la integral singular, se resuelven en la indeterminación, lo que precisa determinar su verdadero valor, para saber si puede originarse ó no una integral singular.

3.ª En general, $\frac{\partial f}{\partial G} = o$, da G en función de x é y, y para asegurarse si procura ó no una integral singular, basta eliminar una de las variables entre ésta y la primitiva $f(x, y, G) = o$, y si el resultado de G, es una función de la otra variable, la solución correspondiente será singular; mas si por el contrario resulta G = constante, la solución será particular.

4.ª El valor de G que transforma $\frac{\partial f}{\partial y}$, en la tercera categoría de cantidad, debe procurar lo mismo para $\frac{\partial f}{\partial x}$.

Notable es el ejemplo que presenta Serret, para probar que si los valores G, que se obtienen de $\frac{\partial f}{\partial G} = o$, anulan á $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$, los resultados que se deducen, al sustituirlos en la integral general, pueden dejar de satisfacer á la ecuación diferencial correspondiente, por cuyo motivo no podrán considerarse dichos resultados como integrales singulares.

En efecto, sea la ecuación

$$(1) \quad f(x, y, G) = (3xy + 2x^3 + G)^2 - 4(y + x^2)^3 = o,$$

la integral de una cierta ecuación diferencial, la cual para hallarla será suficiente eliminar G entre (1) y su derivada según x, conforme á los cálculos que á continuación se expresan:

$$2(3xy + 2x^3 + G)(3xy' + 3y + 6x^2) - \\ - 12(y + x^2)^2(y' + 2x) = o,$$

luego

$$3xy + 2x^3 + G = \frac{2(y + x^2)^2(y' + 2x)}{xy' + y + 2x^2}.$$

Al sustituir este valor en (1), después de simplificar, se tiene

$$(y + x^2)(y' + 2x)^2 - (xy' + y + 2x^2)^2 = o,$$

o sea

$$(y + x^2)(y' + 2x)^2 - [x(y' + 2x) + y]^2 = o;$$

de donde, después de sencillas reducciones, resulta:

$$y - 2xy' - y'^2 = o.$$

Ahora bien, para deducir la integral singular, según el procedimiento explicado, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial G} = 2(3xy + 2x^3 + G) = o;$$

al eliminar G, entre esta ecuación y (1), se halla

$$-4(y + x^2)^3 = o, \text{ ó sea } y = -x^2, \qquad (a)$$

Mas este valor sustituído en la ecuación diferencial, no la satisface.

En efecto, puesto que se tiene, según (a)

$$\frac{dy}{dx} = -2x = y';$$

al sustituir este valor en la ecuación diferencial, se obtiene:

$$y - 2xy' - y'^2 = -x^2 + 4x^2 - 4x^2 = -x^2;$$

lo cual indica que dicho valor no satisface á la ecuación diferencial.

Esta excepción de la regla general, se debe á que dicho valor de G, anula á las derivadas

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial f}{\partial y}$$

En efecto, sustituyendo valores, se tiene

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2(3xy + 2x^3 + G)(3y + 6x^2) - 12(y + x^2)^2\, 2x =$$
$$= 2[3xy + 2x^3 - 3xy - 2x^3](3y + 6x^2) - 12(-x^2 + x^2)^2\, 2x = o$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2[3xy + 2x^3 + G]\, 3x - 12(y + x^2)^2 =$$
$$= 2[3xy + 2x^3 - 3xy - 2x^3]\, 3x - 12(-x^2 + x^2)^2 = o.$$

Estos resultados dan á comprender como la ecuación hallada $y = -x^2$, á pesar de que sea el resultado de la aplicación de la fórmula general para la determinación de la integral singular, ella no satisface, sin embargo, á la ecuación diferencial, no pudiendo considerarse, en su virtud, dicha ecuación como su integral singular.

Esta conclusión es de alta importancia y guarda relación con el método especial que luego daremos á conocer, al deducir las integrales singulares de la misma ecuación diferencial, pues muchos serán los casos que la derivada de la integral que se halla no corresponderá con la ecuación diferencial dada, sino con otra íntimamente relacionada con la primera.

Para terminar este número daremos un ejemplo que no esté sujeto á las restricciones del anterior.

Sea

$$x + 2yy' - xy'^2 = o.$$

La integral general de esta ecuación diferencial, ya estudiada, es

$$f(x, y, G) = o = x^2 - 2cy - G^2 = o. \qquad (\alpha)$$

La igualdad $\frac{\partial f}{\partial G}$, se reduce en este caso á

$$-2y - 2G = o; \qquad (\beta)$$

De donde, al eliminar G, entre (α) y (β), resulta:

$$x^2 + y^2 = o, \qquad (\gamma).$$

Esta ecuación constituye verdaderamente una integral singular de la ecuación diferencial dada, pues no puede obtenerse de la integral general por ningún valor particular atri-

buído á la constante G, mientras que ella satisface á la ecuación diferencial, pues al diferenciar (γ), se halla

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = y';$$

y al sustituir este valor en la ecuación diferencial, se obtiene

$$x - 2y\frac{x}{y} - x.\frac{x^2}{y^2} = o,$$

de donde, según (γ), resulta la identidad $o = o$.

***

Atendida la dificultad que presenta en varios casos el poder hallar la integral general de su ecuación diferencial, se ha procurado deducir la integral singular, de la misma ecuación diferencial, lo cual debe presentar grandes ventajas para los cálculos, si bien en este concepto aumentan los diferentes puntos de vista en que se pueden considerar dichas integrales singulares.

Así, pues, antes de llegar á exponer nuestro método especial, consideramos útil, por último, decir algo respecto á lo que indican las principales obras que tratan de este punto, fijándonos en particular en los ejemplos que presenta Rubini, los cuales nos han servido más ó menos de norma ya en los números anteriores.

Supongamos que la ecuación primitiva, resuelta según y, sea

$$y = f(x, G). \qquad (1)$$

Sabido es que si se toma la derivada de esta ecuación

$$y' = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (2)$$

al eliminar la G, se obtiene la ecuación diferencial

$$y' = \varphi(x, y). \tag{3}$$

Las relaciones que existen entre (1), (2) y (3) permiten derivar (2) según y, en el supuesto de que G sea función de las variables, luego

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial G} \frac{dG}{dy}. \tag{4}$$

Además, podemos admitir las transformaciones siguientes:

$$\frac{dy}{dG} \frac{dG}{dy} = 1$$

$$\frac{dG}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dG}} = \frac{1}{\frac{df(x, G)}{dG}}.$$

Luego, según (4), se obtiene

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial G} : \frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial G} : \frac{\partial f}{\partial G} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} l \frac{\partial f}{\partial G} = \frac{\partial}{\partial x} l \frac{\partial y}{\partial G}. \tag{5}$$

Si la ecuación primitiva se hubiese resuelto según x, se tendría

$$x = \pi(y, G),$$

y por simetría, sabiendo que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y'}$, resultaría inmediatamente, por un cálculo análogo al anterior,

$$\frac{d \frac{1}{y'}}{dx} = \frac{d}{\partial y} l . \frac{dx}{dG}.$$

Voviendo á la fórmula (5), sabido es que la integral singular resulta de $\frac{dy}{dG} = o$, para cuando la ecuación primitiva tiene la forma (1); y, por consiguiente, esta última igualdad, se resuelve en una función $\psi(x, G) = o$.

Así, pues, al considerar $\frac{dy'}{dy}$ como relación límite del incremento de la función $\psi(x, G)$, respecto á la variable x, resulta

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{l\psi(x + dx, G) - l\psi(x, G)}{dx}. \qquad (6)$$

A este punto, interesa recordar los principios del cálculo infinitesimal que se exponen en un principio de esta Memoria, á fin de probar debidamente que el segundo miembro de la igualdad anterior se resuelve en la tercera categoría de cantidad.

En efecto, considerando la función $\psi(x, G)$ continua, no se puede suponer que $\psi(x + dx, G)$ sea completamente nula, siéndolo $\psi(x, G)$; y si bien es cierto que para $\psi(x + dx, G)$ resultará un infinitamente pequeño, éste siempre será de orden inferior al que corresponde á $\psi(x, G)$; pues siendo esta función igual á cero, se puede suponer que se refiera á un infinitamente pequeño de un orden infinitamente grande. Ahora bien; al tomar luego logaritmos de estas funciones, resultará para el logaritmo de cero una cantidad correspondiente á la tercera categoría, la cual no podrá destruir al otro término, según lo que acabamos de manifestar.

De modo, que bien cabe afirmar que el orden del quebrado del segundo miembro de la igualdad (6), corresponde á la tercera categoría de cantidad.

Debe tenerse presente, sin embargo, que una relación entre x é y que convierta $\frac{dy'}{dy}$ en una cantidad infinitamente

grande, no podrá siempre considerarse como integral singular de la ecuación diferencial.

Ahora bien; si supusiéramos luego x, función de y por razón de simetría, resultaría bajo condiciones análogas á las del caso anterior, que la relación $\frac{d\frac{1}{y'}}{dx}$ se transformaría también en una cantidad infinitamente grande al referirse á una integral singular de la ecuación diferencial dada.

Además, es de notar también que si la ecuación diferencial

$$f(x, y, y') = o,$$

es entera y racional, la condición de que $\frac{dy'}{dy}$ se resuelva en la tercera categoría de cantidad, lleva consigo la de que $\frac{dt}{dy'}$, se resuelva en la primera, pues al derivar la ecuación anterior respecto á y se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{dy'}{dy} = o,$$

y fácilmente se concibe que sólo así, el segundo término podrá neutralizar el primero, para que resulte cero, á no ser que se anulara $\frac{df}{dy}$ por la combinación de $f = o$,, $\frac{df}{dy'} = o$.

Mas si esto resultara, fuera preciso entonces determinar el verdadero valor de

$$\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial y'}}\right).$$

No cabe duda que de todos los medios indicados para

obtener integrales singulares, este último sería el mejor, si no fuesen las restricciones á que está sujeto.

Apliquemos los procedimientos anteriores á varios ejemplos.

Sea

$$y + (y - x)\,y' + (a - x)\,y'^2 = o;$$

de donde

$$y' = \frac{x - y \pm \sqrt{(x-y)^2 - 4\,(a-x)\,y}}{2\,(a-x)}.$$

Luego

$$D_y y' = \frac{1}{2(a-x)}\left[-1 \pm \frac{y - x - 2\,(a-x)}{\sqrt{(x-y)^2 - 4\,(a-x)\,y}}\right].$$

Según lo que precede, para la integral singular se tendrá

$$(x - y)^2 - 4\,(a - x)\,y = o,$$

ó sea también

$$(x + y)^2 - 4\,ay = o. \qquad (a)$$

Para convencerse que de esta ecuación es una integral singular de la ecuación diferencial dada, hay que ver si la satisface.

Así, pues, de (a) resulta

$$2\,(x + y)\,(1 + y') - 4\,ay' = o,$$

de donde

$$y' = \frac{x + y}{2\,a - x - y}.$$

Este valor, sustituído en la ecuación diferencial, da

$$y + (y - x)\,\frac{x + y}{2\,a - (x + y)} + (a - x)\,\frac{(x + y)^2}{[2\,a - (x + y)]^2} = o.$$

Desarrollando esta igualdad, se obtiene

$$y\,[4\,a^2 - 4\,a\,(x+y) + (x+y)^2] +$$
$$+ (y-x)\,[2a\,(x+y) - (x+y)^2] + (a-x)\,(x+y)^2 = o,$$

reduciendo

$$4\,a^2\,y - 2\,ay\,(x+y) - 2\,ax\,(x+y) + a\,(x+y)^2 = o;$$

y por fin

$$4\,a^2\,y - a\,(x+y)^2 = o;$$

pero como se tiene $(x+y)^2 = 4ay$, según (a), resulta definitivamente

$$4\,a^2\,y - 4\,a^2\,y = o,$$

ó sea la identidad $o = o$.

De suerte que la integral (a) satisface á la ecuación diferencial, sin que ella pueda deducirse por ningún valor particular atribuído á la constante de la integral general que, en este caso, es la misma ecuación diferencial, sustituyendo G por y', conforme á los principios que van expuestos relativos á la fórmula de Clairaut.

Ahora bien, si partiéramos de la derivada según y', tomada sobre la ecuación diferencial dada, obtendríamos el mismo resultado anterior, bien que con más rapidez.

En efecto, al tomar la derivada en y' de

$$y + (y-x)\,y' + (a-x)\,y'^2 = o \qquad (a)$$

é igualando el resultado á cero, se tiene

$$y - x + 2\,(a-x)\,y' = o,$$

de donde

$$y' = \frac{x - y}{2(a - x)}.$$

Al sustituir este valor en (a), se obtiene inmediatamente, después de simples operaciones,

$$(x + y)^2 - 4\,ya = o.$$

Ecuación de la integridad singular, igual á la que se halló por el primer procedimiento.

Notables son las consideraciones geométricas de Lagrange, para explicar este segundo procedimiento, á cuyo fin interesa tener presente los conceptos geométricos dentro de lo infinitésimo que se indican en la primera parte.

Lagrange, dice: Puesto que la integral singular, debe representar la envolvente de la serie de líneas que satisfacen á la ecuación diferencial, se comprende que esta envolvente no puede existír, sino cuando las líneas de la serie se encuentran, esto es, cuando la ecuación $f(x,y,y')=o$, (1), pueda dar para y' muchos valores en un mismo punto del plano, lo cual obliga á que la ecuación diferencial sea á lo menos de segundo grado respecto á y'; según este supuesto, la envolvente es el lugar geométrico de puntos donde dos á dos, las líneas infinitamente próximas de la serie se cortan; y á estos puntos corresponderán, por consiguiente, raíces dobles de la ecuación en y', y su lugar se obtendrá expresando la condición para que la ecuación diferencial tenga una raiz doble, correspondiendo á la vez con la tangente á la envolvente; de suerte, que al eliminar y' entre la ecuación (1), y su derivada, según y', se obtendrá la ecuación de le envolvente, ó sea la integral singular.

Empero, á este punto hay que advertir que la relación en x á y obtenida, no siempre satisface á la ecuación diferencial dada, pues como manifiesta con sumo acierto el matemáti-

co Serret, muchos serán los casos en que no se verifique dicha condición.

En efecto, dice él, si consideramos, por ejemplo, una ecuación de segundo grado en $\frac{dy}{dx}$, al resolverla se tendrá:

$$\frac{dy}{dx} = P + \sqrt{Q};$$

y como quiera que P y Q son funciones cualquiera en x é y, los valores de y, que anulen á Q, no verificarán, en general, á la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = P.$$

Esta observación tan importante, nos pone ya en camino del procedimiento, que desarrollaremos luego, para encontrar en todos los casos la ecuación diferencial á que puede hacer referencia la función en x é y, precitada como integral singular; de modo, que si la primera ecuación diferencial dada no le corresponde, quedará satisfecha siempre por la segunda que hallaremos.

Antes de pasar á la explicación de este método, bueno será aclarar los conceptos de Lagrange y Serret, por medio de ejemplos.

Tomemos de momento la misma ecuación diferencial que ya consideramos, como una aplicación de la fórmula de Clairaut

$$y = y'x + r\sqrt{1 + y'^2},$$

de donde

$$(b) \qquad (y - y'x)^2 = r^2(1 + y'^2),$$

ó sea

$$y' = -\frac{yx}{r^2 - x^2} \pm \frac{1}{r^2 - x^2}\sqrt{y^2x^2 - (r^2 - y^2)(r^2 - x^2)}.$$

Para que las raíces sean iguales, supondremos

$$y^2 x^2 - (r^2 - x^2)(r^2 - y^2) = o,$$

de donde

$$r^2 = x^2 + y^2. \qquad (\alpha)$$

Ecuación que será la integral singular, si satisface á la ecuación diferencial.

A fin de averiguarlo, tómese la derivada de (α)

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y},$$

valor que, sustituído en (b), da una identidad, lo cual significa que (α) es integral singular de la ecuación diferencial dada.

Esta particularidad tiene su explicación, según la observación importante de Serret.

Si consideramos la ecuación diferencial dada, escrita bajo la forma siguiente:

$$y'^2 (r^2 - x^2) + 2yxy' + r^2 - y^2 = o,$$

llamando

$$a = r^2 - x^2,\ b = 2yx,\ G = r^2 - y^2.$$

Al tomar el valor hallado de la raíz doble

$$y' = -\frac{yx}{r^2 - x^2},$$

para que satisfaga á la ecuación anterior, es preciso que G cumpla con cierta condición para que dicha ecuación se pueda expresar por

$$\left(y' + \frac{yx}{r^2 - x^2}\right)^2 = o.$$

Y según principios de las ecuaciones de segundo grado, debe resultar que

$$G = \frac{b^2}{4a}, \quad \text{ó sea} \quad \frac{4y^2x^2}{4(r^2 - x^2)} = r^2 - y^2.$$

Y efectivamente, en este caso se cumple la condición, puesto que atendiendo al valor α, resulta para el primer miembro la misma expresión del segundo.

Además, puede suceder que la función en x é y, aunque satisfaga á la ecuación diferencial, no sea una integral singular, sino una integral particular de la general.

Si la integral general es conocida, fácilmente se salva la dificultad.

Sea la ecuación diferencial de primer orden

$$f(x, y, y') = o \qquad (1)$$

y supongamos que por un procedimiento cualquiera hayamos hallado la función $\varphi(x, y) = o$ (2) que la satisface, siendo la integral general de (1):

$$F(x, y, G) = o. \qquad (3)$$

Si la relación (2) representa una integral particular, tendrá que identificarse con (3), por un valor particular atribuido á la constante.

Empero, cuando la integral general no es conocida, entonces, si la solución $\varphi(x, y) = o$ es una integral singular, deberá representar la envolvente de las diferentes líneas como involutas, correspondientes á las integrales particulares deducidas de la integral general.

De modo que en cada uno de los puntos de la envolvente la y', tanto por la integral particular que la corresponde, como por la envolvente, debe ser la misma, resultando, en general, entre las dos líneas un contacto de primer orden.

De aquí resulta que si se forman las derivadas consecutivas de (2), desde la segunda, en general, no deben corresponderse con las de (1), bastando esta sencilla consideración para averiguar si la función (2) es ó no una verdadera integral singular, á pesar de satisfacer á la ecuación diferencial.

Para mayor claridad de lo que precede, nos valdremos de un ejemplo:

Sea la ecuación

$$y^2 - 2ax + x^2 - 2cx + c^2 = o, \qquad (\alpha)$$

correspondiente á varios círculos que tienen los centros en diferentes puntos del eje x.

La ecuación diferencial correspondiente, se hallará, según lo expuesto, mediante el cálculo que á continuación se expresa:

$$2yy' - 2a + 2x - 2\text{G} = o,$$

$$\text{G} = yy' - a + x,$$

$$y^2 - 2ax + x^2 - 2(yy' - a + x)x + (yy' - a + x)^2 = o,$$

ó sea

$$y^2 y'^2 - 2ayy' + y^2 + a^2 - 2ax = o. \qquad (1)$$

Aplicando el método de Lagrange, se tiene

$$2y^2 y' - 2ay = o;$$

$$y' = \frac{a}{y}.$$

Al sustituir este valor en (1), inmediatamente resulta

$$y^2 - 2ax = o. \qquad (2)$$

Esta ecuación satisface á la ecuación diferencial.

Empero, aún cabe la duda si la función (2) es una integral singular ó particular.

Para salvar dicha dificultad debe procederse á la determinación de las segundas derivadas de (1) y (2), al objeto de averiguar si se corresponden ó no.

De (1), resulta:

$$2yy'^3 + 2y^2y'y'' - 2ay'^2 - 2ayy'' + 2yy' - 2a = o,$$

de donde

$$y''y(yy' - a) = -y'^2(yy' - a) - (yy' - a);$$

después de la reducción

$$y'' = -\frac{y'^2 + 1}{y} = -\frac{a^2 + y^2}{y^3}. \qquad (a)$$

De (2), sabiendo que $y' = \frac{a}{y}$, se deduce:

$$y'' = -\frac{ay'}{y^2} = -\frac{a^2}{y^3}. \qquad (b)$$

Siendo los resultados (a) y (b) diferentes, puede asegurarse que la solución (2) es una integral singular de (1), la cual representa geométricamente una parábola, que es la envolvente de los diferentes círculos que corresponden á la ecuación (α).

Notables, por fin, son los trabajos de Boole, acerca de las integrales singulares, haciéndolas dependientes de la derivada, pero sin que sean resultado de relaciones bien definidas entre la constante y una de las variables.

Los ejemplos que á continuación se indican, serán suficientes para dar una sucinta idea del pensamiento de ese gran matemático.

Sea encontrar la integral singular de la ecuación

$$xy' = y\,ly. \qquad (1)$$

Derivemos, según y;

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{1}{x}(1 + ly).$$

Esta expresión resulta infinita para $y = o$, satisfaciendo este valor de y á la ecuación (1).

Ahora bien, la integral general de (1) es:

$$y = e^{cx}, \text{ (*)} \qquad (2)$$

de la cual se puede obtener $y = o$ siendo $G = -\infty$, si x es positivo, y $c = \infty$, si x es negativo.

En ambos casos, se tienen integrales particulares, pero sin poderlas deducir de (2), por valores particulares de la constante completamente independientes de x; y como quiera que dichos resultados corresponden con la fórmula $\frac{dy'}{dy} = \infty$ perteneciente á las integrales singulares, en este concepto considera Boole dicha solución como singular.

Otro caso más especial aún presenta dicho autor, para cuando G, recibe un determinado número de valores independientes de x.

(*) Para deducir la integral de $xy' = y\,ly$, basta atender á los desarrollos siguientes:

$$\frac{\frac{y'}{y}}{ly} = \frac{1}{x}; \frac{\frac{y'dx}{y}}{ly} = \frac{dx}{x}, \; lly = lx + lG = lxG, \; ly = xG, \; y = e^{xG}$$

Sea la ecuación diferencial

$$y'^2 - xyy' + y^2 ly = o. \ (*)$$

Al resolverla, según y', se tiene

$$y' = \frac{xy \pm \sqrt{x^2 y^2 - 4 y^2 ly}}{2},$$

de donde

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4 ly}}{2} \mp \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4 ly}}.$$

Para que este resultado sea infinito, basta suponer

$$x^2 - 4 ly = o;$$

ó también $y = o$; ó sea

$$y = e^{\frac{1}{4} x^2}, \qquad \text{ó} \qquad y = o.$$

La primera igualdad da una integral singular, por cuanto no es posible deducirla de la integral general $y = e^{cx - c^2}$, sino por $G = \frac{1}{2} x$, que es variable. Pero lo notable de este ejemplo, conforme lo indica Rubini al tomarlo de Boole, es que el segundo caso se puede deducir de la integral gene-

---

(*) Para hallar la integral de $y'^2 - xyy' + y^2 ly = o$, atenderemos simplemente á los desarrollos siguientes:

$$\frac{y'^2}{y^2} - x \frac{y'}{y} + ly = o; \ \frac{y'}{y}\left(\frac{y'}{y} - x\right) + ly = o; \ ly = A + Bx$$

$$\frac{y'}{y} = B, \ B(B - x) + A + Bx = o, \ (B^2 + A) + (B - B)x = o,$$

$$B = G, \ -B^2 = A, \ -c^2 = A, \ ly = cx - c^2, \ y = e^{cx - c^2}$$

ral, siendo $G = \infty$, ó $G = -\infty$, cuya expresión es independiente completamente de todo valor y consideración sobre x, constituyendo en su virtud esta singularidad por dicho autor, dos soluciones ó integrales particulares coincidentes ó múltiples, las cuales guardan alguna relación con la integral singular correspondiente á $y = o$, como resultado de $\frac{dy'}{dy} = \infty$.

(Continuará.)

XLIX. — Dosificación volumétrica del ferrocianuro y del ferricianuro potásicos (*)

POR WERNER MECKLENBURG.

INTRODUCCIÓN

En el presente estudio se dará cuenta:

1) de un método, de resultados utilizables, para la valoración del ferricianuro de potasio, que

2) puede servir también para valorar indirectamente el ferrocianuro de potasio;

3) de un método preciso y exacto de dosificación directa del ferrocianuro potásico, y

4) de un método de análisis de una mezcla de ferrocianuro y ferricianuro potásicos, resultante de combinar los procedimientos 1) y 3).

Base común de todos estos métodos es el sistema de reacción reversible simbolizado por la ecuación iónica:

$$2\,Fe\,Cy_6'''' + 3I' \rightleftarrows 2\,Fe\,Cy_6''' + I_3'$$

cuya transformación, realizada cuantitativamente en el sentido de izquierda á derecha, puede servir para valorar el

(*) Esta Memoria se publica también en lengua alemana en la Zeitschr. f. anorg. chem., **67**, 322 (1910).—También han aparecido en alemán los trabajos de *Wilhelm Biltz y Werner Mecklenburg:* Sobre los diagramas de estado de los s stemas estaño azufre, estaño-selenio y estaño-telurio; esta Revista, t. VIII, p. 430 (Enero de 1910), y de *Werner Mecklenburg:* Sobre la isomería de los ácidos estánicos (primera nota); esta Revista, t. VIII, p. 338 (Diciembre de 1909). Véase Zeitschr. f. anorg. chem., **64**, 226; 1909 y **64**, 368; 1909 respectivamente.

ion ferriciánico, y realizada—por vía indirecta—cuantitativamente en el sentido opuesto, se puede aprovechar para dosificar el ion ferrociánico.

El equilibrio existente entre el ferro y el ferricianuro potásicos, el iodo y el ioduro potásico se ha investigado con frecuencia, hace ya muchos años por Carl Mohr (*), y recientemente por F. G. Donnan y R. Le Rossignol (**), y muy en especial por G. Just (***); pero no es posible entrar aquí en la discusión de los fenómenos de complicada apariencia que se realizan en el sistema en cuestión, y así me limito sólo á un recuerdo general.

1. Valoración del ferricianuro potásico.

El método de dosificar el ferricianuro potásico se basa en oxidar, por medio del ferricianuro, el ioduro potásico produciendo iodo elemental, y en valorar luego éste empleando el tiosulfato sódico. Para efectuar cuantitativamente la reacción en el sentido de izquierda á derecha de esta ecuación,

$$2\,Fe\,Cy_6''' + 3I' \longrightarrow 2\,Fe\,Cy_6'''' + I'_3$$

es necesario que uno de los productos de ella se separe del sistema en el momento mismo de originarse, y en realidad ya Carl Mohr (****) había entrado en tal camino—hoy bien fácil de entender gracias á haberse comprendido la impor-

---

(*) Carl Mohr., Lieb. Ann., **105**, 60 (1858); véase también el «Lehrbuch der chemisch-analytischen Titriermethode», de Friedrich Mohr, 7.ª edición, Braunschweig, 1896, pág. 345.

(**) F. G. Donnan y R. Le Rossignol, Journ. Chem. Soc. **83**, 703 (1903); véase también Zeitschr. physik. Chem., **48**, 113; 1904.

(***) G. Just., Zeitschr. physik. Chem., **63**, 513; 1908.

(****) Carl Mohr., Lieb. Ann., **105**, 60 (1858); véanse también los «Ausgewaehlte Methoden der analytischen Chemie», de A. Classen, Braunschweig, 1903, Bd., 2, S., 697.

tancia del equilibrio químico—, añadiendo á la disolución, fuertemente ácida, del ferricianuro y del ioduro potásico una sal de cinc, la cual forma con el ferrocianuro potásico otra sal prácticamente insoluble, y es el ferrocianuro cíncico-potásico de la composición (*) $K_2 Zn_3 (Fe\ Cy_6)_2$.

Logró de tal modo la transformación cuantitativa y regular de la reacción

$$2\,K_3\,Fe\,Cy_6 + 3\,KI = 2\,K_4\,Fe\,Cy_6 + KI_3$$

ó más sencillamente

$$K_3\,Fe\,Cy_6 + KI = K_4\,Fe\,Cy_6 + I$$

separándose una cantidad de iodo libre, exactamente equivalente al ferricianuro potásico existente. Hasta este punto el método de Mohr es en absoluto correcto; pero la continuación ya no se puede considerar inatacable, pues Mohr neutralizó el ácido libre con el bicarbonato sódico y valoró la disolución bicarbonato-alcalina del iodo acudiendo al tiosulfato. Tal modo de proceder, sabemos ahora que no es correcto. Ya Clemens Winkler (**), discutiendo la dosificación iodométrica del ácido sulfuroso, ha demostrado que valorando una disolución bicarbonato-alcalina de iodo con el tiosulfato, y á consecuencia de oxidación parcial del reactivo que pasa á sulfato, por regla general se encuentra un defecto de iodo, y semejante hecho lo han comprobado asimismo estudiando la volumetría del ácido sulfuroso, las investigaciones especiales de Otto Ruff y Willi Jeroch (***), y de mi parte, apoyán-

---

(*) L. L. de Koninck y E. Prost, Zeitschr. angew Chem., Jahrg., 1896, S., 460 y 564.

(**) Clemens Winkler. «Praktische Uebungen in der Ma Banalyse», 3 Aufl., Leipzig, 1902, S. 105.

(***) Otto Ruff y Willi Jeroch, Ber. D. Chem. Gesellsch, 38, 409; 1905.

dome en numerosos experimentos he llegado á comprobar también el mismo hecho. El valor del defecto de iodo depende en muchísima parte del modo especial de proceder, v. gr.: de la concentración iódica, de las del bicarbonato y del tiosulfato, de la rapidez con que se trabaja y de la velocidad de la agitación; puede ser considerable; yo mismo, para el valor teórico de 20 centímetros cúbicos de una disolución iódica decinormal, he encontrado hasta defectos de 5 centímetros cúbicos.

En tales circunstancias, había que investigar si el método de Mohr, modificado de modo idóneo, podría conducir á resultados utilizables, y efectivamente se ha demostrado cómo siguiendo ciertas prescripciones en realidad se llega á conseguirlos bastante satisfactorios.

Comenzaré exponiéndolas con todos sus pormenores.

La sal destinada al análisis se disuelve en 500 ó 750 centímetros cúbicos de agua, se añaden de 10 á 15 centímetros cúbicos de ácido clorhídrico concentrado ($D = 1.19$), de 10 á 15 gramos de cloruro potásico, 10 á 20 centímetros cúbicos de una disolución de ioduro potásico al 10 por 100, y por fin, 10 centímetros cúbicos de una disolución, casi normal, de sulfato de cinc, con lo cual la disolución se enturbia por precipitarse una mezcla de ferricianuro de cinc y ferrocianuro cincico potásico, que se transforma rápidamente en la sal doble ya citada, y coloreada por iodo libre; se deja por tres minutos en un matraz, cerrado con un tapón de vidrio esmerilado y ajustado al matraz sin la intervención de humedad; se añade un poco de disolución de almidón y se valora por medio de una disolución decinormal de tiosulfato sódico hasta gastar la casi totalidad del iodo; se dejan otros tres minutos, terminando luego la dosificación volumétrica. — Un centímetro cúbico de una disolución decinormal de ferricianuro potásico contiene 32,921 miligramos de $K_3 Fe Cy_6$, y por consecuencia, la cantidad existente de esta sal compleja se calcula multiplicando por

32,921 (*) el número de centímetros cúbicos gastados de la disolución decinormal del tiosulfato; la cifra obtenida da la cantidad $K_3\ Fe\ Cy_6$ en miligramos.

Este procedimiento exige las explicaciones siguientes:

a) La adición del exceso de ácido clorhídrico y la dilución considerable tiene por objeto reducir todo lo posible la inclusión, en el ferrocianuro potásico-cíncico, del ferricianuro cíncico, de color algo pardo y producido al comienzo en cantidad considerable, pues el ferricianuro cíncico así aprisionado no participa del todo en la reacción, y entonces el análisis conduce á resultados por defecto.

b) Se entiende al punto que del mismo modo que en todas las dosificaciones exactas del iodo, en las que se trata de cantidades algo considerables del halógeno libre, siguiendo las prescripciones de Julius Wagner (**), hay que trabajar en matraces cerrados con tapón de vidrio esmerilado, evitando con sumo cuidado el menor acceso de humedad en el espacio entre el tapón *y* el cuello del matraz, y con bastante exceso de ioduro potásico para disminuir lo suficiente la tensión de vapor del iodo y que no se ocasionen pérdidas de este elemento mientras la dosificación se efectúa.

c) Las dos interrupciones, de tres minutos cada una, las exige el no ser instantánea la reacción en el sistema heterogéneo de que se trata. Pasados los primeros tres minutos ha llegado casi á su término; pero si entonces se considera terminada la dosificación, no es raro observar un obscurecimiento secundario, motivo de inseguridad en las determinaciones. Siguiendo exactamente estas reglas, y á no tratarse de muy exiguas cantidades de ferrocianuro, la volumetría final se realiza conforme es debido, y aun al cabo de bastante tiempo no aparece el obscurecimiento secundario citado.

(*) Log 32,921 = 51747.

(**) Julius Wagner, Zeitschr, anorg Chem., 19, 432; 1899.

d) El precipitado blanco de ferrocianuro potásico-cíncico existente en el líquido de reacción, le da, por consecuencia de su distribución finísima, un matiz de muy débil tono verdoso-azulado, pero que no puede tener la apariencia del color obscuro del ioduro de almidón. El término de la reacción se reconoce exactamente con la luz blanca del día, ó con la artificial de cualesquiera lámparas incandescentes de filamento metálico.

e) Se encuentra bastante facilitada la reacción en presencia de cantidades suficientes de sales alcalinas, y yo he aprovechado, sobre todo, el cloruro potásico. Cuando son grandes las cantidades del ferricianuro ó pequeñas las concentraciones del ion hidrógeno, v. gr., trabajando en disolución acética, siempre se ha añadido aquél compuesto. La explicación del efecto favorable del cloruro potásico se puede fundar en la naturaleza coloídea del ferrocianuro cíncico-potásico. Ya de Koninck y Prost (*), en la investigación detenida de la precipitabilidad del ion cíncico por el ferrocianuro potásico y en disolución ácida, habían establecido que la sal precipitada, constituída por el ferrocianuro doble de cinc y potasio, existe en dos modificaciones, una gelatinosa, y granular la otra, una muy reactiva y la otra menos reactiva. Según la química de los coloides, estas dos modificaciones se deben considerar agregados de partecillas de diferentes tamaños, y por eso era de esperar que la transformación, bastante lenta en las condiciones ordinarias, es decir, en disolución clorhídrica, de la modificación fina en la gruesa, la aceleraría la presencia de grandes cantidades de una sal cualquiera. La legitimidad de tal supuesto se demuestra fácilmente estudiando la oxidación, en disolución clorhídrica, del ferrocianuro doble, por medio del permanganato po-

---

(*) L. L. de Koninck y E. Prost, Zei Aschr. angew Chem., año 1896 pág. 460 y 564.

tásico; en igualdad de condiciones, la sal doble granular, precipitada en presencia del cloruro potásico, es atacada por el oxidante con mucha menor facilidad que la modificación gelatinosa producida en ausencia del cloruro alcalino. Y lo mismo que la reaccionabilidad de una substancia coloídea, también su facultad de adsorber otros productos depende del tamaño de las partecillas; cuando menores son éstas, tanto mayor es aquélla.

Aplicando el método descrito se obtuvieron los resultados reunidos en el cuadro adjunto I.

CUADRO I.

Número.	$K_3 Fe Cy_6$ existente. — g.	$H Cl$ 1,19 — ccm.	Sal alcalina.	Volumen de la disolución. — ccm.	$\frac{n}{10} Na_2 S_2 O_3$ gastado. ccm.	$K_3 Fe Cy_6$ encontrado. g.	$K_3 Fe Cy_6$ encontrado. por 100.	ERROR mg.	ERROR por 100.
1	0.0112	10	—	cerca de 600	0 36	0.0119	105.81	+0.7	+5.81
2	0.6597	10	—	600	20.05	0.6601	100.05	+0.4	+0 05
3	0.6808	10	—	600	20.61	0.6785	99.66	—2 3	—0.34
4	0.6831	10	—	600	20.73	0.6825	99.90	—0 6	—0.10
5	0 6900	10	—	600	20.95	0.6897	99 95	—0 3	—0.05
6	0.7075	10	—	600	21.52	0 7085	100 13	+1 0	+0.13
7	0.7802	10	—	600	23.64	0 7783	99.75	—1 9	—0.25
8	0.7968	10	—	600	24.15	0.7950	99 78	—1 8	—0 22
9	1.6138	10	—	600	48.91	1.6101	99.75	—3.7	—0.25
10	0.9949	10	—	cerca de 800	30.22	0.9949	100.00	±0.0	±0.00
11	0 8057	15	—	800	24.51	0.8069	100.15	+1.2	+0.15
12	0.9916	15	—	800	30.12	0.9916	100.00	±0 0	±0.00
13	0 9967	15	—	800	30.27	0.9965	99.98	—0.2	—0.02
14	1 0015	15	—	800	30 45	1 0024	100.10	+0.9	+0.10
15	0.6676	10	5 g KCl	cerca de 600	20.26	0 6670	99.91	—0 6	—0.09
16	1.6203	10	10 g KCl	600	49.16	1.6184	99.88	—1.9	—0 12
17	0 6617	10	5 g NaCl	600	20.12	0.6624	100.10	+0 7	+0.10
18	0.6637	10	4 g $Na_2 SO_4$ 10 H_2O	600	20.18	0.6643	100.10	+0 6	+0.10
19	1 3178	10	10 g KCl	cerca de 800	40.00	1.3168	99.93	—1 0	—0.07
20	1 6105	10	»	800	48.92	1.6105	100.00	±0.0	±0.00
21	1.6141	10	»	800	49 01	1 6134	99.96	—0.7	—0.04

Sirvió de primera materia el «*Kaliumferricyanid zur Analyse*» puro, de la casa C. A. F. Kahlbaum, de Berlín; no estando absolutamente seca, la substancia, finamente pulverizada, se guardó durante algunas semanas y en la obscuridad, en un desecador lleno de cloruro cálcico.

Estudiando la columna de los errores absolutos y medidos por miligramos, se reconoce que—en los análisis de 1 á 9—prevalecen siempre los errores por defecto; sólo alguna vez se observan, principalmente en las cantidades pequeñas de ferricianuro, errores en más. La causa de tal fenómeno debe buscarse, conforme va dicho, en la tendencia de adsorción del ferrocianuro doble, y armonizan perfectamente con tal teoría los hechos experimentales, porque en primer lugar los errores por defecto llegan al máximo en el análisis núm. 9, es decir, con la cantidad máxima del ferricianuro que se trata de dosificar, y en segundo lugar, diluyendo la disolución que se investiga ó añadiendo mayor cantidad de sal alcalina, disminuyen ó aun desaparecen.

Coinciden también con esta teoría los resultados de los análisis efectuados con disolución acética y resumidos en el cuadro II.

CUADRO II (*).

Número.	$K_3 Fe Cy_6$ existente. — g.	Sal alcalina.	Volumen de la disolución. — ccm.	$\frac{1}{10}$ $n\ Na_2 S_2 O_4$ gastado. ccm.	$K_3 Fe Cy_6$ encontrado.		ERROR	
					g.	por 100.	mg.	por 100.
22	0.0105	—	cerca de 600	0.30	0.0099	94.06	— 0.6	— 5.94
23	0.6607	—	600	20.07	0.6607	100.00	± 0.0	± 0.00
24	0.6657	—	600	20.19	0.6647	99 85	— 1.0	— 0.15
25	0.7921	—	600	24.03	0.7911	99 87	— 1.0	— 0.13
26	1.6352	—	cerca de 800	49 60	1 6329	99 86	— 2.3	— 0.14
27	0.6670	5 g $Na_2 SO_4 . 10 H_2O$	cerca de 600	20.25	0.6667	99.95	— 0.3	— 0.05
28	0.7035	5 g KCl	600	21.34	0.7025	99.86	— 1.0	— 0.14
29	0 6676	10 g KCl	600	20 24	0 6663	99 81	— 1.3	— 0.19
30	1.1516	»	cerca de 800	34 93	1 1499	99 86	— 1.7	— 0.14
31	1 6388	»	800	49 66	1 6349	99 76	— 3.9	— 0.24
32	1.6395	»	800	49 72	1.6368	99 84	— 2.7	— 0.16

(*) Todas las disoluciones estaban aciduladas con 10 centímetros cúbicos de ácido clorhídrico concentrado ($D = 1.19$), y luego adicionadas de 40 centímetros cúbicos de una disolución de acetato sódico, obtenida disolviendo 250 gramos de la sal cristalizada $CH_3 CO_2 Na_2 . 3 H_2O$ en 500 centímetros cúbicos de agua, formando un volumen total de unos 675 centímetros cúbicos.

Han desaparecido absolutamente los errores en más, á pesar de que las disoluciones, por estar preparadas con acetato sódico y ácido clorhídrico, contienen cantidades considerables de sales alcalinas, y ni aun la diluición extremada y la adición de otra sal alcalina, pueden compensar los defectos. Sea como quiera, en cualquier caso los errores, también en los menos favorables, están dentro de los límites admisibles para tal género de dosificaciones, pues — salvo, naturalmente, los análisis 1 y 22, en los que las cantidades que se debían valorar eran extremadamente pequeñas — el error relativo una vez y nada más supera el 0,3 por 100, pues el absoluto sólo tiene un valor considerable cuando se trata de gran cantidad absoluta para dosificar. En fin, utilizable dentro de límites muy extensos respecto de las cantidades absolutas de ferricianuro potásico, el método descrito parece satisfacer cumplidamente las exigencias que no sean extremadas.

2. Dosificación indirecta del ferrocianuro potásico.

Se entiende bien pronto que el método descrito para la valoración del ferricianuro potásico se puede emplear también tratando de dosificar el ferrocianuro potásico, siempre que haya la posibilidad previa de transformar cuantitativamente el ferrocianuro en el ferricianuro respectivo y destruir luego por entero el exceso de oxidante, de modo que no pueda oxidar el ioduro potásico—y eso sin reducir, al mismo tiempo, ni la más mínima cantidad del ferricianuro.

Se puede resolver con facilidad este problema aplicando como oxidante el permanganato potásico y reduciéndolo, empleando el ácido oxálico ó todavía mejor por medio del ioduro potásico, y separando el iodo segregado en este último caso con auxilio del tiosulfato.

Cuando se emplea el ácido oxálico debe procederse como sigue:

Se disuelve la substancia-problema en 600 ú 800 centímetros cúbicos de agua, se añade de 10 á 15 centímetros cúbicos de ácido clorhídrico ($D = 1.19$) y, por medio de una bureta, bastante cantidad de disolución casi decinormal de permanganato potásico, cuyo título no interviene en los cálculos del problema, para que la disolución resulte de bien marcado tono rojo. Entonces se agregan unos 20 centímetros cúbicos de una disolución igualmente casi decinormal de ácido oxálico, cuyo título exacto también se puede ignorar, y se deja el líquido por 5 minutos, los cuales pasados, el exceso de permanganato ha desaparecido cuantitativamente y la disolución ha adquirido el color amarillo puro del ferricianuro disuelto. Por fin, se añaden el ioduro potásico y la disolución cíncica y se valora el ferricianuro formado por la oxidación, del modo ya indicado en la primera parte del presente estudio. La resolución del problema se deriva del hecho de ser equivalentes una molécula del ferrocianuro y una molécula del tiosulfato; es decir, un centímetro cúbico de la disolución tiosulfática decinormal corresponde á 0,0001 molécula-gramos del ferrocianuro, ó sea 36,831 miligramos $K_4\ Fe\ Cy_6$ ó 42,236 miligramos de $K_4\ Fe\ Cy_6 .\ 3\ H_2\ 0$. (*).

(*) Log. 36,831 = 56621; log. 42,236 = 63568.

CUADRO III (*).

Número.	$K_4 Fe Cy_6 3H_2O$ existente. — g.	Acido.	$\frac{n}{10} Na_2 S_2 O_3$ gastado. ccm.	$K_4 Fe Cy_6 3H_2O$ encontrado.		ERROR	
				g.	por 100.	mg.	por 100.
1	0.0139	10 ccm HCl 1,19	0.37	0 0156	112.43	+ 1.7	+ 12 43
2	0 0215	»	0.56	0.0237	110.01	+ 2.2	+ 10.01
3	0 1504	»	3.62	0.1529	101 66	+ 2.5	+ 1.66
4	0 3066	»	7.31	0.3087	100.70	+ 2.1	+ 0.70
5	0.3193	»	7.61	0.3214	100 66	+ 2.1	+ 0.66
6	0.6707	»	15.84	0.6690	99.75	— 1.7	— 0.25
7	0.7594	»	17 97	0 7590	99 95	— 0.4	— 0.05
8	1.1349	»	26.88	1.1353	100 03	+ 0.4	+ 0.03
9	1.3925	»	32.92	1.3904	99.85	— 2.1	— 0.15
10	1.6024	»	37.91	1 6011	99.92	— 1.3	— 0 08
11	2.1046	»	49.78	2.1025	99.90	— 2.1	— 0 10
12	0.0165	6 ccm $H_2 SO_4$ 1,84	0.40	0 0169	102 39	+ 0.4	+ 2.39
13	0.6365	»	15.03	0 6348	99.73	— 1.7	— 0.27
14	2.0814	»	49.33	2.0835	100.10	+ 2.1	+ 0.10
15	0.0199	10 ccm $H_2 SO_4$ 1,84	0 49	0 0207	104.00	+ 0.8	+ 4.00
16	0.6483	»	15.36	0 6487	100 07	+ 0.4	+ 0.07
17	2.0784	»	49.27	2 0810	100.12	+ 2.6	+ 0.12
18	2.0898	»	49.53	2 0920	100.10	+ 2.2	+ 0.10
19	0 8076	20 ccm $H_2 SO_4$ 1,84	19 15	0 8088	100.15	+ 1.2	+ 0.15

(*) El volumen de la disolución en todos los casos era de unos 600 centímetros cúbicos; en ningún caso se adicionaba sal alcalina.

El cuadro III, con los análisis de 1 á 11, resume los resultados obtenidos por este método. De materia del problema ha servido un ferrocianuro potásico purificado mediante repetidas cristalizaciones, y acerca de esta purificación se dirá lo necesario más adelante en otra parte de la presente Memoria. El ácido clorhídrico se puede reemplazar por 6 ó 10 centímetros cúbicos de ácido sulfúrico concentrado ($D = 1.84$); mayor cantidad de este ácido no afecta á la seguridad del método; pero siempre en el caso de emplear el ácido sulfúrico debe esperarse diez minutos para la reducción completa del permanganato potásico. Disminuir la cantidad indicada del ácido sulfúrico aumeuta el error; v. gr., con sólo 3 centímetros cúbicos de dicho ácido sulfúrico y esperando diez minutos se han obtenido:

en vez de 0,6373 g. de $K_4 Fe\ Cy_6\ 3H_2O$ 0,6402 g.
ó sea 100, 40 por 100.

y con 10 centímetros cúbicos y esperando cinco minutos;

en vez de 0,6344 g. de $K_4 Fe\ Cy_6 . 3H_2O$ 0,6378 g.
ó sea 100,53 por 100,

probablemente á causa de no haberse reducido por completo el permanganato potásico de los dos problemas. —Los análisis parecen satisfactorios.

Más fácil que empleando el ácido oxálico es la reducción del permanganato acudiendo al ioduro potásico en disolución acética, neutralizando el iodo desalojado por el tiosulfato y valorando el ferricianuro formado por el método descrito.

Dejando los pormenores de este sistema de reducción para la tercera parte del presente trabajo, se presentan como prueba los análisis del cuadro IV adjunto:

CUADRO IV (*).

Número.	$K_4 Fe Cy_6 3H_2O$ existente. — g.	HCl 1,19 — g.	Sal alcalina.	$\frac{n}{10} Na_2 S_2 O_3$ gastado. ccm.	$K_4 Fe Cy_6 3H_2O$ encontrado.		ERROR	
					g.	por 100.	mg.	por 100.
1	1.9737	15	15 g KCl	46.63	1.9695	99 79	— 4.2	— 0.21
2	0.0325	25	—	0.73	0 0308	94 87	— 1.7	— 5.13
3	0.4291	25	—	10.11	0 4270	99.51	— 2.1	— 0.49
4	0.7974	25	—	18.85	0 7961	99.84	— 1.3	— 0.16
5	1.1741	25	—	27.78	1.1733	99.93	— 0.8	— 0.07
6	1 5893	25	—	37 59	1.5876	99.90	— 1,7	— 0.10
7	1.9340	25	—	45 76	1.9327	99.93	— 1.3	— 0.07
8	1 9677	25	—	46 54	1.9657	99.90	— 2.0	— 0.10
9	1.9534	30	—	46.16	1.9496	99.81	— 3.8	— 0.19

(*) Todas las disoluciones tenían el volumen de unos 800 centímetros cúbicos y se les adicionaban 60 centímetros cúbicos de la disolución de acetato sódico, citada en la nota del cuadro II y también varias veces en el texto, y equivalentes á 15 centímetros cúbicos del ácido clorhídrico concentrado. Antes de aplicadas para la dosificación indirecta del ferrocianuro potásico habían servido para valorar la misma sal por el método directo y descrito en la parte tercera de esta comunicación, y figuran por esta causa también en el cuadro V con los números de 20* á 28*.

3. Dosificación directa del ferrocianuro potásico.

El primer método de dosificación volumétrica del ferrocianuro potásico se debe á E. de Haën (*). Este investigador, después de acidulada la disolución acuosa del problema con ácido sulfúrico, añade, valiéndose de una bureta, cantidad suficiente de una disolución decinormal de permanganato potásico para que el tono amarillo puro del ferricianuro formado adquiera matiz rojizo, debido al exceso del oxidante. Pero este cambio de color carece de precisión, y por eso hace ya tiempo W. F. Gintl (**), y recientemente H. Bollenbach (***), han tratado de hacerlo más preciso, añadiendo una cantidad mínima de sal férrica que con el exceso de ferrocianuro produce la modificación (coloídea) soluble del azul de Prusia; de tal modo en el procedimiento de Gintl el tránsito del amarillo al amarillo rojizo se transforma en el paso del azul verdoso al amarrillo rojizo, y el paso inverso del amarillo rojizo al azul verdoso en el método de Bollenbach, quien oxida el ferrocianuro con exceso de permanganato, y mide este exceso empleando una disolución $\frac{1}{20}$ normal de ferrocianuro.

También en el sistema que ahora propongo el ferrocianuro es oxidado con un exceso de permanganato; pero su medida se practica apelando al método iodométrico de Volhard. Sirve de fundamento al nuevo procedimiento el encontrar las condiciones en las que se realizan fácil y completamente la oxidación del ferrocianuro y la subsiguiente reducción del permanganato á expensas del ioduro potásico, sín que la más mínima parte del ferricianuro existente

---

(*) E. de Haën Lieb., Ánn., **90**, 160; 1854.
(**) W. F. Gintl, Zeitschic. Anal. Chem., **6**, 446; 1867.
(***) H. Bollenbach, Zeitschir. Anal. Chem., **47**, 687; 1908.

en la disolución oxidada pueda reaccionar con el ioduro añadido. Al contrario del método descrito en la primera parte de este trabajo, en el que el buen éxito del análisis se funda en la reducción cuantitativa del ferricianuro por el ioduro potásico, en el ahora estudiado trátase de imposibilitar en absoluto la reducción de la sal compleja.

Conforme queda establecido por las investigaciones arriba citadas del sistema:

$$K_3 Fe\,Cy_6, \quad K_4 Fe\,Cy_6, \quad KI \text{ y } I$$

y según se puede comprender por la aplicación de la ley de las masas en el equilibrio existente en el sistema:

$$2\,Fe\,Cy_6''' + 3I' \rightleftarrows 2\,Fe\,Cy_6'''' + I_3$$

$$\text{ó sea: } \frac{[Fe\,Cy''']^2\,[I']^3}{[Fe\,Cy'''']^2\,[I'_3]} = \text{constante}$$

en disolución neutra, se podrá llegar al fin apetecido con auxilio de diluición extremada; pero en el caso actual, se debía trabajar en disolución ácida á causa de que no se efectúan conforme es debido la oxidación del ferrocianuro y la reducción del permanganato en disolución neutra. Mas en la ácida la oxidación del ioduro potásico por el ferricianuro es mucho más fácil, y así había que establecer manera de conseguir una concentración del ion hidrogénico tal que permitiese conseguir en el análisis cómoda y seguramente la posibilidad de las reacciones necesarias de oxidación y de reducción, é impidiese al propio tiempo y en absoluto los efectos oxidantes del ferricianuro. La experiencia ha demostrado que se llega á este fin trabajando en disolución acética y bastante diluída.

He aquí ahora los pormenores del método:

El ferrocianuro potásico se disuelve en 600 ú 800 centímetros cúbicos de agua; se añaden de 10 á 15 centímetros

cúbicos de ácido clorhídrico ($D = 1.19$), y de 40 á 60 centímetros cúbicos de una disolución de acetato sódico, preparada disolviendo 250 gramos de esta sal cristalizada

$$CH_3\ CO_2\ Na\ .\ 3H_2O$$

en 500 centímetros cúbicos de agua, formando el volumen de unos 675 centímetros cúbicos. Entonces, empleando una bureta y agitando bien, se echa en el líquido la precisa cantidad de una disolución decinormal de permanganato potásico — titulado por medio del oxalato sódico Sœnensen — para que siendo transparente, adquiera fuerte color rojo; se añaden en seguida 10 centímetros cúbicos de una disolución al 10 por 100 de ioduro potásico, se dejan pasar tres minutos y se valora el iodo segregado, después de adicionada de almidón la disolución, con una disolución decinormal de tiosulfato sódico — titulada, según Volhard, por la disolución decinormal del permanganato. — Sustrayendo del número de centímetros cúbicos empleados de la disolución permangánica el correspondiente á la disolución tiosulfática, se obtiene el número de centímetros cúbicos de la disolución del permanganato gastados para la oxidación del ferrocianuro potásico, y multiplicándolo por el número 42,236 (log 42,236 = 62568), se sabe la cantidad existente, en miligramos, de ferrocianuro potásico cristalizado $Fe\ Cy_6\ K_4\ 3H_2\ O$.

El procedimiento exige las explicaciones siguientes:

a) No debe emplearse el ácido acético cristalizable del comercio (*), pues suele contener cantidades considerables de substancias empireumáticas, oxidables también por el permanganato, de modo que siendo en tal caso excesivo el gasto de permanganato, resultaría también un exceso de ferrocianuro. — Pero tampoco — y es hecho para anotarse —

(*) «Essigsäure (Eisessig) 1,064, acid. acet. puriss. glac. 1,064 pro Analysi», de la casa E. Merck, de Darmstadt.

debe confiarse gran cosa en la pureza del acetato sódico. A decir verdad, una muestra de esta sal, de antiguo preparada, *natnium aceticum puriss cryst,* de la casa E. Merck, se demostró que estaba exenta de impurezas oxidables por el permanganato; sin embargo, 60 centímetros cúbicos de la disolución antedicha, obtenida con otra muestra de venta reciente, del mismo nombre y de la misma casa, han gastado 0,20 centímetros cúbicos de la disolución decinormal de permanganato; tenía también esta muestra, reciente olor desagradable.

b) El permanganato, mezclado con la disolución ferrociánica, se decolora al momento, y al mismo tiempo el líquido adquiere color amarillo intenso. Mayores cantidades de ferrocianuro producen un precipitado más ó menos obscuro, el cual desaparece añadiendo nuevo permanganato. Reconócese muy bien un exceso de éste; lo caracteriza el color rojo, más ó menos intenso de la disolución, que es de absoluta transparencia; cuando el precipitado no se disuelve hay defecto de permanganato.

c) En disolución acética, la reducción del permanganato por el ioduro potásico no es instantánea, pero de seguro es completa al cabo de tres minutos.

d) Para la preparación de las disoluciones de almidón, unas veces se ha empleado el ordinario del comercio y otras el llamado «soluble en forma de pasta» *(loesliche Staerke in Teigform)*, comprado en la casa de C. A. F. Kahlbaum. El tan empleado almidón de ioduro cíncico *Jodzinkstærke*, naturalmente, á causa del cinc que contiene, que lo hace inaplicable, no sirve en el método actual. El cambio de color del gris obscuro ó verde aceituna al amarillo puro de yema de huevo, se reconoce muy bien si la cantidad de almidón empleado no es muy exigua.

Los análisis que demuestran la eficacia del procedimiento descrito están resumidos en el cuadro adjunto V.

CUADRO V (*).

Número	$K_4 Fe Cy_6 . 3 H_2 O$ existente. — g.	Volumen de la disolución. — ccm	$\frac{n}{10} K Mn O_4$ añadido. ccm.	$\frac{n}{10} Na_2 S_2 O_3$ gastado. ccm.	$\frac{n}{10} K Mn O_4$ gastado. ccm.	$K_4 Fe Cy_6 . 3 H_2 O$, encontrado.		ERROR.	
						g.	por 100.	mg.	por 100.
1	0.0186	cerca de 600	2.64	2.21	0.43	0.0182	97 64	— 0.4	— 2.36
2	0.1520	600	5.22	1.62	3.60	0.1521	100.03	+ 0.1	+ 0.03
3	0 2120	600	6.86	1 85	5.01	0 2116	99.81	— 0.4	— 0.19
4	0 3615	600	10.88	2.30	8.58	0.3624	100.24	+ 0.9	+ 0.24
5	0.4232	600	11.24	1.23	10 01	0 4228	99.90	— 0.4	— 0.10
6	0.6327	600	17.81	2.86	14.95	0.6314	99.80	— 1.3	— 0.20
7	0.8489	600	22.51	2.43	20 08	0 8481	99.90	— 0.8	— 0.10
8	0.8861	600	22.49	1.53	20 96	0.8853	99 91	— 0.8	— 0.09
9	0.0077	cerca de 800	3 70	3.51	0.19	0.0080	104.22	+ 0.3	+ 4.22
10	0 0237	800	1 89	1.35	0.54	0.0228	96.23	— 0.9	— 3.77
11	0.0342	800	1.90	1.05	0.85	0 0359	104.97	+ 1.7	+ 4.97
12	0.3392	800	13 58	5.57	8.01	0 3383	99.74	— 0.9	— 0.26
13	0.6754	800	19.06	3.10	15.96	0 6741	99 81	— 1.3	— 0.19
14	1.0652	800	28.06	2.86	25.20	1.0643	99.92	— 0.9	— 0.08
15	1.2797	800	31.96	1.68	30.28	1.2789	99 94	— 0.8	— 0.06
16	1.3547	800	34.88	2.86	32 02	1.3524	99 83	— 2.3	— 0.17
17	1 6850	800	42 91	3.05	39.86	1.6835	99 91	— 1.5	— 0.09
18	1.9099	800	47 63	2.41	45.22	1.9099	100.00	± 0.0	± 0.00
19	1 9711	800	49 47	2 80	46.67	1.9711	100.00	± 0.0	± 0.00
20*	1.9737	800	49.45	2 72	46.73	1.9737	100 00	± 0.0	± 0.00
21*	0.0325	800	5 38	4 59	0.79	0 0334	102 67	+ 0.9	+ 2.67
22*	0 4291	800	13.78	3.64	10.14	0.4283	99 81	— 0.8	— 0.19
23*	0.7974	800	21.05	2.15	18.90	0.7983	100.11	+ 0.9	+ 0.11
24*	1 1741	800	31.49	3.71	27.78	1 1733	99.93	— 0.8	— 0.07
25*	1.5893	800	40 82	3.21	37 61	1.5885	99 95	— 0.8	— 0.05
26*	1.9340	800	49 18	3.41	45 77	1 9331	99.95	— 0.9	— 0.05
27*	1.9677	800	49 24	2 64	46.60	1.9682	100.03	+ 0.5	+ 0.03
28*	1 9534	800	49.37	3.08	46.29	1.9551	100.09	+ 1.7	+ 0.09

(*) Los análisis marcados por un asterisco * corresponden á los del cuadro IV.

Fué materia primera un preparado exento de sulfato y purificado ó disolviéndolo en agua tres veces y precipitándolo con alcohol etílico ó por reiteradas cristalizaciones en el agua y desecado entre hojas de papel de filtro y en contacto del aire. Correspondía á la fórmula $K_4 Fe Cy_6 . 3 H_2O$ (*). La nota que existe en la literatura química (**), según la cual precipitando la disolución acuosa y concentrada de la sal en cuestión, resulta anhidra, no parece de acuerdo con los experimentos; también debe decirse que según las investigaciones de K. Schrœder, la sal anhidra es bastante higroscópica.

Los análisis comprenden desde unos 8 mg. hasta casi 2 gramos. Los errores, casi siempre tienen valores negativos, pues exige la valoración un exceso mínimo de tiosulfato, pero no existe la menor regularidad. Cuanto á la exactitud, basta decir que un error de 0,10 c. c. corresponde á un valor absoluto de 4,2 mg. de $K_4 Fe Cy_6 . 3 H_2O$ y por consecuencia el error máximo extraordinario del análisis núm. 16 corresponde á 0,06 c. c. En el promedio es de 0,7 mg., ó sea menos de 0,02 c. c.

Este método, que á causa del valor elevado de su equivalente y de la fácil purificación de la sal, se presta á la valoración inicial de disoluciones volumétricas de permanganato potásico ó de tiosulfato sódico, parece tener cierta superioridad sobre los métodos propuestos por Gintl y Bollenbach. Con el del primero no me ha sido posible obtener un cambio de color realmente franco; y en cuanto al método de Bollenbach, que no conozco por experiencia propia, según los análisis que el propio autor publicó, da resultados menos exactos y menos constantes que el mío (***), pero parece muy probable que en ciertos casos preste buenos servicios.

Son ineficaces cuantos métodos se fundan en la aplicacación de una disolución volumétrica de permanganato si al

---

(*) K. Schrœder, Chem.—Zeit., 23, 533, 540 y 557; 1899.

(**) E. Rupp y A. Schiedt, Ber. D. Chem. Gesellsch, 35, 2.432 1902.

(***) En el cuadro analítico publicado por Bollenbach (Zeitschr.

lado del ferrocianuro existen en la disolución otras substancias oxidables por aquel cuerpo, v. gr., compuestos rodánicos. En tal caso debe aplicarse el método indirecto descrito en la segunda parte de esta Memoria.

4. Dosificación de los componentes de una mezcla de ferrocianuro y ferricianuro potásicos.

Continuando los métodos descritos en las partes primera y tercera, se presenta un método de dosificar, en una mezcla de ferrocianuro y ferricianuro potásicos, los dos componentes, á cuyo fin se ha procedido del modo siguiente: La disolución de los dos cianuros complejos en 700 á 800 centímetros cúbicos de agua, fué adicionada de 15 centímetros cúbicos de ácido clorhídrico concentrado ($D = 1{,}19$), y de la cantidad aproximadamente equivalente de 60 centímetros cúbicos de la disolución del acetato sódico ya indicado, y se dosificó por vía directa — medida del exceso de permanganato por el tiosulfato — el ferrocianuro; se añadieron 10 centímetros cúbicos de ácido clorhídrico y otros 10 centímetros cúbicos de la disolución de ioduro potásico, y, en fin, 10 centímetros cúbicos de la disolución molar cíncica y se averigua la totalidad del ferricianuro ahora existente en la disolución por el método descrito en la parte primera de este estudio. La cantidad de ferricianuro existente en la mezcla inicial se calcula restando la totalidad del tiosulfato y el permanganato, y multiplicando el número obtenido por el coeficiente del ferricianuro. Los análisis demostrativos se contienen en el cuadro VI.

---

anal. Chem, 47, 690; 1908), se deslizaron algunos errores de cálculo. En las líneas siguientes pongo los valores corregidos:

Existente....	0.4228	0.5285	0.2114	0.1057	0.7399	0.7399	0.6342	1.0570	0.0423	0.8456 g.
Encontrado..	0.4240	0.5313	0.2115	0.1063	0.7443	0.7397	0.6345	1.0580	0.0418	0.8475 g
	100.29	100.53	100.04	100.53	100.60	99.98	100.04	100.10	98.78	100.23 por 100.
Errores.....	+1.2	+2.8	+0.1	+0.6	+4.4	−0.2	+0.3	+1.0	−0.5	+1.9 mg.
	+0.29	+0.53	+0.04	+0.53	+0.60	−0.02	+0.04	+0.10	−1.22	+0.23 por 100.

CUADRO VI.

Número.	Substancia.	EXISTENTE		GASTADO		ENCONTRADO		ERROR	
		g.	por 100.	$\frac{n}{10}$ $KMnO_4$ ccm.	$\frac{n}{10}$ $Na_2S_2O_3$ ccm.	g.	por 100.	mg.	por 100.
1	$K_4FeCy_6.3H_3O$	1 6744	99 55	39.62	—	1.6733	99 49	— 1.1	— 0.06
	K_3FeCy_6	0 0076	0.45	—	0 28	0 0092	0 55	+ 1.6	+ 0.10
2	$K_4FeCy_6.3H_2O$	1.6633	98.98	39 37	—	1.6628	98.96	— 0.5	— 0.02
	K_3FeCy_6	0 0171	1 02	—	0.45	0 0148	0 88	— 2.3	— 0.14
3	$K_4FeCy_6.3H_2O$	1.3455	83 49	31.85	—	1 3452	83 47	— 0.3	— 0.02
	K_3FeCy_6	0 2660	16 51	—	8 00	0 2634	16.34	— 2.6	— 0.17
4	$K_4FeCy_6.3H_3O$	1 0191	66.10	24 11	—	1.0183	66.05	— 0.8	— 0.05
	K_3FeCy_6	0 5226	33 90	—	15 78	0 5195	33.70	— 3.1	— 0.20
5	$K_4FeCy_6.3H_3O$	0.5716	41.78	13 52	—	0.5710	41.74	— 0.6	— 0.04
	K_3FeCy_6	0.7964	58 22	—	24.14	0 7947	58 05	— 1.7	— 0.13
6	$K_4FeCy_6.3H_3O$	0 3364	24.20	7 91	—	0.3341	24 03	— 2.3	— 0.17
	K_3FeCy_6	1 0537	75 80	—	31 92	1.0508	75 60	— 2.9	— 0.20
7	$K_4FeCy_6.3H_3O$	0.0084	0 63	0.18	—	0 0076	0 57	— 0.8	— 0.06
	K_3FeCy_6	1.3139	99.37	—	39.85	1.3119	92 21	— 2.0	— 0.16

RESUMEN

En las condiciones de las circunstancias apuntadas se pueden valorar, con bastante facilidad y exactitud, el ferricianuro y el ferrocianuro potásicos — este último después de oxidado y transformado en ferricianuro mediante un exceso de permanganato, el cual es á su vez eliminado antes de la valoración —, reduciéndolos por el ioduro potásico en presencia de una sal cíncica y dosificando el iodo desalojado por medio del tiosulfato. Otro método exacto de dosificación volumétrica del ferrocianuro potásico consiste en oxidar la sal con un exceso de permanganato, que es medido exactamente por vía iodométrica, y cuyo gasto sirve también de medida para el ferrocianuro existente. Combinando los dos métodos, se pueden determinar los dos componentes de una mezcla de ferrocianuro y ferricianuro potásicos.

Clausthal j. H., Chemisches Laboratorium der Kœnigl. Bergakademie.

L. — Nuevo método de extracción del azufre de los minerales que lo contienen en estado nativo.

Por Antonio de Gregorio Rocasolano.

Hace algún tiempo constituyó el objeto de mis estudios la extracción del azufre de los minerales que lo contienen en estado nativo, y fué de ello motivo el tener que proponer un procedimiento adecuado como base de explotación de ciertos yacimientos de aquel cuerpo. Naturalmente, se imponía el realizar diversos experimentos tocante á algunos de los métodos actuales practicados en diversas explotaciones azufreras; y en la presente Memoria me propongo dar á conocer, como consecuencia de las investigaciones practicadas, la crítica de los métodos corrientes, exponiendo después un nuevo procedimiento de extracción de azufre, ya planteado industrialmente, como término del trabajo.

No describiré uno por uno los métodos estudiados ya relatados, con más ó menos profusión de detalles, en las obras especiales de la materia, y sólo conseguiría aumentar inútilmente la extensión de la presente Memoria, cuyo objeto se concreta á reseñar con toda sinceridad y con la mayor concisión posible el resultado de mis investigaciones personales, á fin de que las conclusiones que se han deducido queden formuladas de manera clara y precisa.

El fundamento de los diferentes métodos ideados para extraer el azufre de los minerales que en estado libre lo contienen, es exclusivamente físico; en casi todos los casos, el calor es el agente que actúa separando por fusión ó volatilización el azufre de la ganga que lo acompaña; contadas veces se propone su separación mediante disoluciones, eli-

minando luego el disolvente, en condiciones de nuevos aprovechamientos.

Método del calcaroni.—Separa el azufre por fusión, utilizando como combustible el mismo cuerpo.

Es el más viejo, el de resultados más inciertos, quizá el de menor rendimiento, y es, sin embargo, el que más se practica. De muy antiguo comenzó á usarse en Sicilia con escasa producción, hasta que la casualidad de un incendio fué ocasión para conocer una mejora aplicada desde 1851, con aumento en los rendimientos.

El constante desprendimiento de gas sulfuroso mientras el *calcaroni* se encuentra en actividad, y los perjuicios que supone para la vegetación la abundancia de este gas en la atmósfera, hace que la práctica del sistema esté prohibida en ciertas épocas del año, originando interrupciones en la explotación, perjudiciales á los resultados económicos.

Por otra parte, es el azufre el combustible empleado como manantial de calor para la fusión, y aun cuando sea á pie de mina en muchos casos el combustible más económico, resulta siempre caro, comparándolo con el precio de venta en el mercado.

La marcha de un *calcaroni* es sobremanera incierta, y aun dirigido por obreros prácticos se obtienen muy diversos rendimientos, porque no es posible regular la combustión de tal modo que la temperatura sea en todos puntos de la masa la estrictamente necesaria para la fusión, y allí donde es más elevada, el azufre fundido adquiere consistencia viscosa que dificulta mucho su separación de la ganga; esta dificultad reconoce por causa las peculiares acciones del calor sobre el azufre.

Calculando teóricamente la cantidad de azufre que debe quemarse para su extracción por este procedimiento, los números encontrados oscilan entre 14 y 39,5 por 100 de la riqueza total, y depende de la importancia de la acción química del propio azufre sobre la ganga del mineral. Con los

antiguos *calcarelle*, el rendimiento era sólo de 5 ó 6 por 100 empleando minerales del 35 por 100 de riqueza; desde 1851 se obtienen, conforme queda indicado, mejores resultados, llegándose á perder solamente el 35 ó el 40 por 100 del total cuando la operación ha sido perfectamente dirigida y la ganga es muy poco atacada por el azufre. En la práctica se obtienen rendimientos menores, porque es muy frecuente que el *calcaroni* se queme de manera defectuosa.

A pesar de sus graves inconvenientes, este método de extracción de azufre se utiliza mucho cuando el precio del combustible á pie de mina resulta elevado. Según una estadística minera oficial, en Italia se obtuvo durante el año á que se refiere el 82 por 100 de la producción total de azufre por medio del *calcaroni*, resultando un rendimiento de 13,85 por 100. Bien podemos suponer que el mineral tendría una riqueza del 25 al 30 por 100.

Conviene advertir que los rendimientos citados se refieren á cuando se trabaja con minerales de ley media de 22 á 30 por 100. Si el mineral es pobre, las pérdidas referidas á la cantidad total de azufre son todavía mayores, de tal modo que si la riqueza del mineral no pasa del 15 por 100, el método resulta inaplicable.

Procedimiento de Gill.—Con intento de aumentar los rendimientos del *calcaroni* utilizando mejor el calor, se ideó el llamado *calcaroni continuo*, compuesto de 4 ó 5 calcaroni dispuestos en otras tantas cámaras, entre las que se establece una circulación metódica de los gases calientes desprendidos de uno de los *calcaroni* en actividad y destinados á calentar metódicamente los otros *calcaroni* antes de quemarse, hasta que por una chimenea salen al exterior.

Con semejante modificación del método clásico, se economiza azufre, pero no se evitan las dificultades prácticas, porque la regulación de la temperatura es todavía más difícil dirigirla que en el *calcaroni* al aire libre, los rendimientos aumentan poquísimo, y la cantidad de gas sulfuroso di-

fundida en la atmósfera no permite la extracción continua.

Método napolitano.—Para las tierras azufrosas de Pozzuolí, comenzó á emplearse, en época muy remota, este procedimiento, operando en vasijas de tierra llamadas *doppioni,* dispuestas en un horno de galería. A causa de la abundancia de combustible en las proximidades de aquellos yacimientos de azufre, se implantó esta explotación, y actualmente está casi abandonada por el aumento de precio del combustible.

Desde luego presenta, desde el punto de vista económico, el inconveniente de gastar la cantidad de calor necesaria para la sublimación del producto, obteniéndolo, no obstante, de la calidad de azufre bruto ó de fusión. Si se parte del mineral, las pérdidas son del 18 — 20 por 100, porque una porción del azufre se quema en el aire que llena las vasijas de condensación y recipientes de enfriamiento al comenzar cada operación; además, si el mineral es ferruginoso, se desprende hidrógeno que forma con el azufre gas sulfhídrico y las materias bituminosas que siempre acompañan al mineral se descomponen, produciendo sulfuro de carbono y ácido sulfhídrico, siendo totalmente perdido el azufre que forma parte de estos compuestos. Por otra parte, no es económico agotar por completo las escorias, porque en la última fase de la operación, cuando su riqueza es de 2 — 4 por 100, se desprende el azufre con mucha dificultad, y vale más el combustible empleado que el azufre obtenido.

Este método se ha utilizado muchas veces para una primera purificación del azufre del *calcaroni*, cuando el mineral era bituminoso; y, por consecuencia, el azufre resultaba tan negro, que no tenía fácil venta en las refinerías. Este azufre, que contiene hasta el 3 por 100 de materia bituminosa, se purificaba parcialmente, destruyéndola en los *doppioni.* La pérdida es de 6 á 9 por 100, y, sumada á la de la fusión, resulta la proporción demasiado elevada. No hay que olvidar, tocante al estudio económico del método, que el azufre ha sido fundido dos veces para llegar á sublimarse.

Sin embargo, tratándose de yacimientos de mineral azufroso, pobre de materias orgánicas, se puede utilizar una modificación del procedimiento, consistente en substituir los *doppioni* de tierra ó de hierro por calderas cilíndricas de hierro, y el recipiente de condensación por una cámara análoga á las de refino. De la parte superior de la pared de las calderas arrancan unos tubos que establecen su comunicación con la cámara, donde se recoge el azufre de calidad análoga á la del refinado. Estas calderas tienen, en la parte superior, la boca de carga, y en la inferior otra de descarga, que se enlodan durante la operación, para que el cierre resulte perfecto.

Respecto de la práctica de este método, en unos yacimientos de azufre conocemos los datos siguientes, facilitados por un capataz de la explotación: Operaban con calderas de hierro cilíndricas, de 1,20 de altura y 0,60 de diámetro; cada caldera se cargaba con 350 kilogramos de mineral, del que obtenían de 35 á 40 kilogramos de azufre, si la ley del mineral era del 25 al 28 por 100; es decir, que perdían el 59 por 100 del azufre total, 41 por 100 del rendimiento.

La pérdida resulta considerable; pero el método es mejor que los hasta ahora citados, porque resulta azufre de primera calidad, sin pasar por la forma azufre de fusión, y para llegar á tal calidad en los otros sistemas, hay que añadir á sus pérdidas las correspondientes al refinado.

Esta modificación del procedimiento napolitano podrá convenir para explotar minerales de azufre que lo consientan, con preferencia á otros métodos, siempre que se estudien en cada caso los medios para lograr mayor rendimiento, y se construyan hornos que consientan un buen aprovechamiento del combustible.

Procedimiento de Thomas.—Su característica consiste en utilizar como vehículo del calor necesario para la fusión del azufre y su separación de la ganga, el vapor de agua á la presión de 4-5 atmósferas, ó sea á la temperatura de 145-152°.

Se dió á conocer el año 1868.

En conjunto es procedimiento muy racional: la grave dificultad que para regular la temperatura presentan todos los otros métodos en que el calor actúa directamente, no existe aquí, porque es fácil regular las tensiones del vapor de agua en el recipiente que contenga el mineral, y, por lo tanto, la temperatura; su aspecto económico es bueno, si es exacto, conforme muchos autores aseguran, que el mineral llega á quedar, después del tratamiento, con sólo el 2 por 100 de riqueza, lo cual significa una pérdida de 8 por 100 del azufre total, aproximadamente. El gasto de combustible, calculado por el número de kilogramos de vapor de agua necesarios para elevar la temperatura del mineral de 15 á 150°, y el consumo de calor que representa el de fusión del azufre obtenido, resulta muy satisfactorio, si la operación se puede realizar en tres horas, límite de tiempo que establecen algunos autores. De otra parte, las estadísticas mineras demuestran que el procedimiento se practica en varias explotaciones.

Las razones indicadas me decidieron á estudiar sus pormenores practicando variados experimentos y no de laboratorio, sino industriales, operando con masas de mineral análogas á las que en explotaciones industriales se emplean. El aparato construído para semejante objeto consistía en un autoclave cilíndrico de chapa de acero y fondo de hierro colado, dentro del cual se colocaba una cestilla de hierro de paredes y fondo taladrados, que se llenaba con 400 kilogramos de mineral de 24-26 por 100 de riqueza.

Omitiendo el relato minucioso de todos los ensayos, únicamente consignaré, en forma de conclusiones, los resultados.

1.° El mineral debe estar cortado en trozos grandes (de 100 á 300 c. c. es el tamaño más conveniente), porque los pequeños fragmentos se aglomeran con el azufre fundido, impidiendo su circulación, y por lo tanto la separación de la ganga.

De aquí resulta un grave inconveniente, porque en el la-

boreo de la mina y preparación del mineral se obtiene una buena parte de menudos fragmentos y de polvo no beneficiables por este método. Es necesario, en tal aspecto, para que el método Thomas pueda aplicarse, simultanearlo con otro procedimiento que permita utilizar las porciones de mineral que con semejante procedimiento no son explotables.

2.° Que si, como frecuentemente ocurre, la ganga es arcillosa, éste componente retiene azufre líquido, impidiendo el agotamiento del mineral.

3.° Las materias bituminosas se separan mezcladas con las primeras porciones de azufre y ennegrecen una parte del producto obtenido; el resto es una buena segunda calidad comercial.

4.° En los minerales sometidos á los ensayos, no fué posible alcanzar el agotamiento de la primera materia; tratatando masas de 400 kg. de 24-26 por 100 de riqueza, sólo se obtuvo de 60-64 por 100 del azufre total, quedando en la escoria del 40-36 por 100 imposible de extraer ni aun operando á la presión de 6 atmósferas y sometiendo el mineral al tratamiento durante cinco horas.

Hay que advertir que sólo se logró el rendimiento de 64 por 100 después de repetidos experimentos encaminados á disponer el mineral en la cestilla de modo que la salida del azufre fundido estuviese facilitada todo lo posible; operando de otra suerte y llenando la cestilla con masas homogéneas de mineral, los rendimientos eran menores.

Semejante resultado significa una grave dificultad para aplicar el método al mineral objeto de mis estudios, y generalizando, por lo que de otros yacimientos es conocido, son numerosos los tipos de mineral análogos, y así cabe deducir que la aplicación del método Thomas es de muy dudosos resultados económicos en la mayoría de los casos.

5.° El operar á presiones de 4 atmósferas presentará serias dificultades en la mayor parte de los yacimientos de azufre, por lo delicado del manejo de autoclaves, la instala-

ción de generadores de vapor y la gran diferencia entre el cálculo teórico y los números prácticos, tocante á kilogramos de carbón que se gastan, aun cuando se recubran los aparatos con materias aisladoras del calor; en todos los casos la condensación del vapor de agua dentro del autoclave es considerable, lo cual rebaja las excelencias del sistema desde el punto de vista económico.

6.° Si con este procedimiento se llegara al agotamiento perfecto del mineral, como afirman los diversos autores que lo describen, sería muy recomendable; pero de mi parte aseguro que, aun empleando minerales de ganga caliza, no se llega al ansiado agotamiento del mineral, y eso modificando de diversos modos las condiciones del experimento; repetimos que en los ensayos practicados el mineral quedaba, como término medio, con 12 por 100 de riqueza, ó, en otros términos, la pérdida representa del 36 al 40 por 100 del azufre total.

Método de Fresch.—Para ser aplicado en las minas de azufre de Louisiana, cerca del lago Charles, ideó Fresch un procedimiento que en principio fué mal informado por los especialistas, que su enunciado parece una temeridad, y que, sin embargo, del modo formidable que ha sido aplicado contribuye con la mitad próximamente á la producción mundial de azufre.

La característica de tal sistema es que no se procede á la extracción del mineral, sino que de los mismos filones se extrae el azufre; se conceptuó esto necesario porque los bancos mineralizados se encuentran muy profundos (100—140 metros) y entre formaciones arenosas muy movedizas que dificultan extraordinariamente el laboreo de la mina.

Consiste el procedimiento en hacer llegar por medio de un tubo agua á temperatura bastante superior á la de la fusión del azufre, y á la presión correspondiente, hasta el mismo filón del mineral azufroso; funde el azufre y se eleva á la superficie del terreno por un tubo concéntrico con el anterior, merced al aire comprimido, aprovechando el principio de la

emulsión para tener una columna de aire y azufre fundido de desindad media menor que la del agua.

Los datos oficiales decían en 1905 que en las explotaciones de Louisiana se producían por año 350.000 toneladas de azufre, y que necesitaban quemar una tonelada de buen carbón para obtener 3 toneladas de azufre.

Poco después se han publicado los datos que sobre esta explotación dió Fresch á Lunge, según los cuales trabajan con una batería de generadores de vapor de 13.500 caballos, que utilizan como combustible el petróleo, y que llegan á producir 3.000 toneladas de azufre por día. El producto obtenido es muy puro; la primera calidad tiene, según Lunge, 99,6 por 100 de riqueza.

La enormidad de las cifras y la condición especialísima del procedimiento, no permiten hacer crítica alguna; el mercado de azufre siciliano se resintió notablemente cuando comenzó la explotación de los azufres de Louisiana y, aun cuando se llegó á un convenio referente al reparto de mercados, la crisis producida en los centros productores de azufre, en Sicilia principalmente, todavía continúa con bastante intensidad.

Extracción del azufre por medio del aire caliente.—Deseando evitar los inconvenientes que presenta el trabajo á presión, he pensado en utilizar, como vehículo del calor para fundir el azufre, el aire caliente, y se hicieron algunos experimentos operando en una estufa de aire formada por paredes de material refractario, y calentada empleando un sistema tubular, por el que circulaba el vapor de agua á 7 atmósferas de presión: el mineral se colocaba en una vagoneta perforada; esta disposición no dió buenos resultados, porque la extracción del azufre se realizaba de modo imperfecto é invertía tiempo excesivo.

Dispusiéronse otros ensayos colocando el mineral en la galería de humos de un generador de vapor en comunicación con una chimenea de 34 metros de altura. Los resultados así conseguidos son comparables á los del método Thomas, en

cuanto al agotamiento del mineral se refiere. La serie de trabajos experimentales practicados, permite establecer las conclusiones siguientes:

1.° Que el aire caliente á la temperatura de 180°, llega á fundir y separar el azufre de la escoria; pero la separación es lenta, á causa de la poca capacidad calorífica del aire en relación con la capacidad calorífica del mineral y el trabajo de fusión del azufre.

2.° Que por operar en una corriente de aire más ó menos moderada, parte del azufre se volatiliza, lo que origina una pérdida.

3.° Puede ocurrir, y ocurrió así en algún experimento, que por no estar bien regulada la temperatura de los gases, se inicie la combustión (250°) en algún punto de la masa, y entonces la operación puede considerarse perdida merced á la combustión completa del azufre.

4.° Este método podría emplearse con resultados análogos al de Thomas, pero con instalación más sencilla y económica, estudiando el problema de la combustión en los hogares y el tiro de la chimenea, de modo que la temperatura pueda regularse entre los límites más convenientes. El aprovechamiento del calor podría ser muy completo estableciendo una calefacción metódica en varias masas de mineral colocadas en diferentes cámaras, cuatro por ejemplo, y estableciendo la recuperación, por condensación, del azufre volatilizado; pero, de todos modos, el mineral no sería agotado, quedaría con riqueza del 10 al 12 por 100, lo que representa una pérdida aproximada del 35 al 40 por 100 de azufre.

5.° Según las ideas expuestas en la conclusión anterior, puede llegarse á una modificacien del método Gill, substituyendo los gases calientes que se desprenden de un *calcaroni* en actividad por combustión parcial del azufre, con gases calientes desprendidos de un hogar convenientemente dispuesto, donde se queme carbón ó cualquier otro combustible. La conveniencia de adoptar el procedimiento primitivo

de Gill, ó esta modificación, dependerá exclusivamente del precio del combustible á pie de mina, con relación al del azufre, pero habremos de tener en cuenta que la modificación implicará, como consecuencia, que el mineral no será agotado, y el rendimiento no pasará del 60 al 64 por 100.

Procedimiento Dubreuill.—Se propone con este método separar por fusión el azufre de la ganga que le acompaña, introduciendo el mineral en baños formados por disoluciones acuosas saturadas de cloruro de calcio, cuya temperatura de ebullición (179°) es superior á la de la fusión del azufre.

Se practicaron los consiguientes experimentos, introduciendo en una disolución saturada de cloruro de calcio una cestilla construída con tela metálica, llena de mineral, calentando el baño sin llegar á la temperatura de ebullición (á unos 155-160°).

Como resultado de algunos ensayos, se adquirió el convencimiento de que el método está lleno de dificultades, porque aun tratándose de pequeñas explotaciones, hay que disponer grandes masas de disolución de cloruro de calcio; el azufre se separa con gran lentitud, y cuando el mineral llega á una riqueza de 14-15 por 100, esta separación cesa, y así el rendimiento es pequeño (del 45 al 50 por 100); además, las pérdidas de cloruro de calcio retenido por el mineral son muy grandes.

Método de Condy Bollmann.—Este procedimiento difiere esencialmente de todos los anteriores, en que no propone la separación del azufre por fusión, sino utilizando la propiedad que tiene el sulfuro de carbono de ser un buen disolvente del azufre.

Según las determinaciones de M. Cossa, las disoluciones saturadas de azufre en el sulfuro de carbono, hierven á la temperatura de 55°, y á esta temperatura 100 gr. de sulfuro de carbono disuelven 181,34 gr. de azufre, y á 48° disuelven 146,21 gr.; tales datos constituyen el fundamento del método.

Teóricamente el procedimiento es bastante bueno, porque consiente alcanzar el agotamiento del mineral, y la pérdida, practicando la disolución por lavados metódicos, es pequeñísima; prácticamente, y para una gran explotación, el problema cambia de aspecto. Se trata de manejar grandes masas de un cuerpo, como el sulfuro de carbono, peligroso, por ser fácilmente inflamable y muy volátil; se establece, es cierto, la recuperación del disolvente por destilación, y ello obliga á instalar aparatos costosos y de nada fácil manejo; es necesario operar con el mineral pulverizado, y, por lo tanto, hay que practicar la filtración de las disoluciones de azufre, con las pérdidas consiguientes, aun lavando los filtros con vapor de agua, etc. En resumen, una instalación costosa, difícil de manejar y peligrosa.

Solamente en calidad de experimentos de laboratorio se ha practicado la extracción del azufre por este procedimiento, y los resultados han sido buenos en cuanto al rendimiento; pero creo que saliendo de los límites del ensayo y aplicándolo como base de un procedimiento industrial, pierden mucho valor las ideas, siendo dudoso el éxito. En mi sentir el procedimiento no es aceptable, aun teniendo la ventaja de poder ser aplicado á minerales pobres.

Consecuencia del estudio experimental acerca de los actuales métodos de extraer azufre, es la convicción de que el procedimiento por fusión resulta de práctica mucho más difícil de lo que á primera vista parece, teniendo en cuenta lo sencillo del fundamento teórico de los diversos métodos. Fundir el azufre es operación sencillísima; separarlo simultáneamente y de manera completa del mineral que lo contiene, es muy difícil, y por eso el rendimiento es constantemente pequeño en todos los métodos.

El agotamiento perfecto del mineral sólo se realiza cuando llega á temperaturas superiores á la de la inflamación del azufre y con los sistemas en que á ellas se trabaja, hay siempre causas de pérdida tan importante, que hacen muy

dudoso el resultado económico de la explotación. No influye poco en ello la especial propiedad del azufre de convertirse en un cuerpo viscoso á temperatura superior á la de su fusión, y que los minerales de azufre mediante impregnación, al convertirse en escorias cuando éste es eliminado, resultan masas visiblemente porosas, en cuyas pequeñas oquedades se aloja una parte del azufre, que solamente se desprende, ó á la temperatura de ebullición (447°), ó en forma de gas sulfuroso á la temperatura de inflamación (250°).

En conjunto, los métodos descritos producen el azufre de fusión, que para ser aplicado en muchos casos debe transformarse en azufre refinado. El refino implica una sublimación para la que se consume de nuevo la misma cantidad de calor antes gastada; es decir, que el azufre refinado que se expende en el comercio se ha fundido dos veces, una para obtenerlo en el tipo de azufre de fusión, y otra como tránsito indispensable para llegar á la temperatura de volatilización ó de sublimación; esto, fundamentalmente, no es económico.

Se aplica para el refino el método clásico marsellés, calentando el azufre en calderas, de las que se conocen diversos tipos, y recogiendo su vapor en grandes cámaras donde se solidifica en forma de flor ó de terrón, según el tamaño de la cámara con relación á la cantidad de vapor de azufre que recoge. Estas cámaras se construyen en obra de fábrica de mampostería ó ladrillo. La última modificación consiste en fabricarlas de chapa de plomo, sostenida por un armado de madera, y el fondo está de tal modo dispuesto que permite la extracción continua de flor de azufre sin interrumpir las operaciones; representan notable adelanto en la refinación de azufre, pero hasta hoy son escasas las instaladas.

Nuevo procedimiento.—La característica que lo diferencia de todos los demás es que en una sola operación se obtienen los tipos de azufre comercial, el de fusión en sus clases tercera y segunda y el refinado ó sublimado.

El fundamento del nuevo método de extracción de azufre

es el siguiente: si suponemos un tubo inclinado á 40 — 45° lleno de mineral de azufre y lo sometemos á la acción del calor, se licuará una cierta cantidad de aquel cuerpo, que arrastrando la materia orgánica bituminosa volátil á 120 —130° que contenga el mineral, saldrá por el extremo inferior del tubo y podrá recogerse en forma de azufre negro ó más ó menos ennegrecido (azufre de fusión); después, cuando por aumento progresivo de la temperatura del mineral se llegue á la de volatilización del azufre, el vapor producido ascenderá, saliendo por el extremo superior del tubo, donde, operando de modo conveniente, podrá recogerse en una cámara en forma de azufre sublimado ó refinado. Es condición indispensable que este tubo se halle herméticamente cerrado para el aire, pero abierto para la fácil salida del azufre fundido, y tal condición se ha realizado por medio de un cierre hidráulico.

La teoría del procedimiento puede explicarse por la figura adjunta, que representa el aparato usado en los dos primeros experimentos (fig. 1.ª). El tubo *A A* contiene el mineral azufroso; en la parte inferior *B* se coloca una rejilla móvil que lo sostiene dentro del tubo y que permite la salida del azufre fundido; á continuación de esta rejilla se encuentra el codo *C*, que cierra el aparato, introduciendo su extremidad en una vasija con agua, *H*. En la parte superior lleva el tubo *A A* un injerto, *D*, herméticamente cerrado, que se utiliza para la carga de mineral, y termina el tubo *A A* en otro encorvado y con válvula en forma de mariposa que conduce el vapor de azufre á la cámara de condensación.

El manejo, carga y descarga de esta caldera es sencillo. Por el injerto *D* se echa el mineral que debe llenar el tubo hasta *A*. Se hace el cierre, y el calor comienza á fundir azufre, que se recoge en el agua de la vasija *H*. Por el aumento progresivo de la temperatura del mineral llega el azufre á la temperatura de volatilización, teniendo salida sus vapores por la parte superior y también por la inferior del tubo;

condensan en forma de flor los que van á la cámara, y en forma de masas amarillas de riqueza de 99,2-99,7 por 100, los que se condensan en el agua. Terminada la operación por el agotamiento del mineral, se cierra la válvula mariposa, se levanta la parte del tubo *C*, se quita la rejilla, y la

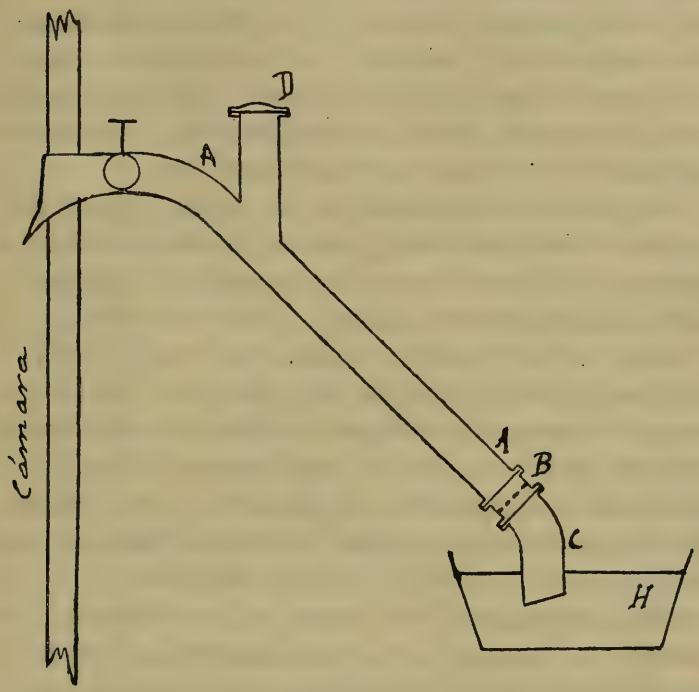


Figura 1.ª

escoria del mineral por su propio peso sale de la caldera. La operación de carga y descarga es tan símple que en una caldera cargada con 650 kg. de mineral se practica en diez minutos.

Hay que observar, porque es dato de suma importancia, desde el punto de vista industrial, que en una operación se obtienen todos los tipos comerciales de azufre; las primeras porciones recogidas en el agua que hace el cierre hidráuli-

co, consisten en azufre ennegrecido de 97-98,50 por 100 de riqueza, que lo emplea la industria en la fabricación de varios productos químicos; producir gas sulfuroso utilizado como decolorante, para hacer juntas inamovibles. etc.; el azufre amarillo, que después se recoge en el mismo lugar, puede ser finamente triturado, y susceptible de aplicaciones á la agricultura y otras en que se utilice el llamado azufre de segunda en el comercio; y el recogido en la cámara, es un perfecto tipo de azufre de primera, que en las formas de flor ó de cañón utilizan muchas industrias, como las de fabricación de pólvoras, fuegos artificiales, etc.

Debe resaltar esta condición de mi método, porque ningún otro de los conocidos la presenta. A todo lo más que se llega en el de Fresch, ó con el de Thomas, es á obtener simultáneamente los tipos segunda y tercera del comercio.

Aparte de ello, el gasto de combustible y el de mano de obra para obtener así el azufre de primera, será mucho menor que el necesario para lograr el mismo tipo refinando el azufre de fusión; en todos los otros sistemas hay que volver á fundir este producto para sublimarlo, y si se opera según el procedimiento napolitano modificado, haciendo una destilación con el mineral, la materia bituminosa volátil se solidifica parcialmente en la cámara de condensación, ó se descompone, formando con el azufre sulfuro de carbono y gas sulfhídrico. Con el procedimiento que se propone, la materia bituminosa se elimina, arrastrándola el azufre obtenido en la fase de fusión, lo cual varía mucho los resultados respecto de la calidad del azufre y del rendimiento.

En lo referente al modo de operar, carga y descarga de las calderas, etc., la extracción del azufre resulta operación muy sencilla, en la que fácilmente se adiestran los obreros. El aparato formado por hornos, calderas y cámara, es de menos coste que los necesarios para la extracción, según los métodos de Thomas, Condy Bollmann, Dubreuill, representando estos hechos ventajas prácticas en favor de mi procedi-

miento, muy dignas de tenerse en cuenta en todas las explotaciones. La caldera tubular descrita para exponer el principio fundamental del método ha sido muy modificada, consiguiendo con ello notable economía de combustible, rapi-

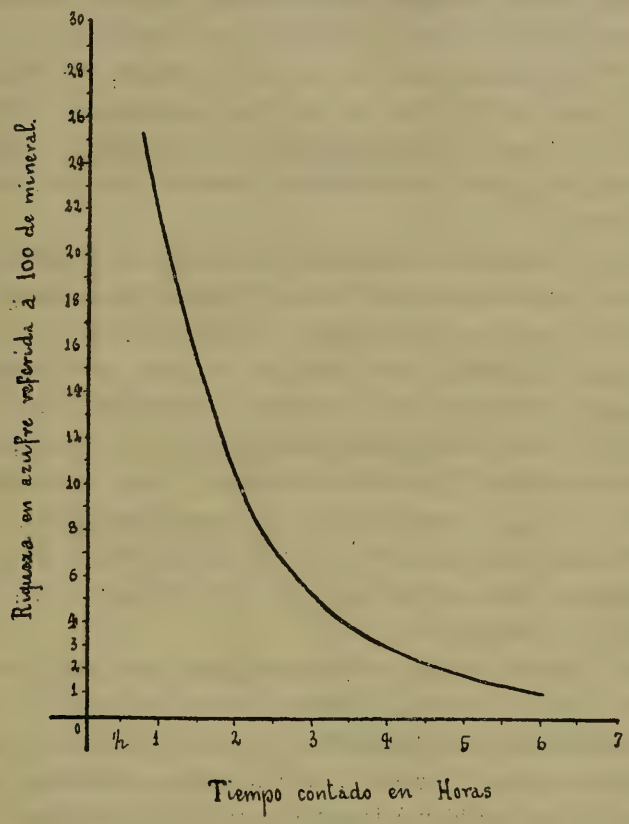


Figura 2.ª

dez en la práctica y facilidad de carga y descarga.

La marcha de las operaciones de extracción de azufre según el nuevo método, se representa en la gráfica adjunta, figura 2.ª, construída con datos experimentales recogidos en el trabajo del primer horno de seis calderas, que se ha construído con arreglo á este procedimiento y que funciona

desde los últimos días del mes de Marzo próximo pasado.

Es la gráfica la mejor descripción que puede hacerse de la marcha de las operaciones, y ella demuestra que el agotamiento del mineral llega á un límite muy aceptable después de cinco horas de trabajo, alcanzándose en tales condiciones un rendimiento en azufre total, que puede ser superior al 90 por 100. Semejante cifra no ha sido alcanzada con ningún otro procedimiento, como no sea el de disolución en el sulfuro de carbono (Condy Bollmann), cuya instalación y práctica tiene los graves inconvenientes de orden industrial antes indicados.

Si por cualquier circunstancia conviniera á la explotación obtener mayor cantidad de azufre de fusión, puede dirigirse el trabajo para que así se realice, y operando en tal forma, he llegado á obtener, como promedio de varios experimentos, en una caldera que se carga con 600 kg. de mineral, 155 kg. de azufre de fusión en las clases comerciales tercera y segunda. El mineral tenía 30 por 100 de riqueza, ó sea: en la carga había 180 kg. de azufre total; á la cámara fueron 12 kg. de azufre, luego obtuvimos 167 kg., lo cual representa un rendimiento en almacén del 92,7 por 100 del azufre total sometido á la extracción.

Es de mucha importancia para el mejor resultado económico del procedimiento, el trabajar con un tipo de horno que aproveche bien el combustible; el que he construído, después de estudiado el asunto, da excelentes resultados. Renuncio á describirlo y á tratar de muchos pormenores referentes á la marcha de las operaciones, por no hacer demasiado extensa la presente Memoria, cuyo objeto se limita, exclusivamente, á exponer lo fundamental de mi procedimiento de extracción del azufre.

Zaragoza, Mayo 1910.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XLVI. — Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia undécima 785

XLVII. — Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. Conferencia duodécima 818

XLVIII. — Estudio completo de una clase especial de integrales singulares, por *Lauro Clariana* 845

XLIX. — Dosificación volumétrica del ferrocianuro y del ferricianuro potásicos, por *Werner Mecklenburg* . . 871

L. — Nuevo método de extracción del azufre de los minerales que lo contienen en estado nativo, por *Antonio de Gregorio Rocasolano* 895

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

LIBRARY AND ARCHIVES
JUN 3 - 19
No. 16.

TOMO VIII.—NÚM. 12.

(Junio de 1910.)

Smithsonian Institution
FEB 7 1926
National Museum

MADRID
ESTABLECIMIENTO TIPOGRÁFICO Y EDITORIAL
CALLE DE PONTEJOS, NÚM. 8.
1910

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

C. & G. BURKEY.
LIBRARY AND ARCHIVES
1903-1911
Acc. No.

LI.—Cuestiones de análisis. Aplicación á la Física matemática.

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimatercera.

SEÑORES:

Hemos demostrado la fórmula de Stokes, escogiendo para demostración la que indica Mr. Poincaré en su libro de «Electricidad y Optica», aunque con alguna aclaración para la mejor inteligencia de mis alumnos.

Y expusimos después, al fin de la conferencia precedente, algunos casos particulares de dicha fórmula, tomando por guía en esta parte á Mr. Apell en su tratado de Mecánica racional, así como en esta conferencia seguiremos del mismo modo la exposición de dicho autor, en dos aplicaciones analíticas, que son de verdadera importancia y de uso general.

***

Primera aplicación. Sea un campo de vectores W, W', W''..... (fig. 37), y ya sabemos lo que esto significa; pero estas ideas elementales bueno es recordarlas con frecuencia.

Un campo de vectores significa, que en un espacio determinado, finito ó infinito á cada punto del mismo, A', A'' ..... corresponde un vector W, W' .....

Este vector está definido por sus tres componentes P, Q, R y estas componentes son funciones de las coordenadas del punto.

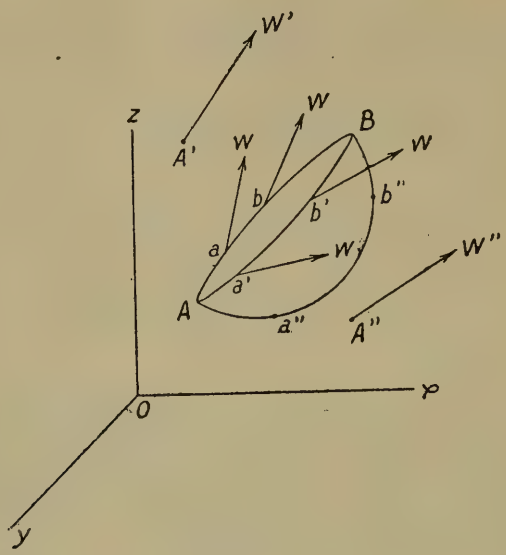


Figura 37.

Para el punto A', por ejemplo, las tres componentes P', Q', R' del vector W', serán tres funciones;

$$P' = \varphi_1(x', y', z')$$
$$Q' = \varphi_2(x', y', z')$$
$$R' = \varphi_3(x', y', z')$$

y otro tanto pudiéramos repetir para todos los demás puutos del campo de vectores que consideramos.

Imaginemos en dicho campo dos puntos cualesquiera A y B y entre ellos tracemos una curva arbitraria $AabB$.

Esta curva irá encontrando en todos sus puntos a, b ..... una serie de vectores W y podremos formar la integral desde A á B, según la línea trazada

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz),$$

que representará, como ya explicábamos en la conferencia precedente, el trabajo del vector W cuando su punto de aplicación recorre la línea en cuestión desde A á B.

También podríamos representar este trabajo, designando por W_s la proyección de W para cada punto del vector W sobre el arco de la curva, por la integral

$$\int_{AabB} W_s ds.$$

Ambas integrales representan lo mismo, porque el trabajo de la resultante es igual á la suma de los trabajos de las componentes, y por otra parte, lo mismo da proyectar en cada instante, ó mejor dicho para cada elemento, la fuerza sobre el camino, que el camino sobre la fuerza.

Por la demás, mientras el vector sea un concepto abstracto, la palabra trabajo no tendrá una significación mecánica, sino una significación, por decirlo así, de analogía, para una expresión analítica.

Sea como fuere, de magnitudes expresadas por números se trata, y la integral en cuestión tendrá entre A y B, y para la línea $AabB$, un valor numérico determinado, que designaremos por I, es decir,

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz) = I.$$

Y ahora se presenta este problema:

Supongamos que entre los puntos A y B se traza otra línea $Aa'b'B$, y que á dicha línea se aplica todo lo que hemos dicho de la anterior.

La línea irá encontrando puntos de aplicación del vector W, es decir, una serie de vectores, que tendrán distintas magnitudes y distintas direcciones que las de la primera línea, aunque todos los del campo estén expresados por las mismas funciones φ_1, φ_2, φ_3 de x, y, z.

Pero, como los puntos a', b' ..... son distintos de los anteriores, variando las coordenadas, variarán los valores de las funciones.

En suma, si determinamos para la nueva línea $Aa'b'B$ la integral

$$\int_{Aa'b'B} (Pdx + Qdy + Rdz),$$

esta integral tendrá un valor distinto de la precedente; designándolo por I' tendremos

para la línea $AabB \int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz) = I,$

para la línea $Aa'b'B \int_{Aa'b'B} (Pdx + Qdy + Rdz) = I'.$

Y si trazásemos una serie de líneas, por ejemplo, otra tercera $Aa''b''B$, para ésta y para todas las restantes, lo natural es que tuviéramos distintos valores; porque en cada integral varía la línea de integración, por lo tanto, las componentes dx, dy, dz de cada arco ds y además, las componentes P, Q, R del vector.

Pues el problema á que nos referimos, es éste;

¿A qué ley deben obedecer los vectores W del campo, para que todas estas integrales tengan el mismo valor respecto á todas las líneas que entre A y B se tracen, es decir para que se tenga

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz) = I$$

$$\int_{Aa'b'B} (Pdx + Qdy + Rdz) = I$$

$$\int_{Aa''b''B} (Pdx + Qdy + Rdz) = I$$

.....

conservándose siempre constante el valor I?

Más aún; para que esta propiedad pertenezca á todos los puntos del campo A, B tomados dos á dos.

Y agregamos esta segunda parte para dar precisión á las ideas, y porque la lógica así lo exige, aunque después veremos si es ó no necesaria, porque pudiera suceder, que verificándose la condición de que se trata para dos puntos A y B, se verifique para todos.

Por el pronto fijémonos en dos puntos determinados A y B.

***

La condición á que nos referimos, es decir, que la integral tenga el mismo valor entre A y B, sea cual fuere la línea de integración entre los dos puntos, se reduce á otra condición más sencilla, como vamos á ver inmediatamente; pero antes, hagamos una aclaración.

Tomemos la integral, por ejemplo,

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz).$$

Si en vez de hacer la integración desde A á B, moviéndose el punto de la línea en el sentido $AabB$ hacemos la integración en sentido contrario, es decir, desde B á A según $BbaA$, es evidente que obtendremos para la integral el mismo valor numérico, pero con signo contrario, es decir, que si

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz) = I$$

resultará

$$\int_{BbaA} (Pdx + Qdy + Rdz) = -I.$$

Esto es evidente.

Porque para cada punto a el elemento diferencial,

$$Pdx + Qdy + Rdz$$

contendrá las mismas P, Q, R con el mismo valor numérico y el mismo signo; pero si el arco ds tiene por componentes dx, dy, dz cuando se recorra en el sentido AB tendrá por componentes $-dx$, $-dy$, $-dz$ al recorrerlo en el sentido contrario, de B á A.

De modo que los dos elementos diferenciales, serán iguales en valor numéríco y de signo contrario:

$$Pdx + Qdy + Rdz$$
$$-Pdx - Qdy - Rdz.$$

Y como podemos decir lo mismo de todos elementos de las dos integrales, resulta probada la proposición.

En suma, cuando tengamos una integral de esta clase, cambiar el sentido de la línea de integración, es cambiar el signo al resultado.

Y por lo tanto, cambiar á la vez el sentido y el signo, será dejar invariable el valor de la integral.

Y ahora continuemos nuestra explicación, y sustituyamos la condición de la invariabilidad de las integrales de un punto á otro, por otra más sencilla, según antes indicábamos.

La condición era esta:

Que sean cuales fueren las líneas $AabB$ y $Aa'b'B$, han de ser iguales las dos integrales que se expresan en la siguiente ecuación:

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{Aa'b'B} (Pdx + Qdy + Rdz.$$

Pasando la integral del segundo miembro al primero, tendremos:

$$\int_{AabB} (Pdx + Qdy + Rdz) - \int_{Aa'b'B} (Pdx + Qdy + Rdz) = o$$

é invirtiendo en la segunda integral la línea de integración y cambiando el signo, como antes explicábamos,

$$\int_{AabB}(Pdx+Qdy+Rdz)+\int_{Bb'a'A}(Pdx+Qdy+Rdz)=o.$$

Pero, integrar según la línea $AabB$ y después, á lo largo de la línea $Bb'a'A$, es lo mismo que integrar á lo largo de la línea cerrada $AabBb'a'A$, ó abreviadamente para no escribir tantas letras $AaBa'A$, luego

$$\int_{AaBa'A}(Pdx+Qdy+Rdz)=o.$$

En resumen, la condición de que la integral entre A y B sea la misma, sea cual fuere la línea de integración, se reduce á esta otra más sencilla, que es la que habíamos anunciado: que la integral á lo largo de cualquier línea cerrada, es decir, que parta de A y que vuelva á A, ha de ser igual á o.

Recíprocamente, si se verifica esta condición, se verificará la primera, porque hagamos pasar por B una línea cerrada, y apliquemos los razonamiencos de antes en orden inverso, suprimiendo para abreviar la escritura $Pdx+Qdy$ Rdz y tendremos

$$\int_{AaBa'A}=o;\ \int_{AaBa'A}=\int_{AaB}+\int_{Ba'A}=\int_{AaB}-\int_{Aa'B}=o$$

luego

$$\int_{AaB}=\int_{Aa'B}.$$

De modo que si la integral es cerrada para un punto A, las integrales para todos los caminos desde A á otro punto cualquiera B serán iguales.

***

Decíamos, al enunciar el problema, que la propiedad había de subsistir para todos los puntos dos á dos, y ahora decimos que basta que subsista para dos puntos determinados.

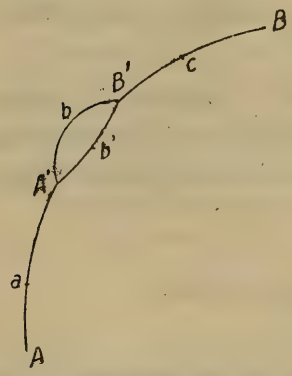


Figura 38.

Porque en efecto: si la propiedad de obtener la misma integral, sea cual fuere el camino que se siga entre dos puntos determinados A B existe, la misma propiedad subsistirá para dos puntos cualesquiera A' B' (fig. 38).

En efecto: tomemos dos caminos arbitrarios entre A' y B', á saber: $A'bB'$, $A'b'B'$; y vamos á demostrar que si la propiedad existe entre A y B para dos líneas cualesquiera L, L', de modo que

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz = \int_{L'} (Pdx + Qdy + Rdz)$$

también tendremos:

$$\int_{A'bB'} = \int_{A'b'B'}.$$

En efecto; tracemos dos líneas: a entre A y A', c entre B y B'.

Y tendremos por hipótesis:

$$\int_{AaA'bB'cB} = \int_{AaA'b'B'cB}$$

ó bien

$$\int_{AaA'} + \int_{A'bB'} + \int_{B'cB} = \int_{AaA'} + \int_{A'b'B'} + \int_{B'cB};$$

y suprimiendo integrales iguales de ambos miembros, queda

$$\int_{A'bB'} = \int_{A'b'B'}$$

que es lo que nos proponíamos demostrar.

En suma, basta que exista la propiedad para dos puntos cualesquiera para que sea general en todo el campo de vectores.

Y como la propiedad en cuestión la habíamos reducido á esta otra que es equivalente: que tomando un punto A, para todo contorno cerrado que parta de dicho punto y á él vuelva, la integral se reduzca á o, se deduce desde luego que el punto A también es arbitrario.

Basta, pues, que los contornos cerrados se anulen para un punto cualquiera.

***

Veamos, pues, á qué condiciones han de satisfacer los vectores del campo, para que la integral de todo contorno cerrado se reduzca á o.

La fórmula de Stokes, recordemos que es la siguiente:

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$= \int\int_S \left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + n\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\sigma$$

Si tomamos por contorno cerrado un rectángulo $abcd$ (fig. 39), situado en el plano de las yz, y cuyos lados sean paralelos á los ejes y, z; y si tomamos por superficie la porción de dicho plano coordenado, comprendida en el contorno rectangular, en la ecuación general de Stokes, deberemos hacer $x = o$ (y si la figura estuviera en un plano paralelo al yz, que en el fondo es lo mismo, tendríamos que hacer $x =$

constante). Además, como la normal n á la superficie es paralela al eje de las x, tendremos

$$l = 1,\ m = o,\ n = o.$$

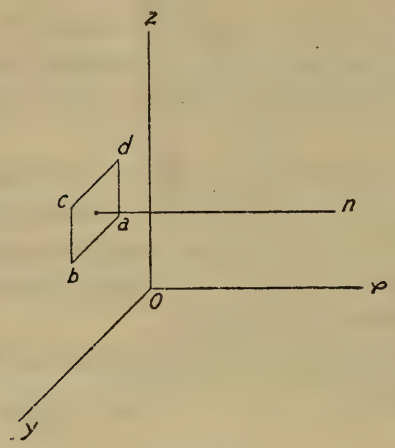


Figura 39.

La fórmula general de Stokes se reducirá á la siguiente: llamando L al contorno del rectángulo, línea que puede empezarse á contar desde cualquier punto,

$$\int_L (Q dy + R dz) = \int\int_S \left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} \right) d\sigma.$$

El primer miembro ha de ser *rigurosamente* nulo; luego el segundo debe serlo también.

Pero, si suponemos que el área $abcd$, ó, mejor dicho, S, es suficientemente pequeña, y si suponemos además, y estas son condiciones necesarias para que subsista la fórmula, que P, Q, R y sus derivadas sean funciones contínuas y uniformes, sin pasar nunca por infinito, es claro, que podremos escoger el área S tan pequeña que

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}$$

conserve en toda la extensión de dicha área el mismo signo.

Mas en este caso, como la suma de cantidades que tienen el mismo signo no puede ser o, la integral del segundo miembro, no podría anularse, y como ha de ser rigurosamente nula, deberemos tener *idénticamente*

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = o.$$

Decimos idénticamente, es decir, para todos los valores x, y, z del campo de los vectores.

Repitiendo esto mismo para un área suficientemente pequeña del plano de las xz, y para otra del plano de las xy, veremos que los otros dos binomios de la fórmula deben reducirse á o, y tendremos por fin: que para que en un campo de vectores, las integrales de línea que representan el trabajo entre dos puntos, sean independientes del camino seguido y sólo dependan de los puntos que se elijan, deberán verificarse idénticamente, es decir, para todos los valores de x, y, z, estas tres condiciones, que serán necesarias y serán suficientes, según se deduce de la anterior demostración:

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = o, \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} = o, \frac{dQ}{dl} - \frac{dP}{dy} = o. \quad (1)$$

Estas serán también las condiciones, según lo expuesto, para que en dicho campo de vectores, la integral, á lo largo de una línea cerrada, partiendo de cualquier punto, sea igual á cero.

***

Ahora bien, se sabe por cálculo integral, que las ecuaciones (1) son las condiciones necesarias y suficientes para que

$$Pdx + Qdy + Rdz = o$$

sea una diferencial exacta de x, y, z.

Y esto era evidente, y el teorema, puede decirse que estaba demostrado de antemano, porque ya lo habíamos demostrado en las conferencias del año anterior.

Mas volvamos á repetir algo de lo que allí dijimos.

Si $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ es una diferencial exacta de una función de tres variables x, y, z, á saber: $\varphi\,(x, y, z)$, tendremos (fig. 37)

$$\int_{AaB} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{AaB} d\varphi\,(x, y, z).$$

La integral del último miembro, que es la suma de los diferentes valores de $d\varphi$ entre A y B, tiene por integral indefinida $\varphi\,(x, y, z)$ y si representamos por x_0, y_0, z_0 las coordenadas de A, y por x_1, y_1, z_1 las coordenadas de B, tendrá evidentemente

$$\int_{AaB} (Pdx + Qdy + Rdz) = \varphi\,(x_1, y_1, z_1) - \varphi\,(x_0, y_0, z_0);$$

donde se ve comprobada la propiedad fundamental, á saber: que la integral á lo largo de cualquier línea que vaya de A á B, no depende de dicha línea, sino de las coordenadas de los puntos extremos, ó si se quiere de la posición de los puntos A, B.

Esta propiedad, aun puede expresarse en términos más generales.

En efecto; definamos una superficie del campo de vectores por la ecuación

$$\varphi\,(x, y, z) = C$$

siendo C una constante arbitraria.

Supongamos que á esta constante se le da una serie de valores, contínuos ó discontínuos, y tendremos (fig. 40) una

serie de superficies correspondientes á los valores C_0, C_1, C_2 ..... C, serie comprendida en la ecuación precedente.

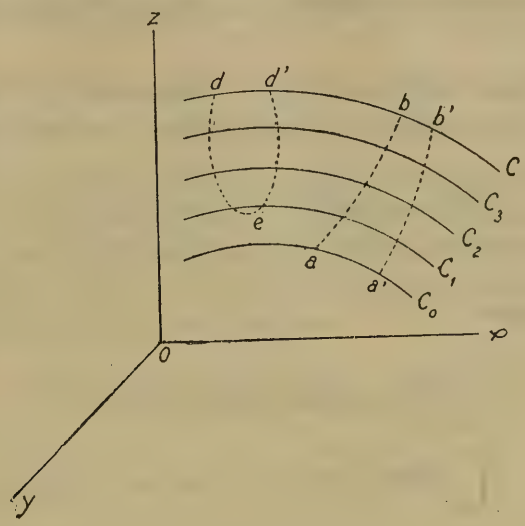


Figura 40,

Pues bien; la propiedad generalizada á que antes nos referíamos, es la siguiente:

Tracemos entre la superficie C_0 y la superficie C dos líneas cualesquiera, $a\,b$, $a'\,b'$ y es evidente que tomándolas como líneas de integración, las dos integrales para las dos líneas expresadas, tendrán el mismo valor numérico, es decir:

$$\int_{ab} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_{a'b'} (Pdx + Qdy + Rdz).$$

En efecto, si designamos por x_0, y_0, z_0 las coordenadas de a; por x_1, y_1, z_1 las coordenadas de b; y por estas mismas letras con acento las coordenadas de a' y b' tendremos según lo demostrado,

$$\int_{ab} (Pdx + Qdy + Rdz) = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0)$$

y

$$\int_{a'b'} (Pdx + Qdy + Rdz) = \varphi(x'_1, y'_1, z'_1) - \varphi(x'_0, y'_0, z'_0).$$

Pero como los puntos a y a' corresponden á la superficie C_0 y los puntos b, b' á la superficie C, es claro que tendremos

$$\varphi(x_0, y_0, z_0) = \varphi(x_0', y_0', z_0') = C_0$$
$$\varphi(x_1, y_1, z_1) = \varphi(x_1', y_1', z_1') = C,$$

y por lo tanto

$$\int_{ab} (Pdx + Qdy + Rdz) = C - C_0$$
$$\int_{a'b'} (Pdx + Qdy + Rdz) = C - C_0$$

es decir,

$$\int_{ab} = \int_{a'b'}.$$

Si designamos, para abreviar la explicación, las superficies $\varphi = C$ con el nombre de superficies de nivel, y aplicamos el nombre de trabajo de vectores, como antes hemos hecho, á cualquier integral de $P\,dx + Qdy + Rdz$, la propiedad precedente podrá expresarse de este modo: el trabajo de vectores entre dos líneas de nivel es siempre el mismo.

Es la propiedad ya conocida y estudiada en Mecánica elemental para el trabajo de la gravedad entre dos planos horizontales.

Casos particulares de esta propiedad, son los siguientes:

1.° El trabajo sobre una línea de nivel, $b\,b'$ por ejemplo, es nulo, porque en efecto:

$$\int_{bb'} (Pdx + Qdy + Rdz) = C - C = o.$$

2.° El trabajo á lo largo de una línea ded' entre dos puntos d, d' de una línea de nivel es también igual á cero; lo mismo que si los puntos d, d' coincidiesen, porque

$$\int_{ded'} (Pdx + Qdy + Rdz) = \varphi(d) - \varphi(d') = C - C = o.$$

De todo lo dicho pudiera deducirse, como ya explicábamos en el año anterior, que si el vector general del campo, W, es una fuerza y este vector tiene lo que llamábamos una función de fuerzas $\varphi(x, y, z)$, es decir, que sus componentes P, Q, R están representadas por

$$P = \frac{d\varphi}{dx}, \; Q = \frac{d\varphi}{dy}, \; R = \frac{d\varphi}{dz}$$

en cuyo caso

$$Pdx + Qdy + Rdz = \frac{d\varphi}{dx}dx + \frac{d\varphi}{dy}dy + \frac{d\varphi}{dz}dz = d\varphi$$

será una diferencial exacta, y en cuyo caso se verificarán, como antes indicábamos, las condiciones de integrabilidad

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}, \; \frac{dP}{dz} = \frac{dR}{dx}, \; \frac{dQ}{dz} = \frac{dR}{dy}$$

ó bien

$$\frac{dP}{dy} - \frac{dQ}{dx} = o, \; \frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} = o, \; \frac{dQ}{dz} - \frac{dR}{dy} = o,$$

dicho campo excluye en absoluto el movimiento continuo, porque en dicho campo, ni puede crearse trabajo, ni puede destruirse.

Sea cual fnere el camino que se siga para ir de un punto á otro, el trabajo desarrollado siempre será el mismo, y al

volver al punto de partida, el trabajo desarrollado en el campo será nulo.

Todas estas propiedades ya las explicamos minuciosamente en las conferencias del curso anterior.

***

Segunda aplicación.—Es esta, en cierto modo, análoga á la precedente, sólo que no se trata de integrales de línea, sino de integrales de superficie; no de trabajo de vectores, sino de flujo de vectores.

No decimos como antes: ¿cuáles son las condiciones á que han de satisfacer los vectores de un campo, para que la integral de línea del trabajo de estos vectores, entre dos puntos A y B, sea independiente de la línea de integración, y sólo dependa de la posición de ambos puntos? sino que se pregunta: ¿á qué condición han de satisfacer los vectores de un campo para que las integrales de superficie, cuando una serie de éstas se apoyan sobre una línea dada, den el mismo valor para el flujo de estos vectores?

Expliquemos esto aun con más precisión, que para la enseñanza de alumnos que estudian por primera vez estas materias, nunca nos duele repetir dos y tres veces la misma idea.

Consideremos, figura 41, un campo de vectores K, K' .....

Coloquemos en ese campo una línea cerrada L, y por esa línea hagamos pasar, apoyándose en ella, una serie de superficies S, S' .....

Claro es, como tantas veces hemos explicado, que prescindiendo de los vectores de L, á cada punto de cada superficie A, A' ..... corresponderá un vector K, K' .....

Consideremos una de las superficies, la S por ejemplo.

Si proyectamos el vector K de cada punto A sobre la normal á la superficie en el punto A, y designamos por K_n dicha proyección, el producto de K_n por el área infinitamente

pequeña de superficie A, representará, como ya sabemos, el elemento de flujo, correspondiente á este punto, del vector K.

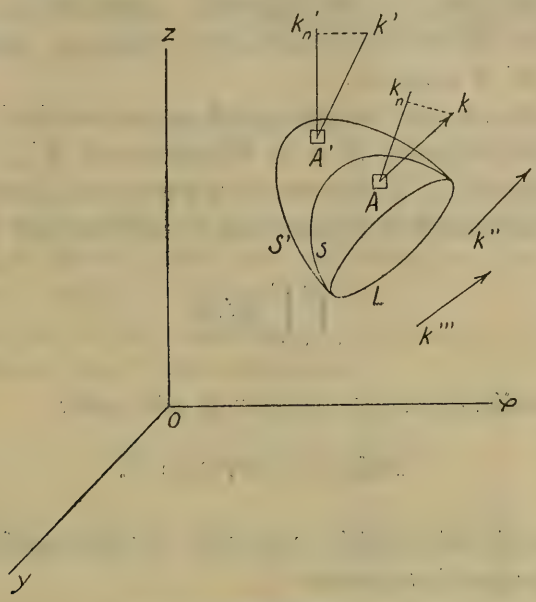


Figura 41.

Designando por $d\sigma$ el elemento de superficie, tendremos que,

$$\int\int_S K_n \, d\sigma$$

representará el flujo del campo de vectores á través de toda la superficie S en la parte que limita la línea L.

Este flujo, ó esta integral, tendrá un valor perfectamente determinado, suponiendo, como suponemos, que la integral no cae en ningún caso de excepción, ni por falta de continuidad en el vector, ni por falta de continuidad en la superficie.

Representemos por I el valor de esta integral; y podremos establecer en forma abreviada

$$\text{Flujo } K \text{ á través } S = I.$$

Repitamos estas mismas consideraciones para otra superficie cualquiera S'.

A cada punto de esta superficie corresponderá también un vector del sistema, es decir, del campo; por ejemplo: al punto A' el vector K'.

A cada vector K' corresponderá una proyección K'_n sobre la normal del punto A' y un flujo elemental $K'_n d\sigma'$ representado por $d\sigma'$ el elemento de superficie del punto A'. De modo que para toda la superficie S' obtendremos un flujo total

$$\iint_{S'} K_n' d\sigma'$$

que también podremos expresar de este modo:

Flujo K' á través de S'.

Pero este flujo tendrá, en general, un valor numérico distinto que para la superficie S.

Si lo representamos por I', tendremos:

Flujo K' á través de $S' = I'$.

En general, considerando una serie de superficies S, S', S'' ..... apoyadas todas como en una intersección común en una misma línea L, los flujos de K á través de cada una de estas superficies, serán, como hemos dicho, distintos en general: I, I', I'' .....

Y se plantea el problema de este modo: ¿á qué condiciones, á qué ley, deben satisfacer los vectores del campo para que, conservándose constante la línea L, todos los flujos á través de cada una de las superficies S, tengan el mismo valor?

Así como en el problema anterior buscábamos las condiciones del campo para que, conservándose constantes los puntos A, B y variando la línea de integración, la integral

no cambiase de valor, aquí buscamos también las condiciones del campo de vectores para que, conservándose constante la línea L, la integral del flujo dé el mismo valor para todas las superficies S.

*
* *

Observemos, ante todo, que si el campo está formado por lo que hemos llamado vectores torbellinos, para estos vectores se verifica la propiedad indicada.

Esto se deduce inmediatamente de la fórmula de Stokes. Porque, en efecto, dicha fórmula es

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) =$$

$$= \iint_S \left[l\left(\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz}\right) + m\left(\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx}\right) + n\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)\right] d\sigma.$$

Hemos dicho, que los tres paréntesis del segundo miembro reprsentan las tres componentes del vector tor bellino T, que hemos designado por T_x, T_y, T_z; por lo tanto, la fórmula anterior puede expresarse de este modo:

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \iint_S (l\,T_x + m\,T_y + n\,T_z)\,d\sigma.$$

El segundo miembro, como hemos manifestado en muchas ocasiones, no es otra cosa que el flujo del vector T á través de la superficie S, y así puede escribirse

$$\int_L (P\,dx + Q\,dy + R\,dz) = \text{Flujo } T \text{ á través de } S.$$

Pero en el segundo miembro la superficie S puede ser cualquiera, con tal que tomemos el flujo de los vectores T que en el campo correspondan á la nueva superficie, y para

todas estas superficies S, S'..... el primer miembro será el mismo, porque la línea L no varía, es decir, que será una cantidad constante I, de modo que

$$\text{Flujo } T \text{ á través de } S = I:$$

subsiste, pues, la condición del problema; y es más, tenemos el valor constante del flujo, que será el del primer miembro

$$I = \int_L (Pdx + Qdy + Rdz),$$

que no es otra cosa que el trabajo á lo largo de la línea, del vector W, cuyas componentes son P, Q, R, y que han servido para formar el vector torbellino T.

Podemos decir que el flujo del vector torbellino será el mismo para todas las superficies que se apoyen ó pasen por la línea L, y vendrá expresado en función de las componentes P, Q, R, que entran en la composición de T.

Ya tenemos, no un campo, sino infinitos campos de vectores, que gozan de la propiedad en cuestión para todas las líneas cerradas L que se tracen en los expresados campos; sólo que cada uno de estos campos se ha de componer, no de vectores arbitrarios, sino de vectores torbellinos.

Fijemos bien las ideas.

Consideremos un campo de vectores cualesquiera W, figura 42. Cuando decimos cualesquiera, ha de entenderse que han de obedecer á la ley de continuidad las funciones que representan sus componentes,

$$P = \varphi_1(x. y, z),$$
$$Q = \varphi_2(x, y, z),$$
$$R = \varphi_3(x, y, z),$$

y además han de ser funciones bien definidas para que las integrales que utilicemos no caigan en los casos de excepción á que varias veces hemos hecho referencia.

Con estos vectores W, W', W''..... formemos los vectores torbellinos T, T', T''... para todos los puntos A, A', A''... del campo.

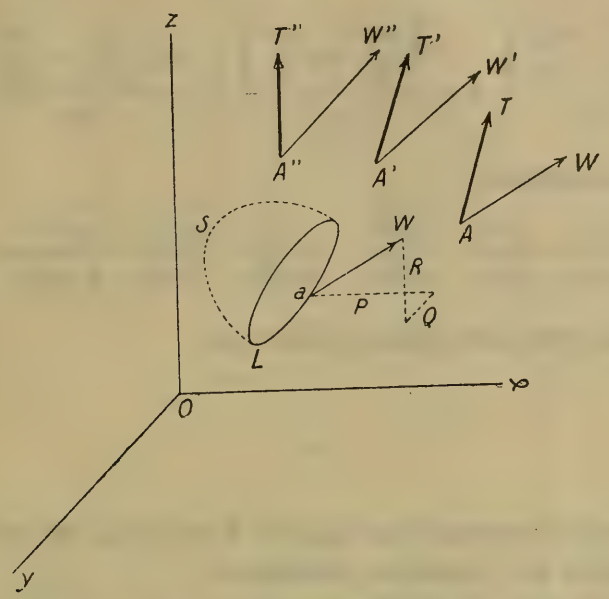


Figura 42.

De este modo obtendremos un campo de vectores T, que cumplirá con la condición que venimos estudiando, es decir, que para toda línea cerrada L, el flujo de los vectores T, correspondiente á cualquier superficie S que pase por L tendrá un valor constante, y este valor será el trabajo del vector primitivo W que ha servido para formar el vector T, trabajo tomado á lo largo de L.

Los vectores primitivos W sirven para formar el campo, y sirven para dar el valor del flujo.

Y antes de pasar adelante, observemos que los vectores T cumplen con una condición analítica importante, á saber: *que su divergencia para cualquier punto es nula;* es decir

$$\frac{dT_x}{dx} + \frac{dT_y}{dy} + \frac{dT_z}{dz} = o.$$

Para demostrarlo, no hay más que sustituir en vez de T_x, T_y, T_z sus valores, y efectuar las operaciones.

En efecto, tendremos:

$$\frac{d\left(\frac{dR}{dy}-\frac{dQ}{dz}\right)}{dx}+\frac{d\left(\frac{dP}{dz}-\frac{dR}{dx}\right)}{dy}+\frac{d\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)}{dz}=o$$

y desarrollando

$$\frac{d^2R}{dydx}-\frac{d^2Q}{dzdx}+\frac{d^2P}{dzdy}-\frac{d^2R}{dxdy}+\frac{d^2Q}{dxdz}-\frac{d^2P}{dydz}=o$$

cuyos términos se destruyen dos á dos.

***

Hemos encontrado una solución al problema; pero no sabemos si será la solución más general.

Los vectores torbellinos cumplen con la condición del flujo constante, á través de todas las superficies que pasan por una línea fija L; pero un campo arbitrario de vectores no constituye un sistema de vectores torbellinos, porque estos tienen una constitución especial: de suerte que el problema hay que estudiarlo con alguna más generalidad.

Sea como antes un campo de vectores K; consideremos en él una línea cerrada L, y por dicha línea hagamos pasar una superficie S (fig. 43)..

Para todos los puntos A de dicha superficie, consideremos los vectores K.

Por la línea L consideremos otra superficie S', que para más claridad en la figura, hemos supuesto que vuelve su convexídad en sentido contrario que la primera; pero lo mismo sería considerar las dos superficies S, S' de la fig. 41.

Mas volvamos á la fig. 43.

Para todos los puntos A' de la superficie S', consideremos el vector correspondiente K'.

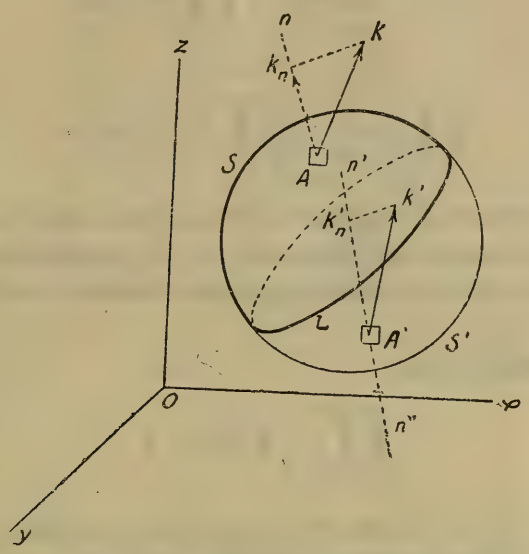


Figura 43.

El flujo de K sobre S debe ser el mismo que el de K' sobre S' si ha de cumplirse la condición de que tratamos.

Tendremos, pués, según notaciones anteriores

$$\iint_S K_n \, d\sigma = \iint_{S'} K_n' \, d\sigma'.$$

Tal como hemos puesto la figura, el vector K' del punto A' y su componente sobre la normal, K'_n actúan hacia el interior del espacio que cierran las superficies S y S'.

Si en vez de proyectar el vector K' sobre la normal n' que se dirige hacia el interior, lo proyectamos sobre la prolongación n'' de esta normal hacia el exterior, es decir, que tomamos para dirección de la normal como dirección positiva la parte $A'n''$ en vez de la parte $A'n'$, la proyección K'_n cambiará de sígno, porque los ángulos $K'A'n'$ y $K'A'n''$ son complementarios, y sus cosenos tienen signo contrario.

Así, pues, la fórmula anterior se convertirá en

$$\int\int_S K_n \, d\sigma = -\int\int_{S'} K_n'' \, d\sigma'$$

ó bien

$$\int\int_S K_n \, d\sigma + \int\int_S K_n'' \, d\sigma' = o.$$

Pero estas dos integrales dobles, pueden reducirse á una sola que abarque el conjunto de las dos superficies S, S' y en que los flujos se cuenten para ambas sobre la normal exterior.

Tendremos, pues

$$\int\int_{S+S'} K_n \, d\sigma = o,$$

en que K y por lo tanto K_n así como $d\sigma$ se extienden al conjunto de las dos superficies S, S'; y esta será una condición necesaria para que se cumpla la condición fundamental, es decir, para que los flujos de K sobre S y sobre S' sean iguales; lo cual, por otra parte, es evidente, porque si los flujos son iguales,la suma de uno de ellos y del otro cambiado el signo, debe ser igual á cero.

Sabemos por la fórmula de Green que la integral de los flujos para una superficie cerrada, es igual á la integral de la divergencia, ó sea:

$$\int\int_{S+S'} K_n \, d\sigma = \int\int\int_V \left(\frac{dK_x}{dx} + \frac{dK_y}{dy} + \frac{dK_z}{dz} \right) dx \, dy \, dz.$$

Ahora bien, como las superflcies S y S' son arbitrarias, el espacio que encierran puede ser tan pequeño como se quiera, y estar situado en cualquier punto del campo de vectores, como indica la fig. 44.

Las dos superficies S y S', van casi confundidas á partir

de la línea L, y sólo se separan dejando un elemento de volumen A tan pequeño como se quiera.

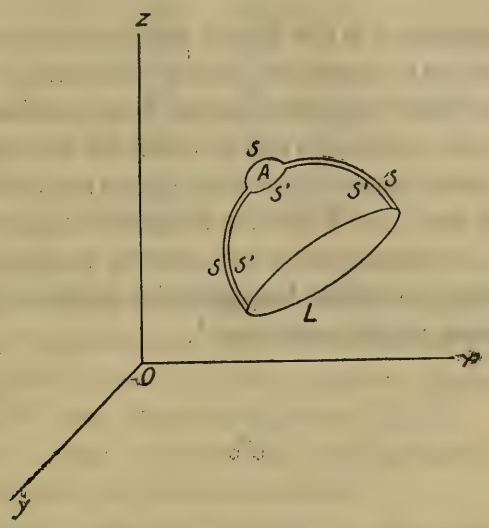


Figura 44.

Aplicando á este caso la fórmula anterior, no quedará en el segundo miembro más que un elemento de volumen, ó sea,

$$\int\int_{S+S'} K_n d\sigma = \left(\frac{dK_x}{dx} + \frac{dK_y}{dy} + \frac{dK_z}{dz}\right) dx\, dy\, dz.$$

Y como hemos dicho, que para que se verifique la condición que vamos estudiando, es preciso, que el flujo que expresa el primer miembro sea o, tendremos que también será *condición necesaria* que la divergencia se anule para todos los puntos del campo de vectores.

Tendremos, pues, que para que los vectores K cumplan con la condición de igual flujo, para todos los puntos del campo deberá verificarse

$$\frac{dK_x}{dx} + \frac{dK_y}{dy} + \frac{dK_z}{dz} = o$$

ó bien

$$\text{div. } K = o.$$

Esto comprueba lo que hemos visto anteriormente al hacer constar que un campo de vectores torbellinos era el campo de *igual flujo;* expresándonos en forma concisa.

Resulta de lo expuesto que tal condición es condición necesaria, y ahora vamos á demostrar que es una condición suficiente; es decir, que si para los vectores de un campo la divergencia es constantemente nula, dichos vectores darán un flujo constante para todas las superficies continuas que pasen por una línea cerrada cualquiera L.

***

Para demostrar esto último haremos ver, que si la divergencia de los vectores K de un campo es nula para todos los puntos de dicho campo, es decir, si se tiene para todos estos puntos,

$$\frac{dK_x}{dx} + \frac{dK_y}{dy} + \frac{dK_z}{dz} = o,$$

el vector K podrá ponerse bajo forma de un vector torbellino de muchas maneras.

Y es claro, que si el vector K toma la forma de vector torbellino, según lo que demostramos al principio de esta conferencia, cumplirá con la condición de dar un flujo constante.

En suma, si los vectores K cumplen con la condición

$$\text{div. } K = o,$$

siempre se podrán determinar, y de muchas maneras, tres

funciones de x, y, z, que llamaremos P, Q, R y que cumplan con las condiciones,

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = K_x,$$

$$\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} = K_y, \qquad (1)$$

$$\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} = K_z;$$

ó de otro modo: si la divergencia de K es constantemente nula, puede considerarse á K, y de muchas maneras, según antes decíamos, como un vector torbellino engendrado por un vector W cuyas componentes sean P, Q, R.

Tratemos, pues, de resolver las tres ecuaciones (1).

Y empecemos por un caso particular.

Designemos como hace Mr. Apell, á quien seguimos casi puntualmente en esta demostración, por P_1, Q_1, R_1, tres valores particulares de P, Q, R, y supongamos además $R_1 = o$, ó bien $R_1 =$ constante.

Las tres ecuaciones (1), se convertirán en

$$-\frac{dQ_1}{dz} = K_x,$$

$$\frac{dP_1}{dz} = K_y,$$

$$\frac{dQ_1}{dx} - \frac{dP_1}{dy} = K_z.$$

Veamos si es posible buscar por P_1 y Q_1 valores en x, y, z que satisfagan dichas ecuaciones.

La ecuación

$$\frac{dP_1}{dz} = K_y$$

puede considerarse como una diferencial ordinaria en que la variable independiente es z y la función P_1.

Integrando esta ecuación, y tomando como límite inferior z_0 tendremos

$$P_1 = \int_{z_0}^{z} K_y(x, y, z)\, dz.$$

Este valor de P_1 satisfará evidentemente á la segunda ecuación.

Podemos hacer una cosa análoga con la primera,

$$-\frac{dQ}{dz} = K_x$$

ó bien,

$$\frac{dQ}{dz} = -K_x(x, y, z).$$

También es una ecuación diferencial en que la variable independiente es z y la función Q_1, é integrando tendremos.

$$Q_1 = -\int_{z_0}^{z} K_x(x, y, z)\, dz.$$

Como hemos integrado con relación á z, la x, y han debido considerarse como constantes, de modo, que todavía podemos agregar al segundo mienbro una función arbitraria de x, y, que designaremos por $\varphi(x, y)$. Así resulta

$$Q_1 = -\int_{z_0}^{z} K_x(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y).$$

Este valor de Q satisfará, evidentemente, á la primera ecuación, como el anterior valor de P satisfacía la segunda, porque, es claro, que al diferenciar con relación á z, la función φ desaparece.

Realmente al obtener el valor de P, también pudimos introducir otra función arbitraria; pero con la última nos basta para nuestro objeto.

Hasta ahora tenemos valores de P_1 y Q_1 que satisfacen á las dos primeras ecuaciones.

Veamos si estos valores, merced á la función arbitraria que hemos introducido, pueden satisfacer á la tercera ecuación,

$$\frac{dQ_1}{dx} \quad \frac{dP_1}{dy} = K_z.$$

Sustituyamos para ello los valores obtenidos,

$$P_1 = \int_{z_0}^{z} K_y(x, y, z)\, dz$$

$$Q_1 = -\int_{z_0}^{z} K_x(x, y, z) + \varphi(x, y)$$

y tendremos,

$$\frac{d\left[-\int_{z_0}^{z} K^x(x, y, z)\, dz + \varphi(x, y)\right]}{dx} - \frac{d\int_{z_0}^{z} K_y(x, y, z)\, dz}{dy} = K_z$$

que se reduce á

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{dK_x}{dx}\, dz + \frac{d\varphi}{dx} - \int_{z_0}^{z} \frac{dK_y}{dy}\, dz = K_z$$

y reuniendo las dos integrales

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{dK_x}{dx} + \frac{dK_y}{dy}\right) dz + \frac{d\varphi}{dx} = K_z$$

Pero la condición de que la divergencia del vector K es nula, es decir,

$$\frac{dK_x}{dx}+\frac{dK_y}{dy}+\frac{dK_z}{dz}=o,$$

nos da

$$-\frac{dK_x}{dx}-\frac{dK_y}{dy}=\frac{dK_z}{dz};$$

y sustituyendo

$$\int_{z_0}^{z}\frac{dK_z}{dz}dz+\frac{d\varphi}{dx}=K_z.$$

La integral indefinida del primer término, es evidentemente K_z, de modo que tendremos

$$K_z(x,y,z)-K_z(x,y,z_0)+\frac{d\varphi}{dx}=K_z(x,y,z)$$

de donde

$$\frac{d\varphi}{dx}=K_z(x,y,z_0)$$

y

$$\varphi=\int_{x_0}^{x}K_z(x,y,z_0)\,dz,$$

que se efectuará por una cuadratura.

Hemos obtenido, pues, tres funciones pariiculares

$$P_1=\int_{z_0}^{z}K_y(x,y,z)\,dz,$$

$$Q_1=-\int_{z_0}^{z}K_x(x,y,z)\,dz+\varphi(x,y),$$

$$R_1=o \quad \text{ó bien} \quad R_1=\text{constante}$$

que satisfacen á las tres ecuaciones del problema

$$\frac{dR}{dy} - \frac{dQ}{dz} = K_x,$$

$$\frac{dP}{dz} - \frac{dR}{dx} = K_y,$$

$$\frac{dQ}{dy} - \frac{dP}{dy} = K_z;$$

de modo que

$$\frac{dR_1}{dy} - \frac{dQ_1}{dz} = K_x,$$

$$\frac{dP_1}{dz} - \frac{dR_1}{dx} = K_y,$$

$$\frac{dQ_1}{dx} - \frac{dP_1}{dy} = K_z.$$

Restando ordenadamente de las tres primeras ecuaciones las tres últimas, resultará:

$$\frac{d(R - R_1)}{dy} - \frac{d(Q - Q_1)}{dz} = o,$$

$$\frac{d(P - P_1)}{dz} - \frac{d(R - R_1)}{dx} = o,$$

$$\frac{d(Q - Q_1)}{dx} - \frac{d(P - P_1)}{dy} = o.$$

Estas tres últimas ecuaciones demuestran que $P - P_1$, $Q - Q_1$, $R - R_1$, con tal que sean las derivadas con relación á x, y, z de una función cualquiera $U(x, y, z)$ satisfarán á las tres ecuaciones anteriores.

Será, pues, solución de dichas ecuaciones, y por lo tanto de las ecuaciones (1) el sistema

$$P - P_1 = \frac{dU}{dx},$$

$$Q - Q_1 = \frac{dU}{dy},$$

$$R - R_1 = \frac{dU}{dz},$$

siendo U una función completamente arbitraria, puesto que se reducirán á

$$\frac{d^2 U}{dy\,dz} - \frac{d^2 U}{dy\,dz} = o,$$

$$\frac{d^2 U}{dx\,dz} - \frac{d^2 U}{dz\,dx} = o,$$

$$\frac{d^2 U}{dx\,dy} - \frac{d^2 U}{dy\,dx} = o.$$

Tendremos, pues, para las soluciones que buscamos:

$$P = P_1 + \frac{dU}{dx}$$

$$Q = Q_1 + \frac{dU}{dy}$$

$$R = R_1 + \frac{dU}{dz}.$$

Dichos valores de P, Q, R serán la solución más general de las ecuaciones (1), y como contienen la función arbitraria U, resulta que de infinitas maneras se puede representar el vector K por un vector torbellino; y de infinitas maneras también, el vector K dará un flujo constante para todas las superficies S que pasen por la línea L.

Pero observemos, que aunque la forma en que pongamos K contenga U, el valor del flujo será único y perfectamente determinado.

Determinado, decimos, no en función de P, Q, R, sino de P_1, Q_1, $R_1 = o$.

En efecto, según el teorema de Stokes, el valor del flujo, es la integral del trabajo de P, Q, R á lo largo de L.

Así, tendremos, que este valor del flujo será,

$$\int_L (Pdx + Qdy + Rdz),$$

que se convierte en

$$\int_L \left(P_1 + \frac{dU}{dx}\right) dx + \left(Q_1 + \frac{dU}{dy}\right) dy + \left(R_1 + \frac{dU}{dz}\right) dz$$

ó bien

$$\int_L (P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz) + \int_L \left(\frac{dU}{dx}\, dx + \frac{dU}{dy}\, dy + \frac{dU}{dz}\, dz\right).$$

La última integral es $\int_L dU$ que será U, en que habrá que sustituir las coordenadas de los puntos extremos de la integración y restar los resultados.

Pero como los puntos extremos coinciden, porque la línea es cerrada, dicha integral se anula, y queda para valor determinado del flujo

$$\int_L (P_1\, dx + Q_1\, dy + R_1\, dz).$$

Lo mismo da que pongamos $R_1 = 0$ que $R_1 =$ constante, porque en el primer caso desaparece, y en el segundo tenemos

$$\int_L R_1\, dz = R_1 \int_L dz = R_1 (z)_L$$

en que el último paréntesis es nulo porque los valores extremos de z son iguales porque coinciden.

Observemos que hemos podido obtener este resultado porque la divergencia de K era nula, y la sustitución de

$$-\frac{dK_x}{dx}-\frac{dK_y}{dy} \quad \text{por} \quad \frac{dK_z}{dz}$$

nos ha permitido integrar la expresión que resultaba.

De no ser así, no hubiéramos podido continuar los cálculos.

Hemos terminado, pues, las aplicaciones analíticas más elementales del teorema de Stokes, y en la conferencia próxima haremos alguna aplicación de dicha fórmula á problemas fundamentelas de la Física matemática.

LII.—Acción biológica del calcio y del magnesio.

Por el Dr. D. José Gómez Ocaña.

Resumen de una Conferencia explicada en la Facultad de Medicina de Burdeos el día 3 de Junio de 1910 (*).

Las nuevas ideas y los modernos métodos de investigación prestan actualidad é interés á cuestiones que se habían resuelto simplemente en épocas no muy lejanas. No hace mucho tiempo, en efecto, aunque se conocían al *Ca* y al *Mg* como elementos constituyentes del organismo, se consideraba al primero con el papel mecánico de prestar solidez al esqueleto, y nada positivo se sabía de la acción fisiológica del magnesio. El sulfato de magnesia era y es uno de los más conocidos purgantes; pero todo lo demás se ignoraba, incluso la toxicidad de las sales de magnesia y de cal, pues ni las unas ni las otras se mencionan, como venenos en las obras clásicas de Toxicología.

Hoy poseemos datos para contemplar el problema en su mayor complicación: por ello, y por la relativa novedad de estos estudios, pensaba en la acción biológica del *Ca* y del Mg como tema de esta conferencia, y me decidieron dos razones.

Era, la primera, que al tratar de la acción biológica del *Mg* se ofrecía ocasión, para mi muy grata, de rendir público homenaje y justo elogio al sabio ilustre que es Profesor de

(*) Esta conferencia fué ilustrada con proyección de diapositivas que se sustituyen con grabados en este resumen. También se añaden algunos datos adquiridos en posteriores investigaciones.

Fisiología en la Facultad de Medicina de la Universidad de Burdeos, ya que se le puede considerar como iniciador de nuestros actuales conocimientos relativos á la acción fisiológica del magnesio. El Profesor Jolyet, en colaboración con Cahours (1), indicó el primero, en 1869, la acción paralítica ó curarizante de las sales de magnesia. Mucho después, en 1906, el mismo sabio (2) ha demostrado que se deben á las sales de magnesia los efectos inhibitorios que ejerce sobre el corazón el agua marina, empleada como líquido de circulación artificial.

La otra razón que me decidió por este tema fué la de haberle tratado en uno de sus aspectos en otra ocasión, en el primer Congreso que celebró en Zaragoza la Asociación española para el progreso de las ciencias (3): llevo muchos meses investigando en el Laboratorio de Fisiología de mi cargo la acción biológica de las sales de cal y de magnesia, primero sobre el intestino aislado, y luego en inyecciones subcutáneas, intraperitoneales é intravasculares en perros, conejos y ranas. Aunque modestos, tengo el gusto y el honor de ofrecer los resultados de mis últimos experimentos.

El *Ca* y el *Mg* son elementos biogénicos, y como tales constituyentes de los tejidos y humores del organismo.

La mayor cantidad de cal corresponde á los huesos, que la contienen en la proporción de 36,74 $^0/_0$, es decir, casi una tercera parte de su peso, y la menor proporción toca al cerebro 0,02 $^0/_{00}$ (Geogheagan): en la sangre oscila entre 0,173 $^0/_{00}$ (Schmidt) y 0,07 $^0/_{00}$ (Bunge), prácticamente algunos centígramos por litro. En los músculos, la proporción es algo mayor, 0,46 $^0/_{00}$, y en la leche humana, en la primera quincena después del parto, es de 0,0301 $^0/_0$, según Sikes (4), y puede llegar á 0,035 $^0/_0$ (Bunge). La mitad del calcio de la leche se encuentra bajo la forma de una combinación disociable de caseinógeno, según desmostraron Rona, Peter y Meichaelis (5).

Las proporciones de *Mg* en el organismo son más peque-

ñas. Para Schmidt, el óxido de magnesio figura en el plasma de la sangre, en la proporción de 0,025 $^0/_0{}^0$ y en los músculos, según cálculos de Bunge, 0,412 $^0/_0{}^0$ ó 0,37 $^0/_0{}^0$ (Katz). Allá se van las proporciones del *Ca* y del *Mg* en el tejido nervioso, ya que el último alcanza á 0,07 $^0/_0{}^0$; sin embargo, para Aloy (6), el *Mg* predomina sobre el *Ca* en los glóbulos de los tejidos nobles de la economía.

Dejando aparte la cal de los huesos que, evidentemente está depositada en ellos con fines mecánicos, es de notar la pequeñísima proporción de estos metales en la sangre, en los músculos y en el tejido nervioso. Y sin embargo, la acción dinámica es enorme para el *Ca* en dosis mínimas, verdaderamente homeopáticas, como logré demostrar en el intestino aislado del conejo. Enseguida veremos que le sigue en actividad el *Mg* y ello hace pensar que la virtud de estos metales no está en la masa, sino que, como indicó Sabbatani, está en la concentración del *Ca*-ion, ó mejor, como apuntan Lœb y Osborne, en el cambio de electrolitos á través de la membrana celular, ya desde el líquido de la célula al plasma ambiente, ya en sentido contrario. Estos cambios de iones entre los líquidos protoplasmáticos é inter-celulares traen como consecuencias cambios de concentración y modificaciones físicas, químicas y fisiológicas.

La importancia biológica del *Ca* y del *Mg* aparece desde otro punto de vista cuando se advierte su difusión por las aguas y por los terrenos: el agua marina, que sustenta inmensa y variada fauna, contiene notables proporciones de *Ca* y de *Mg* (2 moléculas de $Ca\ Cl_2$ por 100, moléculas de *Na Cl*, según Lœb), é igualmente figuran el calcio y el magnesio en el líquido nutritivo vegetal de Sachs, en el de Raulín y en el modificado por Hédon-Fleig (7), para mantener la actividad de los órganos animales aislados. El $Ca\ Cl_2$ entra en la composición de la mayoría de los líquidos nutritivos, afirmándose por esta predilección, la más importante función biológica del *Ca* sobre la del *Mg*.

El *Ca* y *Mg* se ganan y pierden, respectivamente, por la alimentación y las secreciones, y según Goitein (8), los músculos y los nervios se enriquecen ó empobrecen en estos dos metales, según que abunden ó escaseen en la alimentación; mas el antagonismo entre estos dos cuerpos se manifiesta ya, aunque no recíprocamente, en los cambios nutritivos. Parece, á juzgar por las investigaciones de Malcolm, Lafayete, Mendel y Stanley R. Benedict (9), que la ingestión ó inyección de sales solubles de magnesio hace perder calcio á los animales; en cambio, según Malcolm, las sales solubles de calcio no influyen en la execreción del magnesio.

Las necesidades del *Mg*, del organismo adulto, se aproximan á 0,45 grm.; la execreción oscila entre 0,384 y 0,412. Por el intestino se elimina el *Mg* en la proporción de 0,064 (Renwall, 10).

Por lo que hace al metabolismo proteico, la acción del *Mg* es poco notable, pues aparte de sus efectos diuréticos y purgantes sólo se ha notado administrando sus sales á los perros, pasajero aumento de amoníaco en la orina bajo la forma de fosfato-amoníaco-magnesiano (Steel, 11).

Más interesantes son los datos que poseemos sobre el metabolismo del *Ca*, pues sin contar sus combinaciones proteicas en la leche, conocemos su papel en la coagulación de este líquido, y en la de la sangre, y otros hechos que se refieren á su función en los músculos y en los nervios.

Ya Virchow y Brücke llamaron la atención sobre la presencia y riqueza de *Ca* en las cenizas de la fibrina; después Hammarsten observó la acción coagulante del $Ca\ Cl_2$, y Arthus y Pagés confirmaron la influencia de las sales de cal en la coagulación de la sangre, que se impide con la adición de sales que las precipiten (oxalatos y fluoruros). Pekelharing llegó á la misma demostración con inyecciones intravenosas de peptona, que también fijan las sales de cal, y aunque la acción de las proteosas es muy compleja, el sabio últimamente citado juzgó que la núcleo-albúmina se combinaba

con las sales de cal para constituir la trombina, y una vez formado este fermento, transfería el calcio al fibrinógeno para producir la fibrina. Resultaba así, la fibrina, como un compuesto proteico de cal; mas cuando se averiguó que el calcio era preciso para la coagulación, no por su masa, sino por su virtud dinámica, y se demostró por Sabbatani (12) que si las sales de sosa impiden la coagulación es porque forman con las de cal compuestos insolubles, poco solubles ó poco disociables, es decir, que funcionan aprisionando el *Ca* y disminuyendo la concentración del *Ca*-ion en la sangre, se concluyó, en definitiva, que es virtual la acción de este metal, y también indirecta, puesto que no influye en la constitución de la fibrina, sino en la formación preliminar del fermento ó trombina. Este punto de vista conviene con la demostración que debemos á Schmidt y á Hammarsten que la fibrina no es más rica en cal que el fibrinógeno, y concuerda también con las investigaciones de Delezenne (13) acerca de la intervención del *Ca* en la activación del tripsinógeno. Así como la cal interviene en la constitución de la trombina, contribuye también, según el fisiólogo últimamente citado, á la activación del tripsinógeno, ó sea á su transformación en tripsina.

Por lo que hace á la coagulación de la leche, opinan Hammarsten y Ringer que la cal actúa sobre la caseína soluble y la coagula; para comprender esta acción conviene advertir que estos autores suponen una operación preliminar, ó sea la conversión del caseinógeno en caseína soluble mediante el fermento.

Rabouteau comparaba por su acción fisiológica las sales de cal á las de potasa, y en apoyo de este supuesto probó que la solución de $Ca\ Cl_2$ hacía contraer vivamente á los músculos, paralizándolos después; en inyección intravenosa esta sal mata rápidamente á los animales, probablemente por parálisis cardiaca. Sabbatani (14) atribuye al *Ca* una acción moderadora, y Row (15), que ha estudiado los efec-

tos de $Ca\ Cl_2$ sobre los músculos estriados y lisos, afirma que el calcio acorta el período latente y al principio aumenta la altura de la contracción para disminuirla después.

Curzi (16) se pregunta si serán inhibitorias las sales de calcio en vista de la disminución de los reflejos y de las parálisis que se observan en los mamíferos cuando se las administra en inyecciones intravenosas. El sabio italiano admite una acción tóxica local del calcio sobre los músculos, y atribuye á otra acción deprimente sobre la circulación la disminución de los reflejos que se observa en las ranas cuando se las inyecta el hipofosfito de cal á la dósis de 5 á 10 centígramos. Apunta el citado experimentador que los batracios intoxicados con el calcio conservan los movimientos voluntarios, como conservan la conciencia los perros paralíticos por intoxicación cálcica.

Lœb (17) afirma la precisión de cierta proporcionalidad entre las concentraciones del ion Na y el ion Ca $\left(C: \frac{C.\ Na}{C.\ Ca}\right)$ para que puedan realizarse los contracciones rítmicas de los músculos. Un cambio de cationes monovalentes (Na ó K) por otros bivalentes (Ca ó Mg), y á la inversa, es necesario para la función normal de los músculos; y como las plantas carecen de ellos, pueden pasarse sin $Na\ Cl$. Las sales de magnesia, como las de cal, impiden, en opinión de Lœb, la acción excitante del $Na\ Cl$ sobre los músculos, y si los de nuestro cuerpo no se contraen como el corazón, lo debemos á las sales de magnesia y de cal de nuestra sangre (18) que contrarrestan ó moderan la excitación causada por la sal común. En suma, los más de los investigadores se inclinan á considerar como moderadoras é inhibitorias á las sales de cal.

Nuestras personales investigaciones discrepan de estas conclusiones, y las contradicen en lo que se refiere á la acción excitante del $Ca\ Cl_2$ sobre el intestino aislado del conejo y sobre los músculos de la rana. Irrigando el nervio ciático

con la disolución $\frac{N}{10}$ antes y depués de haberlo regado con disolución $\frac{N}{10}$ de $Na\ Cl$ se observan contracciones espontáneas de los músculos gemelos, con marcada tendencia rítmica y tetánica. Pudieran atribuirse á la acción deshidratante de las disoluciones sobre el nervio y hay fundamento para creerlo, dado que nosotros las hemos observado por irrigación del ciático con disoluciones normales y al 25 % de $Na\ Cl$, y con disoluciones al 25 % de $SO_4\ Mg$; más no las hemos conseguido con las disoluciones normales de $Mg\ Cl_2$, lo que prueba que algún otro factor además de la deshidratación influye en el fenómeno. Regando el nervio y mejor aún, inyectando las disoluciones salinas en el saco dorsal, hemos observado, de acuerdo con otras distintas investigaciones de Bancroft (19), que responden los músculos de dos maneras á la corriente galvánica; unas veces sólo á la abertura y cierre del circuito y otras con contracciones rítmicas; mientras está pasando la corriente (influencia del potasio) ó al interrumpirse (acción del calcio).

Nosotros obtuvimos contracciones peristálticas espontáneas y verdaderamente enormes (figura 1.ª), adicionando dósis minúsculas (0,0066 %) de $Ca\ Cl_2$ al líquido de Hédon-Fleig, en el que se mantenían las contracciones de un trozo de intestino delgado del conejo (Gómez Ocaña, loc. cit.). No es maravilla la acción de Ca en dosis tan minúsculas, dado que Ralph S. Lillie ha obtenido efectos evidentes en el restablecimiento de la contractilidad de las larvas de la arenícola, con la adición del $Ca\ Cl_2$ en disolución $^{m}/_{25.600}$

Irrigando directamente los músculos con el $Ca\ Cl_2$ ó inyectándolo á los animales, hemos advertido en las ranas que las contracciones que aumentan mucho al principio, decrecen rápidamente después; pero lo que llama la atención, sobre todo por el contraste con los ergogramas obtenidos bajo la influencia del magnesio, es que, por virtud del calcio, se

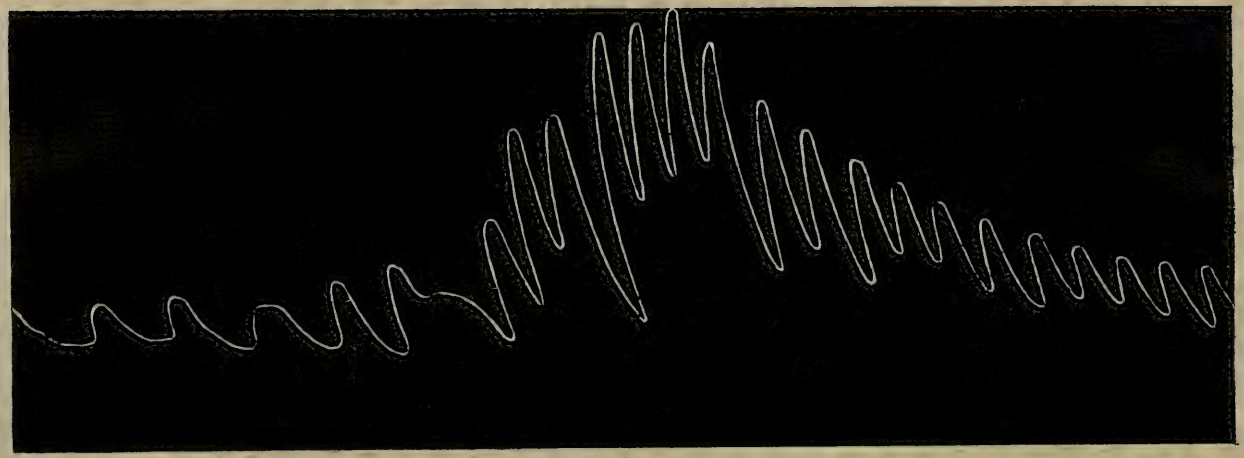


Figura 1.ª

Contracciones peristálticas del intestino aislado del conejo, exagerados por la adición de líquido nutritivo de una dosis mínima de $Ca\ Cl_2$.

muestran los músculos infatigables ó muy resistentes á la fatiga. Esta resistencia á la fatiga se demuestra con el miograma de la figura 2.ª, que corresponde á los gemelos

Figura 2.ª

Gráfica reducida de un miograma de los gemelos de la rana, destinada á demostrar cómo los músculos, influídos por el $Ca\ Cl_2$, resisten á la fatiga.

de una rana que había sufrido una inyección de $^1/_4$ de cent°. de la disolución $\frac{N}{10}$ de $Ca\ Cl_2$; la excitación galvánica del nervio se obtenía por una pila seca, en cuyo circuito se intercaló como interruptor un metrónomo; el músculo soportaba un peso de 150 gramos. Ofrezco como contraste otro miograma del gemelo de una rana inyectada con el sulfato de magnesia (figura 3.ª). Nótese en este miograma cómo alternan las contracciones grandes con las pequeñas, y lo que es

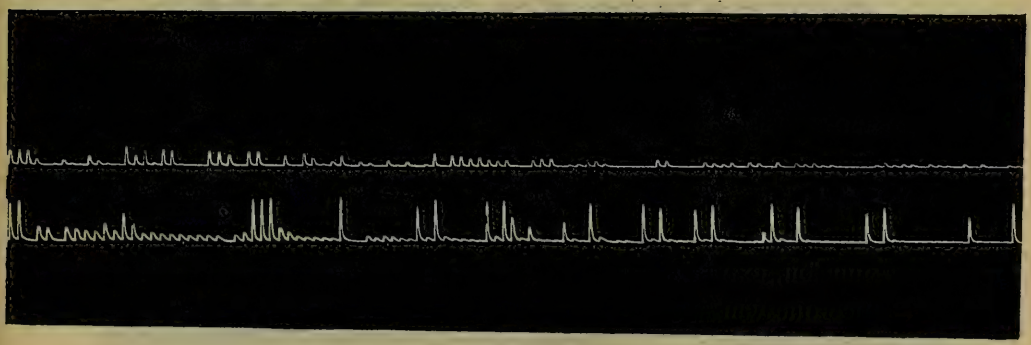


Figura 3.ª

Dos curvas de fatiga de los gemelos de la rana, una y otra reducidas de tamaño; la superior es el término de un ergograma normal; la inferior de otro ergograma bajo la influencia de una inyección en el saco dorsal de $^1/_4$ de cent. cúb. de la disolución N de $Mg\ Cl_2$

más importante, que desde el comienzo del ergograma faltan algunas contracciones, como si el músculo padeciera una fatiga precoz.

Todas las investigaciones convienen en que cierta concentración del ion-*Ca* es indispensable en la función de los protoplasma, y singularmente en los nervios y en los músculos. Bancroft (20) demostró la influencia del *Ca*-ion en los fenómenos de galvanotropismo: cuando la concentración es mínima no se manifiestan; si aumenta un poco se manifiesta el anódico y si el aumento es considerable, el catódico. Armonizan estas conclusiones con la opinión de Lœb cuando atribuye los efectos electrotónicos de los nervios, por efecto de la corriente galvánica, á un decrecimiento del *Ca*-ion ó de *Mg*-ion en el cátodo y á su crecimiento en el ánodo (21). Busquet y Pachon (21), por su parte, demostraron que el *Ca* es necesario para el ejercicio de la función inhibitoria del vago, y, sin embargo, Auer y Meltzer (22) encontraron fuertemente disminuída ó abolida la excitabilidad del vago cardiaco en los animales normales, tratados con la solución cálcica $^{m}/_{8}$. Es de notar que, por oposición, se conserva la irritabilidad de los demás nervios motores incluso los que el vago da al esófago. Gautrelet (23), por otro método, el de la disociación de los cloruros, por electrolisis, ha probado en la rana que á causa del calcio aumenta la amplitud de las contracciones del corazón cuanto disminuye su número: en un caso las pulsaciones descendieron de 56 á 28; mas se duplicó su altura.

El exceso de *Ca*, sin embargo, puede influir desfavorablemente en el metabolismo de los tejidos y oponerse á su función, explicándose así la parálisis de las fibras del simpático que van á mandar la dilatación de la pupila (24); pero es de advertir que al propio tiempo que disminuye la irritabilidad de las fibras midriáticas ó pupilo-dilatadoras del simpático por virtud de las sales del calcio, éstas estimulan el esfínter pupilar y muy probablemente también las fibras

nerviosas mióticas, dando por resultado la contracción máxima de la pupila observada por los citados autores en los animales que habían sufrido la inyección intravenosa de una solución $^{m}/_{8}$ de $Ca\ Cl_2$. Parece probable, en vista de esto, que no alcance el calcio la misma concentración en los elementos nerviosos simpáticos y cerebro-espinales.

Por los hechos de observación personal, antes apuntados, y por lo que hemos aprendido en investigaciones posteriores, opinamos que los fenómenos de parálisis ó simplemente depresivos observados por los autores, dependen de la dosis, pues cuando el calcio se administra en pequeñas proporciones, su acción es francamente excitante. Nosotros hemos inyectado muchas veces en las ranas los cloruros de potasio, calcio y magnesio, y siempre se distinguen los efectos del segundo, sobre todo, si se comparan los animales sometidos á su influencia de los que padecen la del $Mg\ Cl_2$.

A dósis muy pequeñas, el $Ca\ Cl_2$, aumenta la excitabilidad de los nervios y de los músculos, y nosotros hemos visto descender el dintel de la del nervio ciático en las ranas inyectadas previamente en el saco dorsal con disoluciones $^{m}/_{5}$ y $^{m}/_{10}$ de la mencionada sal. También hemos anotado que, bajo la influencia del $Ca\ Cl_2$, la excitación del nervio ciático produce en los músculos de la rana contracciones de cierre y abertura mucho más pequeñas éstas que aquéllas (figura 4.ª),

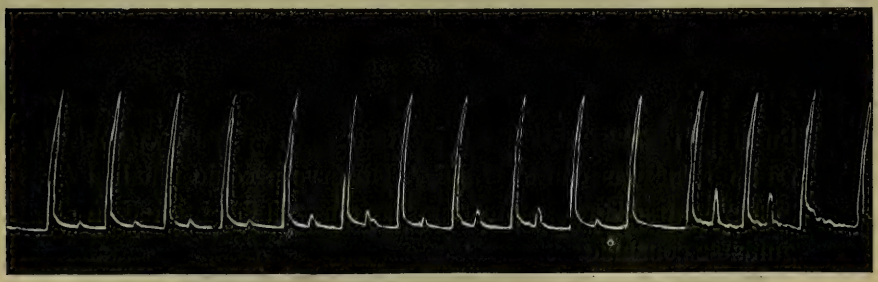


Figura 4.ª

Contracciones de cierre y abertura por excitación del ciático en una rana bajo la influencia del $Ca\ Cl_2$

pero con una tendencia rítmica (figura 5.ª) en las de abertura que contrasta con los efectos que hemos observado en las sales de potasa, por cuya acción las contracciones rítmicas se

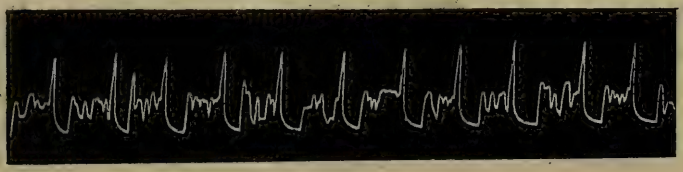


Figura 5.ª

Tendencia rítmica que se observa en las contracciones de abertura, por excitación del ciático, en una rana bajo la influencia del $Ca\ Cl_2$

producen al cierre del circuíto. Sin excitación eléctrica del nervio producen las ranas, tratadas con el calcio, contracciones rítmicas de carácter tetánico, como demuestra la figura 6.ª

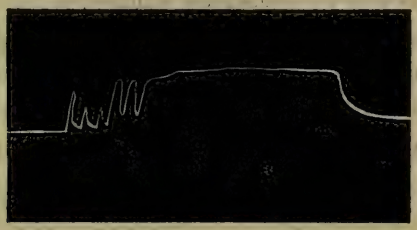


Figura 6.ª

Contracciones rítmicas observadas, en una rana bajo la influencia del $Ca\ Cl_2$

En la figura 7.ª se notan sólo contracciones de cierre en una rana intoxicadas con el $Ca\ Cl_2$. Obsérvese cómo faltan algunas contracciones, indicadoras de unas fatigas que en seguida se consumó.

Veamos ahora la acción fisiológica del magnesio.

Ya he indicado anteriormente que fueron el sabio Profesor de Fisiología de Burdeos y Cahours los que anticiparon

hace más de cuarenta años la acción paralítica ó curarizante de las sales de magnesia. Binet (25) logró repetir con ellas el experimento de *Cl.* Bernard, para demostrar en las ranas la acción exclusiva del curare sobre las terminaciones de los nervios motores, y variando la técnica para hacerla aplicable á los animales de sangre caliente, Wiki (26) logró análoga demostración. Es sabido que *Cl* Bernard exceptuaba el nervio ciático de la ligadura en masa de una de las ancas de una rana para evitar que la alcalzara, por la circulación, el veneno de las flechas inyectado en el saco dorsal; pues bien, Wiki cruzó las circulaciones entre la carótida y la yugular de un conejo (cuya sangre se había hecho incoagulable por la inyección de extracto de sanguijuelas) con la arteria y vena crurales de otro conejo que había de ser intoxicado con el SO_4 *Mg*, á fin de que el miembro correspondiente se librara de la intoxicación. El experimento demostró que se conservaban las movimientos en el miembro sustraído á la magnesia y podían ser provocados por la excitación refleja del nervio ciático de la otra pata.

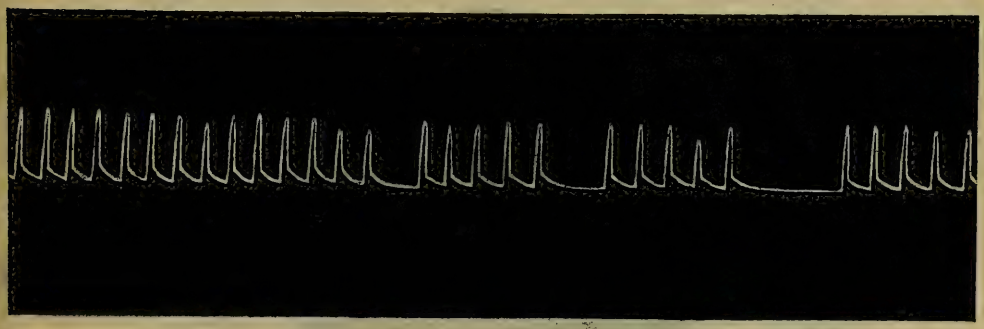


Figura 7.ª

Contracciones de cierre por excitación del ciatico en una rana intoxicada por la inyección en el saco dorsal de $^1/_2$ cent. cúb. de la disolución *N* de *Ca Cl*$_2$

Yo he repetido con éxito dudoso el experimento de *Cl.* Bernard en las ranas, y he sustraído un miembro á la acción del SO_4Mg, ya por ligadura en masa del anca con

excepción del ciático, ya separando el miembro y dejándole pendiente al tronco sólo por el mencionado nervio. En cambio he confirmado las observaciones de Binet en los mamíferos, y aunque no me decido por la acción exclusiva curarizante que seatribuye al *Mg*, la verdad es que la semejanza es notable entre los intoxicados por las sales de magnesia y los que sufren la acción del veneno de las flechas. He inyectado el sulfato de magnesia disuelto al 25 % y la disolución *N* del $Mg\,Cl_2$ y en el peritoneo de los conejos; esta última, á dosis variables de 2 á 10 cent.^{3} por kilogramo. Los síntomas, más ó menos graves, según la dosis, han sido siempre análogos. Inmediatamente después de la inyección, observamos polípnea que no puede atribuirse á la emoción operatoria de estos tímidos animales, porque no la padecen otros conejos á los que se inyecta otro líquido; cinco minutos después, se nota pereza en los movimientos, aunque todavia conserva el animal su habitual postura; á los diez minutos ya dobla las patas, porque no puede sostenerse en ellas, y aparece en la forma en que lo muestra la figura 8.ª, en la

Figura 8.ª

Dos conejos, el uno testigo se presenta en su actitud normal; el otro echado sobre el vientre y con los miembros relajados muestra la parálisis por la magnesia.

que, para mejor comprensión, le acompaña á los efectos del contraste otro conejo testigo. Entonces la respiración cambia á lenta y profunda, las pupilas no reaccionan á la luz, y aunque débiles, se observan los reflejos nasal y palpebral.

Este estado se agrava, la respiración se hace intermitente y al cabo cesa, siendo de notar que aun late el corazón cuando ya el animal no respira; pero si la dosis no es grande, las cosas no llegan á estos extremos, y los animales se reponen en dos ó tres horas.

Obsérvase que la parálisis en la intoxicación por las sales de magnesia, como en la del curare, es precoz para los miembros inferiores y tardía para los músculos de la respiración, é igualmente se nota que los movimientos cardíacos sobreviven á los respiratorios. Pero aquí acaban, en mi opinión, las analogías entre el envenenamiento por el curare y por el magnesio, porque la escasa reacción á los reflejos, que he observado en los conejos sometidos á la acción de las sales de magnesia y en las ranas decapitadas por sección del bulbo, puede explicarse también por el embotamiento de la sensibilidad.

Yo creo que el *Mg* actúa sobre el sistema nervioso motor; pero muy probablemente ejerce también su acción sobre el sensitivo, y aun alcanza al músculo su acción deprimente. Por esto me sitúo, no por comodidad sino por convicción, entre los autores antes citados y los que afirman la acción anestésica ó analgésica de las sales de magnesia. En esta situación intermedia se sitúan también Cristaux (27) y Delhaye y Curzi (28); el primero, deduce de sus investigaciones que las dichas sales no son anestésicas ni curarizantes, sino sencillamente depresoras del sistema nervioso central y del periférico, sólo que la depresión periférica es más precoz y predomina sobre los nervios sensitivos. Más categórico es Delhaye al afirmar que con las sales de magnesia desaparece la excitabilidad del sistema nervioso y la parálisis afecta rápida é intensivamente tanto el territorlo motor como el

sensitivo. Gautrelet, en su trabajo antes citado, confirma la acción tóxica del magnesio sobre los nervios del corazón. Curzi (29), que indica la acción curarizante del *Mg* en los batracios, la extiende en los mamíferos á los centros y á los nervios motores y sensitivos.

La acción anestésica de las sales de magnesia ha sido sustentada con mucho argumento experimental por Meltzer y Auer (30). Estos sabios han experimentado en la mayoría de los animales de laboratorio, y deducen conclusiones favorables á la acción anestésica de las sales de magnesia. Los efectos, cuando se agravan, pueden terminar por la muerte de los animales sin que en ningún momento se ofrezcan síntomas de excitación. Puedo ofrecer mi testimonio de la calma en que mueren los animales intoxicados con el *Mg*, y también de la falta completa de excitación, y convengo con aquellos autores en que faltan igualmente los síntomas de asfixia (dilatación pupilar, convulsiones, etc.); y, sin embargo, por parálisis respiratoria sucumben los animales intoxicados con las sales de magnesio, según se deducen de los experimentos practicados por Joseph y Meltzer (31) en los conejos. Estos investigadores inyectaron dósis mortales de sulfato de magnesia y de cloruro de bario respectivamente á dos conejos *A* y *C*: en otro conejo *B* inyectaron una dósis mortal de sulfato de magnesia en los músculos, y en las venas otra dósis análoga de cloruro de bario, y este conejo se salvó de la doble intoxicación, probablemente porque los dos venenos se neutralizaban recíprocamente impidiendo el bario la parálisis respiratoria mortal del magnesio. Es de notar, y lo advierten los citados autores, que el bario no impide ni la anestesia ni otros síntomas de la intoxicación magnesiana que se corrigen, como veremos más adelante con el calcio, también antagonista del magnesio.

También abundo con ellos, y contrariamente á lo afirmado por Mac-Callum, en la acción inhibitoria ó paralizante que las sales de magnesia ejercen respecto al peristaltismo intes-

tinal, según demuestra la gráfica de la figura 9.ª, que se refiere al intestino aislado del conejo en el líquido Hedon-Fleig, adicionado de $SO_4 Mg$ (32). He explorado las alteraciones

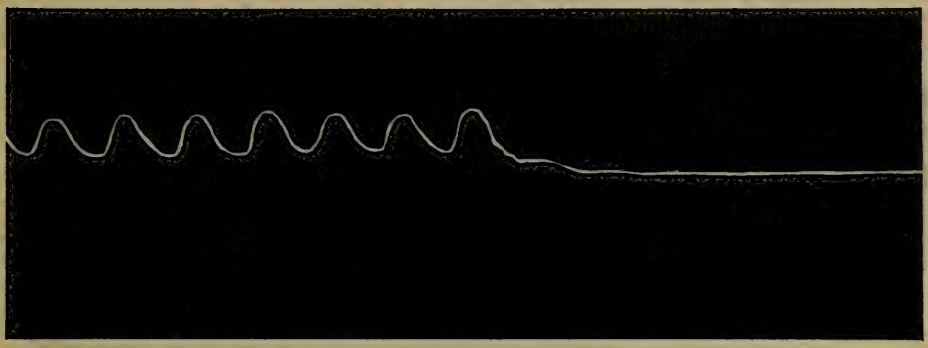


Figura 9.ª

Parálisis de las contracciones del intestino aislado del conejo por la adición de $SO_4 Mg$ al líquido nutritivo.

que sobrevienen en los movimientos respiratorios de los conejos sometidos á la acción de las sales de magnesia, y ofrezco dos pneumogramas obtenidos por el conocido método del frasco y previa traqueotomía: el primero señala la respiración normal, calma de los animales intoxicados; y el segundo, la respiración intermitente con pausas expiratorias que se observan poco antes de la muerte (figuras 10.ª y 11.ª). En este punto y en los efectos tóxicos de la magnesia nuestros experimentos coinciden con los de Macwillian (33).

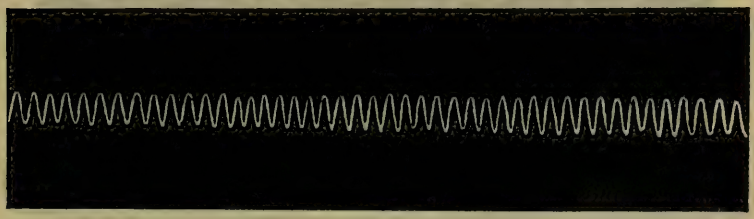


Figura 10.

Pneumograma de conejo inmediatamente después de haberle inyectado en el peritoneo, una dosis mortal de sulfato de magnesia.

En inyecciones intravasculares, los efectos tóxicos de las sales de magnesia son verdaderamente enormes, y la muerte sobreviene rápida, probablemente por parálisis cardíaca: cuando se pone en comunicación la carótida con un manómetro inscriptor observáse que la presión arterial baja rápi-

Figura 11.

Pneumograma del mismo conejo, al que se refiere la figura anterior, quince minutos después de la inyección del sulfato de magnesia. La respiración era irregular y se notaban pausas espiratorias.

damente hasta la muerte, no á la manera como lo hace cuando se inhibe el corazón excitando el vago, sino que es una baja progresiva y rápidamente mortal. Véase, al efecto, en la figura 12.ª, la caída rápidamente mortal de la presión arterial,

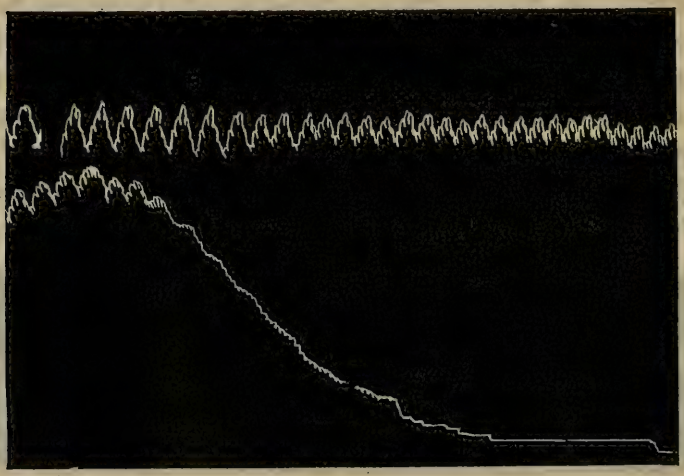


Figura 12.

Caída de la presión arterial en un perro por inyección intravascular de una dosis morta de magnesia. Las curvas superiores representan las oscilaciones hemomanométricas normales.

en un perro de 7 kilogramos, á causa de la inyección 14 cent. cub. de la disolución normal de $Mg\ Cl_2$ por la arteria femoral. Este experimento lo realizó, por encargo mío, mi antiguo discípulo, hoy Profesor auxiliar honorario, Sr. Medina.

Es curiosa la compatibilidad entre las funciones inhibitoria del magnesio y la que produce sobre el corazón la excitación del nervio pneumogástrico. Hemos excitado el vago en el cuello de un conejo previamente intoxicado por inyección intraperitoneal de $SO_4\ Mg$ y como demuestran los siguientes trazados cardio-respiratorios, la excitación produce los efectos cardio-inhibitorios que son de rigor en los animales normales, y tanto cuando se excita el vago íntegro como el cabo periférico después de la sección (figuras 13.ª, vago íntegro, y 14.ª, vagos seccionados y excitación del cabo periférico del derecho). La contra prueba también es positiva,pues Macwillian (loc. cit.) ha probado que los efectos inhib itorios de las sales de magnesia no se evitan con la sección del vago.

Figura 13.

Trazado cardio-respiratorio que demuestra los efectos de la excitación del vago íntegro en el cuello, en un conejo intoxicado con el $SO_4\ Mg$.

Aun no he podido comprobar la acción local interruptora de la conductibilidad nerviosa que Meltzer y Delhaye atribuyen á las sales de magnesia cuando se aplican sobre los nervios en solución concentrada; pero he observado que por

la acción de las sales de magnesia, localmente aplicadas al nervio ciático, se producen bajo la influencia de la corriente

Figura 14.

Trazado análogo al de la figura anterior, destinado á demostrar iguales efectos por la excitación del calbo periférico del vago derecho, en un conejo intoxicado con el SO_4 Mg.

galvánica, miogramas análogos á los obtenidos en ranas intoxicadas con inyecciones de sales magnesianas (figura 15).

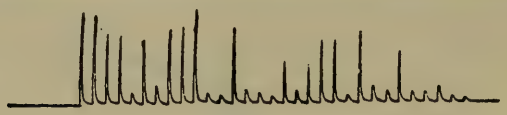


Figura 15.

Micgrama que demuestra los efectos locales de las sales de magnesia sobre el nervio ciático.

Los sabios americanos añaden que la acción local del *Mg* se hace efectiva más pronto sobre los nervios sensitivos que sobre los motores, y con ello conviene Delhaye; aquellos dicen también que los efectos locales del *Mg* sobre los nervios se disipan cuando se les lava con el líquido de Ringer.

Es necesario modificar el concepto de inocentes que gozaban las sales de magnesia, y si del SO_4 Mg no conocemos efecto alguno nocivo cuando se administra como purgante,

es porque no se absorbe ó porque se absorbe en pequeña cantidad. En cuanto á la acción purgante hay que volver la vista á aquellas teorías que la explicaban por mecanismo de osmosis, ó pensar con Mac-Callum en una excitación glandular ó secretoria; todo menos creer que el sulfato de magnesia purga por exageración del peristaltismo, pues como demostró Auer (34) y comprobamos nosotros, el sulfato de magnesia inhibe ó suspende las contracciones peristálticas del intestino (figura 9.ª).

Por irrigación directa del nervio con disoluciones normales de $Mg\ Cl_2$ no hemos visto contracciones; pero sí regándolo con disoluciones de SO_2, Mg al 25 %.

El magnesio se elimina principalmente por la orina, pues según Meltzer y Lucas (35), se aumentan en 50 por 100 los efectos tóxicos de las sales de magnesio en los conejos que acaban de sufrir inmediatamente la nefrectomía; pero aunque la principal, no es el riñón la única vía por donde aquéllas se eliminan, pues pasadas 18 horas de la nefrectomía, las dichas sales sólo producen una profunda anestesia. El intestino coadyuva á la eliminación.

La acción antagónica de las sales de cal y de magnesia, reconocida por varios investigadores, ha sido señalada muy singularmente por Meltzer y Auer (36). Antes he apuntado las diferencias entre los miogramas obtenidos bajo la influencia de las sales de uno y otro metal: recuérdese que el *Ca*, á dósis pequeñas, excita el tono dc los músculos, exagera la excitabilidad, y por lo mismo, dispone á la fusión de las sacudidas; el *Mg.*, por el contrario, favorece la relajación y disminuye ó abole la excitabilidad del sistema motor. Los miogramas bajo la influencia del calcio, cuando se somete el nervio á excitaciones galvánicas muy frecuentes, marcan la tendencia al tétanos; en los animales sometidos á las sales de magnesia, faltan las contracciones de abertura, y desde el comienzo de la excitación, ya lo he dicho, abortan muchas sacudidas. Es notable que en estos miogramas, como ya ob-

servó Bardier (37), alternan por su tamaño las contracciones con cierta regular desigualdad; las hay grandes y pequeñas, pero desde el comienzo se marca la intermitencia.

Meltzer y Auer han demostrado que el *Mg.* es un poderoso antagonista del *Ca.*, puesto que inyectando el primero en las venas disipa rápidamente los efectos tóxicos del segundo, siempre que se haya administrado en inyecciones subcutáneas y en dósis no muy considerables, que hagan inevitable el envenenamiento. Por mi parte he observado localmente el antagonismo, pues inyectando en el anca unas gotas de la disolución de $Ca\ Cl_2$ se restablecían las contracciones suspendidas por la acción del *Mg* según demuestra la figura 16.

Viniendo, ahora, á la explicación de estos fenómenos, conviene partir del supuesto establecido por Traube, que considera al recinto de cada célula como pequeño laboratorio químico, aislado de las vecinas células y del líquido ambiente, por la membrana; á través de ésta, sin embargo, comercia el protoplasma con los plasmas intercelulares, y es evidente que este comercio estará influído por la mayor ó menor permeabilidad de la membrana y por el grosor de las moléculas que hayan de atravesarla. Fijándonos en los músculos, podemos admitir con Lœb que ciertas condiciones físico-químicas son precisas para disponerlos á la contracción, y cuando ésta ocurre, sobrevienen cambios en la composición del protoplasma y modificaciones en sus propiedades físicas (viscosidad, fluidez, tensión superficial, etcétera); es muy probable que la calidad de las disoluciones influyan en el grado de permeabilidad de las membranas (Hœber, Overton) y que los iones ó electrolitos jueguen en los fenómenos físicos y químicos de la contracción muscular.

Lœb ofrece dos conjeturas: ó los electrolitos facilitan las fermentaciones y oxidaciones que se verifican en los músculos ó mantienen en el plasma cierto grado de fluidez y de concentración; mas en todo caso, se establece un cambio en-

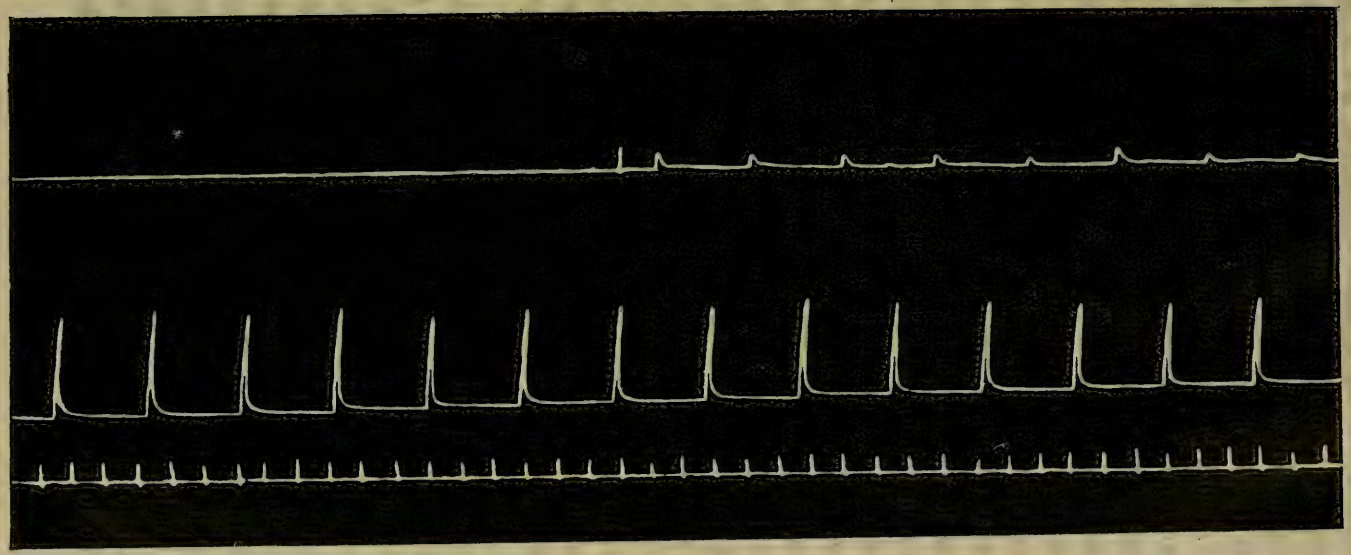


Figura 16

El miograma inferior corresponde á los gemelos de una rana normal. La gráfica muestra en su primer superior mitad la suspensión de las contracciones por el magnesio y en la segunda la reaparición de las contracciones por virtud del $Ca\ Cl_2$.

tre los electrolitos de los líquidos celulares é intercelulares. Ya he indicado la opinión del fisiólogo americano respecto al cambio entre los cationes monovalentes (*Na* y *K*) y los bivalentes (*Ca* y *Mg*); mas también del comercio de electrolitos podrá resultar la liberación de ciertos iones aprisionados en combinaciones orgánicas, probablemente proteícas, del protoplasma. Cualquiera que sea el metabolismo, siempre habrá que convenir, con Osborne (38), en que no pasarán por la membrana con igual facilidad las moléculas complejas y los simples iones; aquéllas, gruesas y coloides, se quedarán retenidas en las células y atravesarán la membrana los simples electrolitos, lo mismo del interior al exterior, que en sentido contrario. Admitiendo, también con Lœb y Osborne, que las bases metálicas se encuentran combinadas en el protoplasma con aniones orgánicos constituyendo jabones, núcleo-proteatos y globulinatos de sosa, cal y magnesia, solubles y disociables; la disociación da de sí un anión complejo (núcleoproteido, globulina, jabón, etc.) que permanece en la célula, y un catión simple que la abandona ó se cambia con otro que atraviesa la membrana de fuera adentro; pero si en el líquido intercelular no se encuentran los electrolitos que se necesitan para sustituir á los que se desgarraron de las células, la composición de estas se alterará con perjuicio de sus aptitudes fisiológicas.

De todo esto se deduce la necesidad, no sólo de una determinada concentración en el líquido nutritivo, sino también de idónea composición, ó en otros términos, no basta que el líquido sea isotónico con el de la célula, sino que es necesario que por su composición sea *isofisiológico* (Osborne). Así se explica que mate á una célula ó á un organismo la disolución isotónica de *Na Cl* puro, no porque sea tóxica la sal de cocina, sino porque faltando el *K*, *Ca* y *Mg*, estos iones son sustituídos por el *Na*, y por carecer de ellos se alteran la composición y funciones del protoplasma. Es sabido, Osborne lo recuerda, cuánto cambian las propiedades

físicas de los jabones con la simple sustitución de una base por otra.

Cada día más, las investigaciones hacen patente aquella intuición de los biólogos que hacía depender la normalidad de las funciones de la integridad físico-química del protoplasma; mas como este comercia constantemente con los plasmas nutritivos para atender al gasto funcional ó enérgico, se hace preciso cierta constancia en la composición química y en las propiedades físicas de los humores constituyentes. Así vemos mantenerse casi constante en su continua variabilidad, y no obstante las ganancias por absorción y las pérdidas por secreción, la composición de la sangre y la concentración molecular del plasma, é igualmente admiramos los varios y eficaces recursos que ejercitan los animales para conservarlas, y como resisten las más enérgicas tentativas para cambiarlas. D'Errico (39) ha observado cómo se mantienen constantes la presión osmótica y la conductibilidad eléctrica del suero de la sangre, en los perros, á pesar de la inanición, agravadas, á estos efectos, por la inyección de cerca de un litro de agua destilada, en unos casos, y en otros por la ingestión casi cuotidiana de 500 cent. cúb. de una disolución de sacarosa al 40 por 100. Con los medios más violentos, empleados con el fin de cambiar las condiciones físicas del suero, sólo se logran pasajeras oscilaciones de la presión osmótica, y al cabo los animales restablecen la concentración molecular de su primer humor. Probablemente el riñón es uno de los órganos que con más eficacia emplea la economía en esta función reguladora.

Los estudios modernos sobre la digestión y asimilación nos enseñan que la primera conduce á la segunda en cuanto prepara los alimentos para convertirlos en materiales propios del organismo consumidor, y, en su consecuencia, es lógico pensar que si éste cuenta con sus proteinas específicas y probablemente también grasas é hidratos de carbono propios, también poseerá su caudal salino, y que de lo uno y de

lo otro dependerá la constitución físico-química del protoplasma y el fiel cumplimiento de las funciones. Pero como son los metales los más afectados en los cambios celulares, dedúcese, en definitiva, la importancia de los cationes en la nutrición y los graves trastornos que se seguirá á su falta ó no adecuada sustitución, esto sin contar con la carga energética que pueden transportar, pues como ya indicamos al tratar del calcio pudiera ser muy bien dinámica la participación de los metales en los fenómenos de la vida.

BIBLIOGRAFIA

(1) J. Jolyet et Cohours. «Sur l'action physiologique des sulfates de potasse, de soude et de magnésie». Arch. de Physiol, 113. 1869.

(2) J. Jolyet. «Sur le magnesium du plasma sanguin et de l'eau de mer». Compt. ren. de la Soc. de Biol. LX, 553-1906.

(3) Gómez Ocaña. «Datos para el estudio del peristallismo intestinal». Comunicación al Cong. de la Asoc. Española para el progreso de las Ciencias, Zaragoza, 1908.

(4) A. W. Sikes. «On the phosphorus and calcium of human milk». Journ. of. Physiol. XXXIV, 464. 1906.

(5) Rona, Peter und Michaelis, Leonor. «Uber den Zustand des kalzium in der Milch». Bioch. Zeitschr, 21, 114-1909. Bioch. Central. Bd. IX, $^{7}/_{8}$, 283.

(6) I. Aloy. «Sur la repartition du calcium et du magnesium dans l'organismo du chien». Compt. rend. de la Soc. de Biol. LIV, 604. 1902.

(7) E. Hédon et C. Fleig. «Actions des sérums artificiels et du sérum sanguin sur le fonctionement des organes isolés des mamiferes». Arch. int. de Physiol. III, 95, 1905.

(8) S. Goitein. «Ueber den Eiufluss verschiedener Ca und Mg Jnfuhr auf den Umsatz un die Menge dieser Stoffe in tiérischen Organismus». Arch. f. d. ges. Physiol, CXV, 118, 1906. (Anl. de Dastre en el Journ. de Physiol et Path, 367. 1907).

(9) J. Malcolm. «On the inter-relationship of the calcium and magnesium excretion». Journ. of. Physiol, XXXII, 183-1905. Lafayet. B. Mendel and Stanley R. Benedict Thepaths of excretion for inorganie compounds. IV. The excretion et Magnesium». Am. Journ. of Phyriol. XXV, 2. 1909.

(10) G. Renwall. «Zür Kenntnis des Phosphor-Calcium-und Magnesiummsatres beinemerwardisenen Menschen». Skand. Arch. f. Physiol, XVI, 94-1904.

(11) M. Steel. «A study of the influence of mangnesium sulfate on metabolism . The Jours of. biol. chem. V, 85, 1908.

(12) L. Sabbatani. «Fonctions biologique du calcium. II.e partie: le calcium dans la coagulation du sang». Arch. ital. Biol. XXXIX, 333-1903.

(13) C. Delezenne. «Espériences relatives á l'activation du suc pancréatique par les sels de calcium». Sieb. Int. Physiol Congres. Heidelberg, 1907.

(14) L. Sabbatani «Fonction biologique du calcium. Action antagoniste entre le citratate trisodique et le calcium». Arch. ital Biol. XXXVI, 416, 1901.

(15) R. Row. «On some effects of the constituents of Ringer's cir.

culating fluid on the plain muscle of rana tigrina». Journ. of Physiol. XXX, 460, 1904.

(16) A. Curzi «Importance phisiologique et therapeutique des alcalins et des alcalins-terreux. XVIe Congr. intern. de med. Section V: F. 1.° p. 109. Budapest, 1909.

(17) J. Lœb. «La dynamique des phénoménes de la vie». Trad. de H. Daudin y G. Schæffer, p. 144, París, 1908.

(18) Idem id , id., id , pág. 184.

(19) Frank. W. Bancroft. On the influence of the relativa concentration et calcium ions on the reversal of the polar effects of the galvanic current in paramecium». Journ. of. Physiol. XXXIV, 444-1906.

(20) F. Bancroft «The electrical stimulation of. muscle as dependant upont the relative concentration of the calcium ions. Journ. of. Phisiol, XXXIX. 1, 1909.

(21) H. Busquet et V. Pachon. «Inhibition cardiaqne et sels de sodium en injection intravasculaire». Compt. rend. de la Soc. de Biol, LXVI, 127-1909. Idem, id. «Condition chimique nécesaire de l'inhibition cardiaque». Journ. de Physiol. et Path. gén. XI, 807-1909.

(22) Aner and Meltzer «The effects of calcium infusions upon the irritability of the heart vagus» Proc. of the Am. Physiol. Soc Am. Journ. of Physiol. XXIII-1909, p. XX.

(23) Jean Gautrelet. «Action sur le cœurs de certains ions métalliques introdouit par electrolyse dans la circul. de l'animal. Arch. d'eléctricité méd. n.° 228. Bordeaux 1907.

(24) Auer et Meltzer. «Ueber den Einflussdes calciums aut die Pupille». Centralbl. f. Physiol., XXII, 245, 1908. J. Auer and S. J. Meltzer. «The influence of calcium upon the pupil and the pupillo-motor fibres of the simpathetic nerve. Am. Journ. of. Physiol. XXV, 43 1909.

(25) Binet. «Recherches sur l'actión physiologique des métaux alcalins et alcalino-terreux». Rev. méd. de la Suiss. Rom., 523, 1892.

(26) B. Wiki. «Sur les propiétés pharmacodynamiques des sels de magnésium». Journ. de Physiol et Path. gén. VIII, 794-1906.

(27) X. Cristaux. «Des proprietés inhibitrices des sels de magnesium.» «Thése doctorat de la Faculté de Médecine de Lyon.» 1907.

(28) A. Delhaye. «L'anesthésie par les sels de magnésium.» Bull. de la Soc. roy. de Sc. méd. et nat. de Bruxelles. 1908.

(29) A Curzi. loc. cit. p. 120.

(30) S. I. Meltyer and J. Auer. «Physiological and pharma cological studies of magnésium salts.» «I. General anesthesia by subcutaneous injections.» Amer. Journ. ot. Physiol. XIV. Octb., 1905.

(31) R. Joseph and S. J. Meltzer. «The mutual antagonictic lifesavin action of barium and magnesium. A. Demostration. Proceeding of the Am. Physiol. Soc. Am. Journ. of Physiol. XXV. 1910.

(32) Meltzer and Auer. «Physiological and pharmacological studies of magnesium salts. IV. The relations of the salts to the peristaltis of the gastro-intestinal canal. Amer. Journ. of Physiol. XVII, 315, 1906.

Idem, íd. «Is the anesthesia and motor paralysis caused by magnesium salts due to asphyxia.» Amer. Journ. of Physiol. XXIII, 141, 1908.

Idem, íd. «The narcotizing effects of magnesium salts upon nerve-fibres.» Amer. Journ. of Physiol. XVI, 233, 1906.

(33) Macwilliam, etc. «Intravascular injection of the salts and of nucleo-proteid.» Journ. of Physial. XXX, 381, 1904.

(34) J. Auer. «The effect of subentaneus and intravenous injection of some saline purgatives upon intestinal peristatlis and purgation.» Amer. Journ. of Physiol. XVII, 15, 1906.

(35) Meltzer and Lucas (Rockefeller Iust. f. Med. Research). «Physiological and pharmacological studies of magnesium salts. V. The influence ot nephrectomie upon theirtoxicity.» Journ. At. Exp. Med. IX, 298, 1907.

(36) Meltzer und Auer. «Ueber die Bezichungen des Calcium zu den Hemmungs wirkungen des Magnesiums bei Tieren.» (Anl. de Lambert, Journ. de Physiol et Path. 523, 1908).

(37) E. Bardier. «Les sels de Magnesium et le systéme nerveux moteur periphérique.» Journ. de Physiol. et Path. gén. IX, 611, 1907.

(38) W. A. Osborne. «The so-called antitoxic action of divalent kations.» «Proceeding of the Physiological Society.» 1905.

Idem. «Intracellular colloidad salts.» Journ. of Physiol. XXXIV, 84, 1906.

(39) G. D'Errico. «Sulla regolazione della pressione osmotica negli organismi animali.» Arch. di Fisiol. VIII, 177, 1910.

LIII. — Estudio completo de una clase especial de integrales singulares.

(Continuación.)

POR LAURO CLARIANA

II

PROCEDIMIENTO ESPECIAL PARA OBTENER CIERTA CLASE DE INTEGRALES SINGULARES DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Según hemos manifestado ya, existen dos procedimientos para deducir la integral singular de la ecuación diferencial; empero, como queda demostrado por los ejemplos anteriores, ambos deben considerarse defectuosos.

El procedimiento debido á Lagrange, se funda en la igualdad de raices respecto á la derivada de la ecuación diferencial; mas como advierte Serret, con suma oportunidad, en el ejemplo $\frac{dy}{dx} = P \pm \sqrt{Q}$ ya citado, se comprende que la función $\varphi = o$, no satisfaga, en general, á $\frac{dy}{dx} = P$.

El segundo procedimiento, consiste en considerar

$$\frac{dy'}{dy} = \infty,$$

y conforme se ha manifestado, la función que satisface á esta condición no siempre representa la integral singular; además, si la ecuación diferencial es entera y racional, sabido es que la condición anterior supone que $\frac{dF}{dy'} = o$, siendo esta

la que se utiliza para recabar la integral singular; no obstante, si al eliminar y' entre $F = o$ y $\frac{dF}{dy'} = o$ resulta $\frac{dF}{dy} = o$, entonces $\frac{dy'}{dy}$ se presenta bajo la forma indeterminada, con lo cual no queda aún asegurada la integral singular sin nuevas investigaciones.

Para salvar estas dificultades, pueden considerarse cierta clase de integrales singulares, bajo una base más segura, mediante un método regular y sencillo, conforme nos proponemos desarrollar.

A este fin, consideraremos la y', de la ecuación diferencial dada, como si fuese un parámetro variable, al objeto de deducir de ella una segunda ecuación diferencial, para que la y' de ésta corresponda siempre con la derivada de la función $\varphi(x, y) = o$, como integral singular suya.

Esta segunda ecuación diferencial constituye el fondo de nuestro método, que sin duda lleva ventaja á todos los indicados anteriormente por no estar sujeto á oscilaciones, quedando siempre asegurada la integral singular que á ella se refiere.

Con todo, hay que advertir cómo, en casos particulares, podrá suceder que la función $\varphi(x, y) = o$ sea además integral singular de la primera ecuación diferencial, lo que tendrá lugar siempre y cuando la segunda ecuación pueda identificarse con dicha primera.

Este método guarda relación con las teorías de las involutas y envolventes, así como en el paso de la integral general á su ecuación diferencial.

En efecto, si la ecuación diferencial primera es

$$F(x, y, y') = o. \qquad (1)$$

Al considerar la y', como una constante arbitraria, resulta

$$F(x, y, G) = o. \qquad (a)$$

Si se toma la derivada de dicha función con toda generalidad, se tiene

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial G} \frac{\partial G}{\partial x} = o. \qquad (2)$$

Ahora bien, la derivada de (a), considerando G constante, será

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y' = o. \qquad (3)$$

Así, para que (2) corresponda con (3), basta que

$$\frac{\partial F}{\partial G} = o, \qquad (4)$$

de cuya ecuación se deduce

$$G = \psi(x, y).$$

De modo que al sustituir este valor, por último, en (a), se obtiene

$$F[x, y, \psi(x, y)] = o. \qquad (5)$$

Esta ecuación representa la integral singular, correspondlendo la tangente en un punto de la curva (5) con la de la ecuación diferencial que resulta de combinar (a) con (3), dándonos esta segunda ecuación diferencial notable, la seguridad de que la ecuación (5) constituye su integral singular, conforme á la clase especial que estudiamos.

Este método, además de su marcha segura y regular para la determinación de integrales singulares referidas á ecuaciones diferenciales de primer orden, es digno de mención, por cuanto es aplicable á ecuaciones diferenciales más complicadas, conforme iremos manifestando,

Sin duda que, para mayor claridad de los conceptos que preceden, no habrá como utilizar los mismos ejemplos ante-

riores, tomados de las principales obras de matemáticos, á á fin de salvar las dudas que pudieran ocurrir, al propio tiempo que apreciar la importancia del método que exponemos.

Primer ejemplo.—Sea la ecuación diferencial

$$(1) \qquad x + 2yy' - xy'^2 = o = f(x, y, y').$$

Al generalizarla, conforme hemos manifestado, se obtiene

$$(1') \qquad x + 2y\mathrm{G} - x\mathrm{G}^2 = f(x, y, \mathrm{G}) = o.$$

Luego resulta

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{G}} = 2y - 2x\mathrm{G} = o, \quad \text{de donde} \quad \mathrm{G} = \frac{y}{x}.$$

Sustituyendo este valor en (1′), se deduce inmediatamente la integral singular, ó sea

$$x^2 + y^2 = \varphi(x, y) = o. \qquad (2)$$

En este ejemplo, la derivada de (2) corresponde con la y' de la ecuación diferencial (1).

En efecto, de (2) se deduce

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}, \qquad (a)$$

cuyo valor, sustituído en (1), da

$$x - 2y\frac{x}{y} - x\frac{x^2}{y^2} = o, \quad \text{ó sea} \quad -x\frac{x^2 + y^2}{y^2} = o;$$

y como $x^2 + y^2 = o$, se tiene en definitiva la identidad $o = o$.

Mas conforme al método que desarrollamos precisa encontrar la segunda ecuación diferencial que se enlaza con (1), y de la cual se puede asegurar *à priori* que tendrá por integral singular la función (2).

Según las consideraciones generales que preceden, tomaremos la derivada en x de (1′), de donde

$$(1 - G^2) + 2Gy' = o,$$

ó sea

$$G = y' \pm \sqrt{y'^2 + 1};$$

al sustituir este último valor en (1′), se obtiene

$$(4) \quad x + 2y\,[y' \pm \sqrt{y'^2 + 1}\,] - x\,[2y'^2 + 1 \pm 2y'\sqrt{y'^2 + 1}\,] = o.$$

Ecuación que queda satisfecha por la derivada de (2), siendo (2), con seguridad, la integral singular de (4).

Según lo que precede, vemos que (2) también se puede considerar integral singular de (1), puesto que la satisface; empero esto resulta porque la ecuación (1) no es sino una consecuencia de (4).

En efecto, la ecuación (4) cabe expresarla por

$$(5) \quad x + 2yy' \pm 2y\sqrt{y'^2 + 1} - xy'^2 - x(y'^2 + 1) \mp 2xy'\sqrt{y'^2 + 1} = o;$$

pero según (a), resulta:

$$y'^2 + 1 = \frac{x^2}{y^2} + 1 = \frac{x^2 + y^2}{y^2};$$

y en virtud de (2), se tiene $y'^2 + 1 = o$.

Asi, pues, de (5) sólo queda

$$x + 2yy' - xy'^2 = o,$$

cuya ecuación corresponde exactamente con la primitiva (1).

Segundo ejemplo.—Sea la ecuación de la tangente correspondiente á una circunferencia de radio r:

$$y = y'x + r\sqrt{1 + y'^2}. \qquad (1)$$

Aplicando el procedimiento general indicado, se tiene:

$$y - \mathrm{G}x - r\sqrt{1 + \mathrm{G}^2} = o = f(x, y, \mathrm{G}), \qquad (1')$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{G}} = -x - \frac{r\mathrm{G}}{\sqrt{1 + \mathrm{G}^2}} = o, \quad \text{ó sea} \quad \mathrm{G} = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}},$$

de donde

$$\sqrt{1 + \mathrm{G}^2} = -\frac{r\mathrm{G}}{x} = -\frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}};$$

valores que sustituídos en (1′) dan la función:

$$y = -\frac{r^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \quad \text{ó sea} \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (a)$$

Si buscamos la ecuación diferencial á que corresponde (a) como integral singular, habrá que tomar la derivada de (1′), según x, resultando en esta fórmula de Clairaut, sencillamente $\frac{dy}{dx} = \mathrm{G}$, cuyo valor, sustituído en (1′), reproduce la ecuación diferencial (1), lo cual nos indica que en este caso, la segunda ecuación diferencial se identifica inmediatamente con la primera, sin necesidad de reducción alguna.

Asi, pues, la función $r^2 = x^2 + y^2$, es integral singular de (1).

En efecto, de esta ecuación se deduce $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, y al sustituir en (1), resulta:

$$y = -\frac{x}{y}x + r\sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}},$$

ó sea:

$$\frac{y^2 + x^2}{y} - r\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{y}} = o,$$

y como se tiene $r^2 = x^2 + y^2$, se deduce la identidad $o = o$.

Tercer ejemplo.—Sea

$$y + (y - x)y' + (a - x)y'^2 = o. \qquad (1)$$

Generalizando esta ecuación, se tiene

$$y + (y - x)\,\mathrm{G} + (a - x)\,\mathrm{G}^2 = o = f(x, y, \mathrm{G}). \quad (1')$$

Aplicando el procedimiento expuesto,

$$\frac{df}{d\mathrm{G}} = y - x + 2\mathrm{G}(a - x) = o,$$

de donde

$$\mathrm{G} = -\frac{y - x}{2(a - x)}.$$

Al sustituir este valor en la ecuación diferencial dada, se obtiene

$$y - \frac{(y - x)^2}{2(a - x)} + (a - x)\frac{(y - x)^2}{4(a - x)^2} = o,$$

ó sea

$$(y - x)^2 - 4(a - x)y = o. \qquad (a)$$

Determinemos ahora la ecuación diferencial á que se refiere (a), como verdadera integral singular; para ello tomaremos la derivada, según x, de (1′), resultando

$$-\mathrm{G}-\mathrm{G}^2+(\mathrm{G}+1)\,y'=o,$$

ó sea

$$\mathrm{G}=\frac{y'-1\pm\sqrt{(y'-1)^2+4y'}}{2}.$$

Al sustituir el único valor que depende de y', se tiene, como en el caso anterior, $y'=\dfrac{dy}{dx}=\mathrm{G}$; luego al sustituirlo en (1′), da la misma ecuación diferencial (1), diciéndonos esto que las dos ecuaciones diferenciales se identifican y que por consiguiente la función (a), se puede considerar integral singular de (1); de tal manera que fácilmente se demuestra que la satisface, como en el ejemplo anterior.

En efecto, de

$$(y-x)^2-4\,(a-x)\,y=o, \qquad (a)$$

al derivar, se obtiene

$$2\,(y-x)\,(y'-1)-4\,(a-x)\,y'+4\,y=o;$$

de donde

$$y'=-\frac{y+x}{y+x-2a}.$$

Sustituyendo este valor en (1), se tiene

$$y-\frac{(y+x)\,(y-x)}{y+x-2a}+(a-x)\,\frac{(y+x)^2}{(y+x-2a)^2}=o;$$

Después de sencillas reducciones, resulta

$$-a(x+y)^2+4a^2y=o. \qquad (b)$$

Pero la ecuación (a) cabe expresarla por

$$-a(x+y)^2+4a^2y=o;$$

luego en definitiva se tiene, al sustituir este valor en (b), la identidad $o=o$.

Cuarto ejemplo.—Sea la ecuación

$$y'^3-4xyy'+8y^2=o. \qquad (1)$$

Al generalizarla, toma la forma

$$\mathrm{G}^3-4xy\mathrm{G}+8y^2=o=f(x,y,\mathrm{G}). \qquad (1')$$

Considerando la derivada $\frac{\partial f}{\partial \mathrm{G}}=o$, se tiene

$$3\mathrm{G}^2-4xy=o,$$

de donde

$$\mathrm{G}=\sqrt{\frac{4}{3}xy}. \qquad (2)$$

Al eliminar G entre (1′) y (2), resulta inmediatamente

$$27y=4x^3. \qquad (3)$$

Ahora bien, para obtener la segunda ecuación diferencial, á la cual siempre debe satisfacer la función (3) como integral singular, derivaremos, según x, la función (1′); de donde resulta

$$-4y\mathrm{G}+(16y-4x\mathrm{G})y'=o;$$

despejando G, se obtiene

$$G = \frac{4yy'}{y + xy'}.$$

Al sustituir en (1′), se halla

$$4^3y^3y'^3 - 4^2xy^2y'(y + xy')^2 + 8y^2(y + xy')^3 = o; \quad (4)$$

ecuación que puede reducirse á la forma siguiente:

$$4yy'^3 - (y + xy')^2\left(\frac{xy' - y}{2}\right) = o. \qquad (5)$$

Fácilmente se prueba que la función (3) satisface á esta segunda ecuación diferencial, razón por la cual es su integral singular.

En efecto, de (3) resulta

$$y = \frac{4\,x^3}{27}, \quad \text{y} \quad y' = \frac{4}{9}x^2.$$

Luego al sustituir los valores respectivos en (5), se deduce, sin esfuerzo, la identidad $o = o$.

Empero si tomamos, para mayor comodidad, la ecuación (4) en vez de (5), á quien es equivalente, en vista de los valores anteriores de y y y' deducidos de (3), resulta

$$(6) \quad 4y^3y'^3 - 4y(y + xy')^2\,4xyy' + 8y^2(y + xy'^3) = o$$

$$4^3y^3 = 4y(y + xy')^2 = (y + xy')^3 = \left(\frac{16}{27}x^3\right)^3.$$

De modo que suprimiendo este factor común de (4), se halla la misma ecuación diferencial primera, ó sea

$$y'^3 - 4xyy' + 8y^2 = o,$$

En su virtud, la función (3) es integral singular también de (1).

En efecto, puesto que al sustituir en ella los valores de

$$y = \frac{4x^3}{27}, \quad \text{y} \quad y' = \frac{4}{9}x^2$$

deducidos de (3), se obtiene, después de sencillas operaciones, la identidad $o = o$.

En todos los ejemplos que preceden, que son precisamente los que suelen presentar los autores de obras didácticas, es de notar que la derivada de la función $\varphi(x, y) = o$, satisface á la ecuación diferencial primitiva, pero esto, según las observaciones notables de Serret, no resulta sino en casos particulares, pues al hallar la función φ, según el método de Lagrange, dejará de cumplirse, en general, dicha condición, y si bien nuestro método tiene cierto parentesco con el de Lagrange, la verdad es que la segunda ecuación diferencial que consideramos, salva perfectamente la dificultad que presenta el método de Lagrange, pues, con seguridad, ella tiene por integral siempre á la función $\varphi(x, y) = o$.

El ejemplo siguiente, de Serret, dará á comprender, sin duda, la importancia que tiene esta segunda ecuacion diferencial que introducimos en los cálculos.

Sea la ecuación:

$$(1) \qquad y - 2xy' - y'^2 = o.$$

Al generalizarla, como en los ejemplos anteriores, se tiene

$$(1') \qquad y - 2x\mathrm{G} - \mathrm{G}^2 = o = f(x, y, \mathrm{G});$$

de donde

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{G}} = -2x - 2\mathrm{G} = o,$$

ó sea

$$G = -x,$$

cuyo valor sustituído en (1′), da:

$$(a) \qquad y + x^2 = o = \varphi(x, y).$$

Para encontrar la segunda ecuación diferencial, según el procedimiento general que venimos desarrollando, basta derivar (1′) según x:

$$-2G + y' = o,$$

de donde

$$G = \frac{y'}{2};$$

al sustituir este valor en (1′), resulta

$$y - xy' - \frac{y'^2}{4} = o. \qquad (2)$$

Esta es la segunda ecuación diferencial, la cual queda satisfecha según (a), como integral singular suya, empero no resulta lo mismo respecto á la ecuación diferencial (1).

En este concepto se puede afirmar que la función hallada (a), es integral singular de (2), pero no de (1), procurando así nuestro método un medio seguro para saber siempre cuál es la ecuación diferencial á que una función $\varphi(x, y) = o$, hace referencia, como integral singular suya.

III

ESTUDIO DE INTEGRALES SINGULARES DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR AL PRIMERO

El método que hemos expuesto para deducir cierta clase de integrales singulares, apoyándonos en la indeterminación ó generalización de la derivada correspondiente á la ecuación diferencial, puede hacerse extensivo á las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior al primero.

Demos antes una idea sucinta de los procedimientos ordinarios que suelen admitirse en este caso para que pueda apreciarse luego mejor la ventaja del nuestro.

En las ecuaciones diferenciales de orden superior al primero, cabe hallar diferentes órdenes de integrales correspondientes á la ecuación diferencial dada.

Supongamos la ecuación diferencial del orden n,

$$f(x, y, y', y'', \ldots\ldots y^{(n)}) = o. \qquad (1)$$

Sea una de sus integrales primeras

$$y^{(n-1)} = \varphi(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-2)}, \mathrm{G}). \qquad (2)$$

Si se deriva esta función, suponiendo G función de x, resulta

$$y^{(n)} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'} y'' + \ldots\ldots + \frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{G}} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}.$$

Ahora, para que el valor $y^{(n)}$, corresponda con (1), es preciso que desaparezca el último término del segundo miembro, esto es:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial \mathrm{G}} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x} = o.$$

Si es $\frac{\partial G}{\partial x} = o$, origina al sustituir el valor de G, como constante, en (2), una integral particular de (1).

Si, en cambio, es

$$\frac{\partial \varphi}{\partial G} = \frac{\partial y^{(n-1)}}{\partial G} = o$$

en el concepto de que el valor G, deducido de esta última igualdad no sea una constante, al sustituirlo en (2), dará una integral singular.

Ahora, si la ecuación (2) se presentara bajo forma implícita,

$$\pi(x, y, y' \ldots\ldots y^{(n-1)}, G) = o,$$

siendo π una función racional y entera, se obtendría la integral singular, eliminando la G entre $\pi = o$ y $\frac{\partial \pi}{\partial G} = o$, salvo los casos de excepción que van ya consignados de un modo más particular en los números anteriores.

Por otra parte, también se puede deducir la integral singular directamente de la ecuación diferencial primitiva.

Los autores á este punto suelen invocar los principios ya expuestos en las ecuaciones diferenciales de primer orden, y la fórmula hallada

$$\frac{dy'}{dy} = \frac{d}{dx}\, l\, \frac{dy}{dG},$$

la hacen extensiva á una ecuación diferencial de orden n, resultando por inducción la relación

$$\frac{dy^{(n)}}{dy^{(n-1)}} = \frac{d}{dx}\, l\, \frac{dy^{(n-1)}}{dG},$$

que debe resolverse en la tercera categoría de cantidad.

Así, pues, deduciendo de esta igualdad el valor $y^{(n)}$, al sustituirlo en la ecuación diferencial dada, que se supone de orden n, se obtiene la integral singular primera.

Para mayor claridad de cuanto precede, daremos un ejemplo debido á Lagrange, el cual se encuentra reproducido bajo aspectos diferentes en las célebres obras de Serret y Rubini.

Estudio según Serret.

La ecuación de Lagrange, es

$$y - ax^2 - bx - 4a^2 - b^2 = o, \qquad (1)$$

siendo a y b dos constantes arbitrarias.

Al derivar (1), según x, resulta

$$\frac{dy}{dx} - 2ax - b = o. \qquad (2)$$

Si se sustituye el valor (b) en (1), se tiene

$$y - ax^2 - \left(\frac{dy}{dx} - 2ax\right)x - 4a^2 - \left(\frac{dy}{dx} - 2ax\right)^2 = o,$$

de donde

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y\right] - a\left(4x\frac{dy}{dx} + x^2\right) + \\ + 4a^2(1 + x^2) = o. \qquad (3)$$

Si en cambio sustituímos el valor a de (2), en (1), se obtiene

$$y - \left(\frac{\frac{dy}{dx} - b}{2x}\right)x^2 - bx - 4\left(\frac{\frac{dy}{dx} - b}{2x}\right)^2 - b^2 = o;$$

luego

$$(4) \qquad \left[2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x^3\frac{dy}{dx} - 2yx^2\right] -$$
$$- b\left(4\frac{dy}{dx} - x^3\right) + 2b^2(1+x^2) = o.$$

Al tomar, por último, la derivada, según x de (2), se deduce

$$a = \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2},$$

y al sustituir este valor en (3), se halla

$$\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y\right] - \frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\left(4x\frac{dy}{ax} + x^2\right) +$$
$$+ 4\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2(1+x^2) = o;$$

obteniéndose, por fin,

$$(5) \quad (1+x^2)\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2 - \left(2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{d^2y}{dx^2} +$$
$$+ \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = o;$$

esta ecuación diferencial de segundo orden, tiene por integrales primeras las ecuaciones (3) y (4), siendo (1) su integral general.

Ahora, para deducir la integral singular de (5), basta atender, según Serret, á las integrales primeras, buscando la expresión que corresponda á las raíces iguales de a ó b, y en ambos casos debe resultar la misma integral singular.

Si consideramos la integral primera (3), la condición de que las raíces a sean iguales, es

$$\left[4x\frac{dy}{dx}+x^2\right]^2-$$

$$-4\times 4(1+x^2)\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x\frac{dy}{dx}-y\right]=o;$$

de donde

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\left(x+\frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx}-(1+x^2)\,y-\frac{x^4}{16}=o. \qquad (6)$$

Si tomamos la integral primera (4), la igualdad de raíces iguales, según b, da

$$\left(4\frac{dy}{dx}-x^3\right)^2-$$

$$-4\left[2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x^3\frac{dy}{dx}-2yx^2\right]2(1+x^2)=o;$$

de donde, después de simples reducciones, resulta la misma ecuación (6).

Se puede deducir aún la (6) de la (5), derivando esta última ecuación según x, resultando después de simples reducciones

$$\frac{d^3y}{dx^3}\left[(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{4}\right]=o.$$

De suerte, que al igualar á cero el coeficiente de $\frac{d^3y}{dx^3}$ se tiene

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-\frac{x^2}{4}=o. \qquad (7)$$

Luego debe eliminarse $\frac{d^2y}{dx^2}$, entre (7) y (5).

De (7) se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2}{4}}{1 + x^2}$$

cuyo valor, sustituído en (5), da

$$(1 + x^2)\frac{\left(x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2}{4}\right)^2}{(1 + x^2)^2} - \left(2x\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}\right)\frac{x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^2}{4}}{1 + x^2} +$$

$$+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + x\frac{dy}{dx} - y = o;$$

y después de toda reducción

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(x + \frac{x^3}{2}\right)\frac{dy}{dx} - (1 + x^2)\,y - \frac{x^4}{16} = o;$$

ecuación que es la misma (6) hallada.

Si se resuelve esta ecuación según $\dfrac{dy}{dx}$, se encuentra

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2x + x^3}{4} + \frac{\sqrt{1 + x^2}\,\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}}{4}.$$

Esta igualdad puede escribirse así:

$$\frac{8\dfrac{dy}{dx} + 4x + 2x^3}{\sqrt{16y + 4x^2 + x^4}} = 2\sqrt{1 + x^2}.$$

Luego al multiplicar ambos miembros por dx, é integrando, resulta:

$$(7)\ \sqrt{16y + 4x^2 + x^4} - x\sqrt{1 + x^2} - 1\,(x + \sqrt{1 + x^2}) = G.$$

Esta ecuación es la integral general de la integral singular (6). Además, la ecuación (6) aun admite una integral singular deducida de (7), en el concepto de igualar á una cantidad de la tercera categoría, su derivada, según y, y fácilmente se concibe que debe resultar:

$$16y + 4x^2 + x^4 = o,$$

ó sea,

$$y = -\frac{x^4}{16} - \frac{x^2}{4}. \qquad (8)$$

Esta es la integral singular de (6), puesto que la satisface.

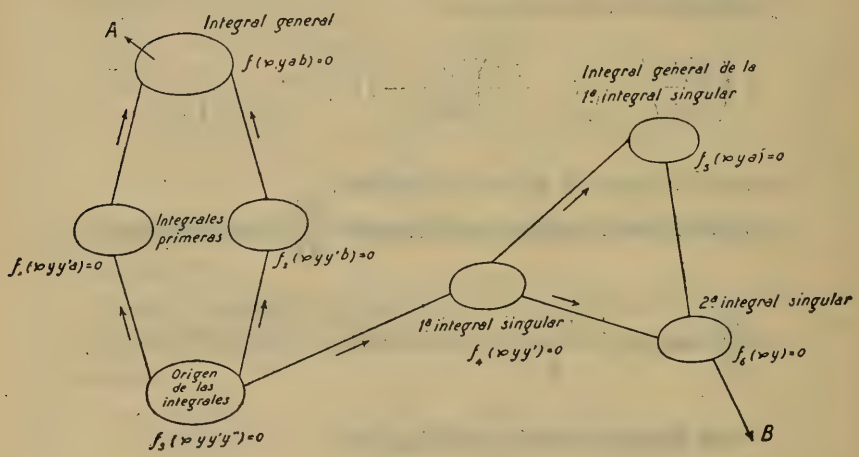


Figura 9.ª

En efecto, de (8) resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^3}{4} - \frac{x}{2},$$

de donde al sustituir los respectivos valores en (6), se obtiene:

$$\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)^2-\left(x+\frac{x^3}{2}\right)\left(\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}\right)+$$

$$+(1+x^2)\left(\frac{x^4}{16}+\frac{x^2}{4}\right)-\frac{x^4}{16}=o;$$

y después de simples reducciones, se halla la identidad $o=o$.

Terminaremos las consideraciones de Serret, dando una forma esquemática á los resultados obtenidos, para comprender mejor las relaciones que existen entre las diferentes ecuaciones halladas.

Las flechas A y B indican que las dos funciones f y f_6 no se corresponden.

(Continuará.)

LIV.—Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia).

(Continuación.)

Por José Giral Pereira y Julio C. Sánchez Angoso.

13 *Determinación del ion hidrocarbónico* (CO_3H).—Según se menciona en el núm. 4 *f* de los trabajos efectuados en el manantial, se llenaron dos frascos de agua con cloruro bárico amoníacal. Para ello se introdujo primeramente en uno 50 cc. de una solución saturada de cloruro bárico y 50 cc. de solución de amoníaco ($D = 0,923$), y en el otro doble cantidad de ambas substancias; se añadió á cada uno un litro de agua recogida en los mismos puntos de emergencia y medida exactamente con matraz aforado; se taparon los frascos con tapón esmerilado recubierto de parafina y lacre, y se procedió al análisis de sus contenidos á las veinticuatro horas de envasados.

Empleando las cantidades dichas de sal bárica pueden precipitarse 2,5 grs. ó 5 grs. de anhídrido carbónico.

Los frascos citados se calentaron en baño de María á 98° durante dos horas. Previo reposo, se decantó el líquido claro sobre filtro tarado, y se lavó repetidas veces el precipitado con agua caliente, ligeramente amoniacal; se recogió todo sobre el filtro y se comprobó que el filtrado no precipitaba por adición de cloruro bárico amoniacal. El filtro y su contenido se desecaron hasta peso constante; el precipitado bárico recogido, correspondiente á un litro de agua, pesó en ambas determinaciones una cantidad sensiblemente igual á 0,9848 grs. Si descontamos de este peso el correspondiente al sulfato bárico que contiene, y que, según la determinación núm. 4

es igual á 0,15198 grs., quedará un resto de 0,83282 grs. de carbonato bárico. Empleando el factor 0,2229, resulta gramos 0,185650 de anhídrido carbónico (CO_2) por litro.

El filtro, con su contenido, después de desecado y pesado, se colocó en un vaso de Bohemia con agua, hirviendo el conjunto; se añadieron unas gotas de solución de fenoltaleina, y después solución normal de ácido clorhídrico, hasta que desapareció la efervescencia; se hirvió nuevamente y se añadió solución normal de hidrato sódico hasta coloración rosada. El número de centímetros cúbicos de la solución ácida gastados fué igual á 9,5, y el de la alcalina igual á 1,1: restando este número del primero, quedan 8,4^{cc}, que multiplicados por 0,022, dan una cantidad de anhídrido carbónico igual á 0,1848 grs. por litro.

Tomando la media aritmética de las dos cifras halladas para el anhídrido carbónico, resulta 0,18523 grs. por litro, lo cual corresponde á 0,256796 grs. del ion hidrocarbónico (CO_3H).

14. *Determinación del ion hidrógeno* (H).—La cantidad de este ion fué deducida por el cálculo, partiendo de la cifra encontrada en la determinación anterior para el ion hidrocarbónico, atendiendo á que todo el ácido carbónico se encuentra al estado libre y de bicarbonatos. Multiplicando 0,256796 por el factor 0,0164, tenemos 0,004211 grs. por litro del ion hidrógeno (H).

15. *Otras determinaciones.*— Comprendemos bajo este epígrafe la investigación de algunos cuerpos que fué emprendida como cuantitativa, aun cuando no pasó, finalmente, de cualitativa.

A) *Acidos crénico y apocrénico.*—El depósito producido por la evaporación de 16 litros de agua, según se consigna al comienzo de la determinación del litio (núm. 12 C°), se trató por 90^{cc} de solución de potasa cáustica al 34 por 100; se hirvió el conjunto durante una hora, se filtró, se aciduló con ácido acético el líquido filtrado y se precipitó con amo-

níaco. Al cabo de doce horas se filtró nuevamente añadiendo al filtrado ácido acético y acetato neutro de cobre. No se percibió ningún precipitado, así como tampoco al adicionar carbonato amónico en ligero exceso y en caliente. De lo cual deducimos la no existencia de los ácidos crénico y apocrénico.

B) Estroncio y bario.—Un residuo análogo al anterior y procedente de 16 litros de agua fué adicionado de ácido clorhídrico y unas gotas de ácido sulfúrico; evaporado á sequedad fué tratado por agua acidulada con clorhídrico. El residuo insoluble se disolvió totalmente en una soldción concentrada de carbonato sódico. Ni este residuo ni el líquido filtrado dieron al espectroscopio las rayas características del estroncio y del bario, deduciendo, por lo tanto, la no existencia de estos radicales.

C) Arsénico y antimonio.—El líquido separado por filtración del residuo utilizado en la determinación anterior del estroncio y bario, y procedente, por lo tanto, de 16 litros de agua, fué sometido durante veinticuatro horas á una corriente lenta de ácido sulfhídrico y á la temperatura de 70° No se observó ningún precipitado. Se evaporó á sequedad dicho líquido, se aciduló el residuo con ácido clorhídrico, se trató por agua y se filtró. El líquido y el precipitado resultante se ensayaron en el aparato de Marhs sin resultado positivo. No existían, por lo tanto, ni arsénico ni antimonio.

D) Bromo y iodo.—Veinte litros de agua se redujeron por evaporación á 1.500^{cc}. Se filtró; el líquido filtrado se evaporó á sequedad y se trató el residuo repetidas veces por alcohol de 96° hirviendo. Se evaporaron á sequedad los líquidos alcohólicos, adicionados de unas gotas de solución de hidrato potásico, y se calentó el residuo al rojo con unos cristales de nitrato potásico. La disolución acuosa del residuo resultante se acidificó con ácido sulfúrico, y se agitó con sulfuro de carbono y unas gotas de ácido nitroso, disuelto en ácido sulfúrico; se percibió una ligerísima coloración

amatista. Se separó por decantación el líquido del sulfuro de carbono, y se precipitó por nitrato de plata; recogido el precipitado argéntico producido sobre filtro, desecado é incinerado, no perdió de peso por la acción prolongada del gas cloro. Existen, pues, ligeros indicios de iodo, y no existe bromo.

E) Fluor.—Cuatro litros de agua, adicionados de pequeña cantidad de carbonato sódico, fueron evaporados hasta reducir su volumen á unos 100^{cc}; se añadió una solución de cloruro cálcico en ligero exceso; se hirvió y se filtró, recogiendo el precipitado, el cual, después de seco, se calentó al rojo. El residuo tratado por ácido acético fué evaporado al baño de María, y después tratado repetidas veces por agua hirviendo. La parte insoluble fué sometida á la acción del ácido sulfúrico en el aparato del Dr. Casares (*), sin que se percibiera ningún depósito de sílice gelatinosa. En vista de este resultado negativo, procedimos á la investigación del fluor por el procedimiento de Nickles, que es como sigue:

Cuatro litros de agua se evaporaron casi hasta sequedad; fueron tratados por unas gotas de ácido clorhídrico purísimo, y después por agua destilada. Se filtró y se añadió al líquido filtrado amoníaco en exceso, recogiendo el precipitado producido, y precipitando la parte líquida por carbonato amónico; este depósito se reunió con el producido por el amoníaco en un filtro, y se desecó en estufa; el polvo rojizo resultante se colocó en un crisol de platino, tapado con un vidrio de reloj, cubierto de una capa de cera, en la cual se habían trazado algunos dibujos con un punzón; se añadió un exceso de ácido sulfúrico concentrado, y se calentó nuevamente, manteniendo frío el vidrio obturador mediante un trocito de hielo. Al cabo de una hora se dió por terminada la operación, limpiando la cera que recubría á aquél. No

---

(*) *An. de la Soc. Esp. de Fís. y Quím.*, núm. 28, pág. 433.

se percibió ningún ataque del vidrio. Deducimos de ambas determinaciones la no existencia del fluor.

F) Potasio.—En la determinación núm. 5, correspondiente al sodio, se consigna el examen espectroscópico del residuo final de cloruros alcalinos que demostró la existencia de muy débiles indicios de potasio. Análogo examen se hizo en el residuo de la evaporación de 20 litros de agua empleado para la investigación del bromo y del iodo, según se detalla en el apartado *D*) del presente capítulo, con resultado negativo. Atribuímos los vestigios percibidos en la determinación del núm. 5, á pequeñas impurezas de los reactivos, y deducimos, en consecuencia, que no existe potasio en las aguas analizadas.

G) *Manganeso.*—Según se consigna al principio de la determinación núm. 10, correspondiente al ion calcio, se investigó el manganeso con resultado negativo. El depósito producido al evaporar 20 litros de agua para investigar bromo y iodo, fué dividido en dos partes iguales, investigando en ellas el manganeso por sus dos reacciones características de oxidación, por vía seca (fusión con carbonato y nitrato potásicos), y por vía húmeda (bióxido de plomo y ácido nítrico). Tampoco dió resultado positivo ninguna de ellas, no existiendo, por lo tanto, el ion manganeso.

16 *Determinación de la materia orgánica.*—Fué determinada en medio ácido y alcalino por la reducción de una solución títulada de permanganato potásico, siguiendo el método de Levy adoptado por el comité consultivo de Higiene de Francia. Cuatro matraces Erlenmeyer fueron numerados con los números 1, 2, 3 y 4. En los números 1 y 3 se introdujeron 50^{cc} de agua mineral y en los números 2 y 4 100^{cc} de la misma; se añadió al número 1, 5^{cc} de solución de ácido sulfúrico al 25 por 100; al número 2, 10 ^{cc} del mismo ácido; al número 3, 5^{cc} de solución saturada de bicarbonato sódico, y al número 4, 10^{cc} de la misma solución. Se añadió á cada uno de los cuatro, 10^{cc} de solución V/50 de perman-

ganato potásico, y se hicieron hervir durante diez minutos. Después de enfríamiento se adicionó á los mismos matraces números 3 y 4, respectivamente, 5 y 10^{cc} de ácido sulfúrico al 50 por 100, y á todos 10^{cc} de solución de sulfato ferroso amoníacal. Se añadió á todos, y gota á gota, la solución de permanganato, hasta coloración persistente rosada. Se obtuvieron los siguientes resultados:

N.° 1. — 5,8^{cc}	Diferencia = 0,4^{cc}	y para el litro	8,0^{cc}
N.° 2. — 6,2^{cc}			
N.° 3. — 5,0^{cc}	Diferencia = 0,2^{cc}		4,0^{cc}
N.° 4. — 5,2^{cc}			

y empleando el factor 0,00016, tendremos 0,00128 grs. y 0,00064 grs. de oxígeno, necesario para quemar la materia orgánica existente en un litro de agua mineral, en medio ácido y alcalino, respectivamente.

Si se tiene en cuenta la pequeña cantidad de sal ferrosa que existe en disolución en el agua, y el hecho comprobado de reducirse expontáneamente el permanganato potásico en medio ácido é hirviendo, veremos que los números consignados, aun correspondiendo de suyo á aguas purísimas desde el punto de vista de la materia orgánica, habrían de ser en alguna parte rebajados.

17. *Determinación del grado hidrotimétrico.*—Fué determinado por el procedimiento clásico de Boutron y Boudet el grado hidrotimétrico directo, que resultó ser igual á 19,5, entrando en los límites de una agua potable. Ello nos prueba la escasa mineralización de las aguas que estudiamos.

18. *Determinación de la alcalinidad.*—El agua estudiada es de reacción ácida con fenoltaleina al pie del manantial; el agua embotellada es débilmente alcalina. El azul Poirrier y la tintura de cochinilla ponen en evidencia la presencia de carbonatos ácidos y neutros. Con la heliantina se comporta como líquido alcalino. El tornasol no ejerce ninguna acción sensible.

La alcalinidad es algo mayor después de hervir el agua, por la pérdida de ácido carbónico libre y semicombinado.

19. *Determinación del ion calcio* (Ca) *combinado con el ion hidrocarbónico* (CO_3H). — Un litro de agua mineral fué evaporado y hervido hasta reducirlo á la quinta parte de su volumen. Se filtró y lavó el precipitado producido con agua destilada hirviendo. En el líquido filtrado se determinó la cantidad de ion calcio siguiendo el procedimiento detallado en la determinación núm. 10. Pesó el residuo de la calcinación 0,0496 grs., correspondiendo á 0,035431 grs. de ion calcio (*Ca*) por litro.

Si de la cantidad total de ion calcio (*Ca*) según el núm. 5	0,067321	gramos.
restamos la encontrada después de la ebullición	0,035431	—
tendremos la correspondiente al ion hidrocarbónico (*)	0,031890	—
siendo el óxido cálcico equivalente	0,04465C	—

20. *Determinación del ion magnesio* (Mg) *combinado con el hidrocarbónico* (CO_3H). — El líquido separado por filtración de la cal determinada conforme al núm. 19, fué destinado á la determinación de la magnesia, siguiendo el procedimiento detallado en el núm. 11. El pirofosfato magnésico obtenido pesó 0,0108 grs., que equivalen á 0,003892 grs. de óxido magnésico (*Mg O*) y á 0,002335 grs. por litro de ion magnésico (*Mg*).

Si de la cantidad total de ion magnesio (*Mg*) según el núm. 11	0,009414	gramos.
restamos la encontrada después de la ebullición	0,002335	—
tendremos la combinada con el ion hidro carbónico	0,007079	—
siendo el óxido magnésico equivalente	0,011795	—

(*) Salvo la pequeña cantidad combinada con el ácido fosfórico.

21. *Determinación de la totalidad de cationes al estado de sulfatos.*—El residuo fijo procedente de 250^{cc} de agua fué descompuesto por unas gotas de ácido clorhídrico en caliente y tratado después por ácido sulfúrico diluído; se evaporó á sequedad, se calentó al rojo y se añadieron unos cristales de carbonato amónico para transformar los bisulfatos alcalinos en sulfatos neutros. El residuo de la calcinación pesó 0,2565 grs., correspondiendo al litro 1,0260 grs.

22. *Determinación de la cantidad total de gases disueltos.*—Se practicaron varias determinaciones al pie del manantial y en el laboratorio.

Todas ellas fueron hechas siguiendo la misma técnica operatoria que describimos á continuación, dándonos resultados muy concordantes con los de ésta.

Se llenó completamente de agua mineral un matraz de 315^{cc} de cabida; se obturó con un tapón de caucho, atravesado por un tubo de desprendimiento lleno de agua destilada, y en comunicación con una campana graduada llena de mercurio y colocada sobre una cuba hidragironeumática; se calentó el matraz hasta ebullición, y se prolongó ésta durante algunos minutos. Se midió el volumen gaseoso en la campana, la altura de las columnas de agua y mercurio, la temperatura y la presión barométrica corregida, y se calculó el volumen gaseoso á 0° y 760$^{m/m}$ por la fórmula siguiente:

$$V = V' \frac{H - h - h' - F}{760\,(1 + \alpha t)}$$

siendo en nuestro caso $V' = 19{,}7^{cc}$; $H = 694{,}5^{m/m}$; $h = 208^{m/m}$; $h' = 2^{m/m}$; $F = 23{,}5^{m/m}$; $t = 25°$ y $\alpha = 0{,}00367$, resultó para V un valor igual á 10,95^{cc}, correspondiendo, por lo tanto, al litro 34,76^{cc} de gases desprendidos por ebullición incipiente.

23. *Determinación del ion hidrocarbónico* (CO_3H) *disuelto al estado libre.*—En la campana que contenía los gases procedentes de la determinación anterior, se introdujo

un trocito de potasa cáustica, el cual se disolvió en el agua que dicha campana contenía. Agitado el conjunto repetidas veces, y después de un prolongado reposo de doce horas, se observó que el volumen gaseoso no disminuía, y se procedió á su medición utilizando para corregirlo la misma fórmula consignada en el núm. 22.

Resultó $V' = 11{,}2^{cc}$; $H = 694{,}5$; $h = 252^{m/m}$; $h' = 2^{m/m}$; $F = 23{,}5^{m/m}$; $t = 25°$ y $\alpha = 0{,}00367$; por lo tanto, resulta de el cálculo $V = 5{,}63^{cc}$, correspondiendo al litro $17{,}87^{cc}$.

Si del volumen total de gases determinado anteriormente.....	$34{,}76^{cc}$
restamos el obtenido después de la acción de la potasa.....	$17{,}87^{cc}$
tendremos el correspondiente al anhídrido carbónico (CO_2).....	$16{,}89^{cc}$

Multiplicando este número por el peso de $1^{c/c}$ de anhidrido carbónico á $0{,}760^{m/m}$ (que es igual á 0,0019774 gramos), tendremos 0,033398 gramos de dicho gas por litro de agua, correspondiendo á 0,046302 gramos de ion (CO_3H) hidrocarbónico al estado libre (*).

24. *Determinación de los gases oxígeno y ozono disueltos.*— El resíduo gaseoso procedente de la operación anterior, después de obsorbido el gas carbónico por la potasa, fué tratado por unos 8^{cc} de solución concentrada de ácido pirogálico. Agitado el conjunto y dejado largo tiempo en reposo, se procedió á su medición colocando la campana que lo contenía en una cubeta profunda, llena de agua, y leyendo á igualdad de niveles. El volumen $V' = 6{,}4^{cc}$ fué corregido, teniendo en cuenta los datos siguientes:

(*) No puede asegurarse de un modo absoluto que la cantidad de dicho ion sea la correspondiente al estado libre, pues aunque la ebullición del agua fué lenta y poco prolongada, siempre se desprende algo del llamado ácido carbónico semicombinado.

$H = 699{,}2^{m/m}$; $F = 22{,}2^{m/m}$; $t = 24^{o}$, y $\alpha = 0{,}00367$; resultaron $5{,}31^{cc}$, correspondiendo al litro $16{,}86^{cc}$. Si del volumen de gases no absorbibles por la potasa..... $17{,}87^{cc}$
restamos los no absorbibles por el ácido pirogálico..... $16{,}86^{cc}$

tendremos el volumen de oxígeno..... ..... $1{,}01^{cc}$

Multiplicando este número por 0,00143 (peso de un centímetro cúbico de oxígeno á 0° y $760^{m/m}$) tendremos 0,001444 gramos de oxígeno por litro.

En algunas de las muchas determinaciones gasométricas efectuadas, agitamos durante largo tiempo el volumen gaseoso resultante del tratamiento con potasa, con solución concentrada de ioduro potásico. En otras fué el volumen gaseoso primitivo el que se agitó con dicha sal, y en otras, se ensayó con papel ozonoscópico, el agua y los gases procedentes de su ebullición. En ninguna de ellas se descubrió la presencia del ozono.

25. *Determinación del gas nitrógeno disuelto.* — El residuo gaseoso procedente de las determinaciones anteriores, inatacable por la potasa y por el ácido pirogálico, medía $31{,}5^{cc}$ corregidos, ó sea $16{,}86^{cc}$ por litro, que fué considerado como nitrógeno y calculado su peso multiplicando dicha cifra por 0,001256 gramos (peso de $1^{c/c}$ de nitrógeno á $0{,}760^{m/m}$), resultó 0,021176 gramos por litro.

27. *Resumen analítico de las substancias encontradas y de los iones y moliones correspondientes.* — Las substancias determinadas por los métodos descritos anteriormente, son las que siguen, expresadas en gramos por litro.

Cloro (Cl).....	0,330860	gramos.
Sulfatos (SO_3).....	0,052190	—
Carbonatos (CO_2).....	0,085230	—
Fosfatos (P_2O_5).....	0,000940	—
Sílice (SiO_2).....	0,041215	—
Cal (CaO).....	0,094250	—
Magnesia (MgO).....	0,015690	—
Oxido ferroso (FeO).....	0,001395	—

Alúmina (Al_2O_3)	0,000636	gramos.
Litina (Li_2O)	0,007136	—
Sosa (Na_2O)	0,297268	—
	1,026810	
Oxígeno	0,001444	—
Nitrógeno	0,021176	—

Reducidas las anteriores substancias á sus iones correspondientes, tendremos:

Anion cloro (Cl)	0,330860	gramos por litro.
— sulfúrico (SO_4)	0,062628	—
— hidrocarbónico (CO_3H)	0,256796	—
— fosfórico (PO_4)	0,001258	—
— silícico (SiO_3)	0,052199	—
Suma de aniones	0,703741	—
Catión calcio (Ca)	0,067321	—
— magnesio (Mg)	0,009414	—
— ferroso (Fe)	0,001085	—
— alumínico (Al_2)	0,000336	—
— litio (Li)	0,003364	—
— sodio (Na)	0,220554	—
— hidrógeno (H)	0,004211	—
Suma de cationes	0,306285	—
Aniones	0,703741	—
Cationes	0,306285	—
TOTAL	1,010026	

Si dividimos cada una de las cantidades correspondientes á los iones por sus respectivos pesos atómicos ó moleculares, tendremos las fracciones de molécula gramo ó moliones de cada uno:

Molion cloro	0,009330
— sulfúrico	0,000652
— carbónico	0,004209
— fosfórico	0,000013
— silícico	0,000687
— cálcico	0,001683
— magnesio	0,000392
— ferroso	0,000019
— alumínico	0,000012
— litio	0,000479
— sodio	0,009573
— hidrógeno	0,004211
Suma de moliones	0,031260

28. *Agrupación de aniones y cationes.* — Reconociendo la dificultad de esta agrupación, consignamos á continuación el medio más razonable de estar unidos los iones encontrados por el análisis, fundándonos en diversas determinaciones hechas al efecto:

Alúmina encontrada (Determinación n.º 8)..	0,000636	grs. por litro.
Acido fosfórico correspondiente (íd. n.º 8 y 9).	0,000884	—
Fosfato de alúmina	0,001520	—
Acido fosfórico total (Determinación n.º 9)..	0,000940	—
— combinado con la alúmina (ídem n.º 8 y 9)	0,000884	—
— sobrante	0,000056	—
Cal equivalente	0,000066	—
Fosfato tribásico de cal	0,000122	—
Cal precipitada por ebullición (Determinación n.º 19)	0,044650	—
Cal combinada con el ácido fosfórico	0,000066	—
— sobrante	0,044584	—
Anhídrido carbónico correspondiente	0,035030	—
Carbonato neutro de cal	0,079614	—

Magnesia precipitada por ebullición (Determinación n.º 20)	0,011795	grs. por litro.
Anhidrido carbónico correspondiente	0,012980	—
Carbonato neutro de magnesia	0,024775	—
Oxido ferroso encontrado (Derminación n.º 7).	0,001395	—
Anhidrido carbónico correspondiente	0,000852	—
Carbonato ferroso neutro	0,002247	—
Litina encontrada (Determinación n.º 12)	0,007136	—
Anhidrido carbónico correspondiente	0,020932	—
Radical litio (Li) Equivalente á la litina	0,003363	—
Radical hidrocarbónico (CO_5H) Equivalente al anhidrido	0,029020	—
Carbonato ácido de litio	0,032383	—
Anhidrido carbónico combinado con la cal	0,035030	—
— magnesia	0,012980	—
— el hierro	0,000852	—
	0,048862	—
Cantidad igual para formar los respectivos bicarbonatos	0,048862	—
	0,097724	—
Anhidrido carbónico combinado con la litina.	0,020932	—
Anhidrido carbónico libre (Determinación número 23)	0,033398	—
Suma total de estas tres cantidades	0,152054	—
Anhidrido carbónico (total determinación número 13)	0,185238	—
Anhidrido carbónico (por diferencia) para combinar con la sosa	0,033184	—
Sosa correspondiente	0,023379	—
Radical hidrocarbónico equivalente	0,046005	—
Radical sodio equivalente	0,917346	—
Carbonato ácido de sodio	0,063351	—

Sosa total (Determinación n.° 5).....	0,297268	grs. por litro.
— combinada con el ácido carbónico....	0,023379	—
Diferencia.....	0,273889	—
Radical sodio correspondiente.....	0,203208	—
Sosa para combinar con el ácido sulfúrico..	0,013694	—
Acido sulfúrico correspondiente (SO_3).....	0,017670	—
Sulfato sódico neutro.....	0,031364	—
Sosa para combinar con el cloro.....	0,260195	—
Sodio equivalente.....	0,193047	—
Cloro correspondiente.....	0,297964	—
Cloruro sódico.....	0,491011	—
Magnesia encontrada después de la ebullición (Determinación n.° 20).....	0,003892	—
Magnesia para combinar ácido sulfúrico....	0,001420	—
Acido sulfúrico equivalente.....	0,002840	—
Sulfato magnésico.....	0,004260	—
Magnesia para combinar con el cloro.....	0,002472	—
Magnesio equivalente.....	0,001483	—
Cloro correspondiente.....	0,004387	—
Cloruro magnésico.....	0,005870	—
Acido sulfúrico combinado con la sosa.....	0,017670	—
— — — magnesia.	0,002840	—
	0,020510	—
Acido sulfúrico total (Determinación n.° 4)..	0,052190	—
Acido sulfúrico (por diferencia) para combinar con la cal.....	0,031680	—
Cal correspondiente.....	0,022276	—
Sulfato cálcico.....	0,053956	—
Cloro combinado con la sosa.....	0,297964	—
— — con la magnesia,.....	0,004387	—
	0,302351	—

Cloro total (Determinación n.° 3).....	0,330860	grs. por litro.
Diferencia.—Cloro para combinar con la cal.	0,028509	—
Calcio equivalente.....	0,016290	—
Cloruro cálcico.....	0,044799	—
Cal correspondiente.....	0,022906	—
Cal combinada con el ácido sulfúrico.....	0,022276	—
— — con el cloro.....	0,022906	—
	0,045182	—
Cal encontrada después de la ebullición (Determinación n.° 19).....	0,049600	—
Cal (por diferencia) para combinar con el ácido silícico.....	0,004418	—
Acido silícico (SiO_2) correspondiente.....	0,004733	—
Silicato cálcico.....	0,041215	—
Acido silícico encontrado (Determinación número 6).....	0,941215	—
Acido silícico combinado con la cal.....	0,004733	—
Sílice libre.....	0,136482	—

De todo lo anteriormente expuesto, pueden suponerse en disolución en el agua las especies químicas siguientes:

Fosfato de aluminio.....	0,001520	grs. por litro.
— tricálcico.....	0,000122	—
Carbonato cálcico.....	0,079614	—
— magnésico.....	0,024775	—
— ferroso.....	0,002247	—
Bicarbonato litico.....	0,032383	—
— sódico.....	0,063351	—
Sulfato sódico.....	0,031364	—
Cloruro sódico.....	0,491011	—
Sulfato magnésico.....	0,004260	—
Cloruro magnésico.....	0,005870	—
Sulfato cálcico.....	0,053956	—
Cloruro cálcico.....	0,044799	—
Silicato cálcico.....	0,009151	—
Sílice libre.....	0,036482	—

Acido carbónico libre (CO_3H_2).....	0,047060	grs. por litro.
— semicombinado con *Ca, Mg* y *Fe*.	0,068851	—
Oxígeno.....	0,011444	—
Nitrógeno.....	0,021176	—
	1,019436	—

La agrupación de cuerpos, tal como queda consignada, está fundada en las siguientes consideraciones:

1.ª La existencia de los iones correspondientes, como dato directo del análisis.

2.ª La cantidad respectiva de cada uno, como media de dos ó tres determinaciones concordantes y escrupulosamente verificadas.

3.ª La existencia del *fosfato de alúmina* queda probada en el detalle de la determinación núm. 8.

4.ª En el depósito producido al hervir el agua existe ácido fosfórico y cal, lo cual prueba la existencia del *fosfato tricálcico.*

5.ª En el mismo depósito existe cal, magnesia y hierro con ácido carbónico. Presencia de *carbonatos cálcico, magnésico y ferroso.* Ausencia de sales férricas.

6.ª Las determinaciones de ácido carbónico total, libre y semicombinado demuestran un gran exceso de este cuerpo. Los carbonatos antes citados están disueltos al estado de bicarbonatos. Los radicales alcalinos están combinados con el mismo ácido en la medida que el excedente de éste indica. De ahí la existencia de los *carbonatos ácidos de sodio y litio.*

7.ª Descontadas las agrupaciones anteriores, quedan tres bases: cal, magnesia y sosa, para combinar con dos ácidos, clorhídrico y sulfúrico.

8.ª Cuando un equivalente de sosa está en presencia de otro de cada uno de los ácidos clorhídrico y sulfúrico, el 65,7 °/₀ de la base se combina con el primer ácido, y el

34,3 °/₀ restante con el segundo, conforme á los respectivos coeficientes de afinidad. Descontada del total de sosa la combinada con el ácido carbónico, queda una cantidad, que comparada con la existente de los ácidos clorhídrico y sulfúrico, en relación con los respectivos equivalentes, es de 9 equivalentes de la base para 9 de ácido clorhídrico y uno de sulfúrico. Debe, pues, combinarse la sosa con estos dos ácidos en la proporción de 19 á 1. Así hemos deducido las cantidades existentes de *cloruro y sulfatos sódicos.*

9.ª Teniendo en cuenta la cantidad de magnesia existente en el agua después de hervida y filtrada, y sabiendo que se combina con los ácidos clorhídrico y sulfúrico (cuando existen en la proporción de sus equivalentes), en la relación de 63,5 á 36,5, hemos comprobado que debe unirse en esta misma proporción. puesto que las cantidades relativas son sensiblemente iguales á las de sus equivalentes. Así hemos deducido las cantidades de *cloruro y sulfato magnésicos* con los ácidos clorhídrico y sulfúrico sobrantes de las combinaciones sódicas.

10. Los sobrantes de los ácidos citados quedan combinados con la cal existente en el agua hervida y filtrada para formar *cloruro y sulfato cálcicos.*

11. El sobrante de cal queda combinado con el ácido silícico formando *silicato cálcico,* atendiendo á la composición de las rocas existentes en el manantial, dejando como *sílice libre* el exceso de este anhidrido.

12. Las cantidades asignadas para cada substancia están dentro de los límites de sus respectivas solubilidades.

13. Dentro de los actuales conocimientos, el criterio de los coeficientes específicos de afinidad, es indudablemente el más científico. No puede admitirse el medio utilizado por otros analistas, de combinar en absoluto una base con un solo ácido cuando están en presencia de aquélla varios de éstos. Si el agua hervida y filtrada tiene reacción alcalina y el análisis nos demuestra la existencia de los ácidos carbó-

nico, clorhídrico y sulfúrico, y de las bases sosa, cal y magnesia, no hay razón para prescindir de la existencia de todas las combinaciones posibles entre aquellos ácidos y estas bases; pero uniéndose unos y otras en la proporción de sus *avideces*, y no de sus masas.

14. El medio utilizado por nosotros para la agrupación de especies químicas, viene, en gran parte, corroborado por los procedimientos de comprobación, que á continuación indicamos:

29. *Medios de comprobación de análisis:*

Sulfato sódico equivalente al total de sosa encontrada	0,680839	grs. por litro.
Sulfato lítico equivalente al total de litina encontrada	0,022163	—
Sulfato cálcico equivalente al total de cal encontrada	0,228893	—
Sulfato magnésico equivalente al total de magnesia	0,047070	—
Óxido férrico equivalente al ferroso encontrado	0,001550	—
Fosfato alumínico	0,001520	—
Sílice	0,041215	—
Fosfato de cal	0,000122	—
Total	1,027372	—
Sulfato cálcico correspondiente al fosfato	0,000202	—
	1,027169	—
Sulfatos encontrados directamente (determinación núm. 21)	0,026000	—
	1,001169	—
Ácido sulfúrico (SO_3) correspondiente á la sosa encontrada	0,383571	—
Ácido sulfúrico (SO_3) correspondiente á la litina	0,019027	—
Ácido sulfúrico (SO_3) correspondiente á la cal	0,134643	—
Ácido sulfúrico (SO_3) correspondiente á la magnesia	0,031380	—

Ácido sulfúrico (SO_3) correspondiente al hierro	0,001120	grs. por litro.
Ácido sulfúrico (SO_3) correspondiente á la alúmina	0,000741	—
	0,570522	—
Ácido sulfúrico (SO_3) total encontrado (determinación núm. 4)	0,052190	—
Ácido sulfúrico correspondiente al cloro encontrado	0,373220	—
Ácido sulfúrico correspondiente al fosfórico	0,000353	—
	0,425763	—
Suma del ácido sulfúrico correspondiente á las bases	0,570522	—
Suma del ácido sulfúrico existente correspondiente á los demás ácidos excepto el carbónico	0,425263	—
Ácido sulfúrico correspondiente al carbónico de los carbonatos neutros (semi-combinado)	0,144759	—
Ácido carbónico (CO_2) correspondiente	0,079617	—
Ácido carbónico combinado con la cal	0,035030	—
Ácido carbónico combinado con la magnesia	0,012980	—
Ácido carbónico combinado con el hierro	0,000852	—
Mitad del ácido carbónico combinado con la litina	0,010466	—
Mitad del ácido carbónico combinado con la sosa	0,016592	—
	0,075920	—
Ácido carbónico semi-combinado deducido por el cálculo	0,079617	—
Ácido carbónico semi-combinado encontrado directamente	0,075920	—
Diferencia	0,003697	—

Una determinación acidimétrica, empleando como indicador el ácido carmínico, nos dió un resultado intermedio entre las dos cifras apuntadas, corroborando todo ello la exac-

titud de la cantidad consignada para el ácido carbónico, libre y combinado, con las distintas bases.

También se ve que la cantidad asignada á dicho ácido, unido á las bases al estado de carbonatos neutros, es menor que la mitad del ácido carbónico total, y que la diferencia de peso del residuo fijo total del agua á 100° y al rojo sombra (0,1048 grs.) es algo mayor que la correspondiente á la cantidad de dicho ácido semicombínado.

Para hacer comparables la suma de substancias encontradas directamente por el análisis y la de los iones correspondientes deducidos de aquéllas por el cálculo, es necesario descontar de la primera el oxígeno correspondiente al cloro (porque este cuerpo se une al metal y no á su óxido para formar sal), y de la segunda el oxígeno correspondiente al anhídrido silícico libre y á los ácidos carbónicos libre y semicombinado, así como el hidrógeno de todo el ácido carbónico. Y así tendremos:

Sumas de ácidos y bases encontrados por el análisis	0,026810	grs. por litro.
Oxígeno correspondiente al cloro	0,074644	—
Diferencia	0,952166	—
Oxígeno correspondiente á 0,036482 gramos de anhidrido silícico	0,009728	—
Oxígeno correspondiente á 0,10931 gramos de CO_3 libre y semi-combinado	0'039749	—
Cantidad correspondiente al hidrógeno total	0,008422	—
	0,057899	—
Suma total de iones	1,010026	—
Diferencia	0,952127	—
Cifra encontrada directamente del análisis	0,952166	—
	0,000039	—

Para hacer comparables la suma de substancias encontradas directamente por el análisis y la de las sales resultantes de su agrupación, es necesario que descontemos de la primera el oxígeno correspondiente al cloro, y de la segunda los pesos del oxígeno y del nitrógeno libre, así como el del agua correspondiente á los ácidos carbónicos, libre y semicombinado, con todas las bases.

Y así tendremos:

Peso del oxígeno libre	0,001444	grs. por litro.
Peso del nitrógeno	0,021176	—
Agua correspondiente á 0,04706 gramos de ácido carbónico libre	0,013662	—
Agua correspondiente á 0,068851 gramos de ácido carbónico unido al calcio, magnesio y hierro	0,019989	—
Agua correspondiente á 0,027058 gramos de anhídrido carbónico unido al sodio y litio	0,011069	—
Total	0,067340	—
Suma de sales y gases resultantes de la agrupación	1,019436	—
Diferencia	0,952096	—
Suma de substancias encontradas por el análisis (deducido el *O* correspondiente al *Cl*)	0,952166	—
Diferencia	0,000070	—

Para comparar la suma de substancias dadas por el análisis (deducido el oxígeno correspondiente al cloro), con el residuo fijo á 100° determinado directamente en el agua, habría que restar de la primera el anhidrido carbónico libre y el semicombinado total (unido á los metales mono y divalentes). Aun así, no resultarían comparables dichas cifras puesto que en la determinación del residuo fijo se pierde

cloro por disociación del cloruro magnésico, ácido carbónico del carbonato neutro de magnesio, que pasa á básico; ácido carbónico de todos los carbonatos por la acción de la silice; las diversas sales reaccionan entre sí, modificando considerablemente el resultado final, de modo que, aun conociéndose las causas de la alteración, no es posible medirlas. Unicamente puede asegurarse que la suma de sales ha de ser siempre superior al residuo fijo, sin esperar nunca una coincidencia absoluta.

Análogas consideraciones pueden hacerse en lo que al residuo fijo al rojo sombra se refiere.

LV.—Sobre una reacción del ácido nopínico.

Por Obdulio Fernández

Es el ácido nopínico resultante de las acciones oxidantes del permanganato de potasio, empleado en un líquido fuertemente alcalino, sobre el *B* pineno, y la característica de dicho ácido, así generado, es de tal manera deficiente que para reconocerlo y distinguirlo se acude á cosa tan insegura é indeterminada como la poca solubilidad de su sal sódica, cuya ineficacia es patente y no precisa discutirse. Claro está que tratándose de investigaciones de cierto orden en las cuales se ha de reconocer, con la mayor precisión y exactitud, el ácido nopínico, deben buscarse y se necesitan reacciones más fijas y determinadas, de resultados positivos en todos los casos, cuya eficacia sea patente y que á tales cualidades unan la de la sensibilidad, tan precisa en las indagaciones analíticas. Necesitando para ulteriores trabajos poder identificar el ácido de que se trata, he buscado una reacción que, en mi sentir, reune las condiciones apuntadas, y es, por decirlo así, específica suya.

Positivamente, atendiendo á su constitución y estructura, el ácido nopínico es un ácido-alcohol, ó con mayor propiedad, un ciclanoloico, con un anillo interno tetrametilénico, y merced á semejante carácter, bien concreto y determinado, responde á la reacción Berg: Añadiendo á la solución de ácido nopínico otra extremadamente diluída de cloruro fé-

rrico, antes acidulada, y no con exceso, por el ácido clorhídrico, aparece una coloración amarilla característica, semejante á la originada, en las mismas condiciones, cuando se trata de los ácidos tartárico ó cítrico. Teniendo esto presente para determinar la función del ácido nopínico, y fundándome en que cuantas substancias orgánicas que lleven junios los grupos $CO.OH$ y OH son susceptibles de generar coloraciones, de diversos tonos y matices, que suelen cambiar, de modos muy variados, cuando son tratadas por la resorcina, operando en líquido sulfúrico, traté de ensayar el reactivo con el ácido nopínico, el cual reune las condiciones apuntadas, y fueron tan excelentes los resultados experimentales, que me han servido para caracterizarlo en todas las ocasiones, de modo claro y preciso, con extremada facilidad, y sin que se adviertan los mismos ó parecidos fenómenos en otros cuerpos, que tienen ciertas analogías con el que ahora trato.

He aquí la manera de proceder:

A la solución de nopinato de sodio, puesta en una cápsula de porcelana, se le añaden 0,10 gramos de resorcina, y resbalando por las paredes de la cápsula se vierten de 10 á 15 gramos de ácido sulfúrico puro y concentrado; enseguida se somete la mezcla, sin agitarla, á muy suave calor, elevando un poco la temperatura sólo unos minutos, y entonces aparece en la zona de contacto de las dos capas líquidas que se han formado en la masa, una coloración bien marcada de tono violeta, que no es permanente en cuanto no tarda en cambiarse en azul intenso, para adquirir después color verde, que ya persiste, y no vuelve á ser alterado en las condiciones del experimento. Como se ve, la reacción es bastante aparente, y su práctica en extremo fácil y sencilla, no requiriendo sino cuerpos de uso corriente, y únicamente exige cierto tino para que se efectúe la separación del líquido en dos capas y no pasar de la temperatura precisa, poco superior de la ordinaria. Operando en la forma dicha se ve apa-

recer primero el color violeta; adviértese bien á las claras su paso al azul intenso y el tránsito al verde, que parece ser el tono definitivo.

Se demuestra la especificidad de la reacción apuntada por los siguientes hechos, cuya práctica no ofrece dificultades de ningún género.

Nunca aparecieron las coloraciones citadas sustituyendo la resorcina con los demás fenodioles isoméricos, ni tampoco se han observado empleando en calidad de reactivo los monofenoles, como el fenol ordinario, el timol y los naftoles, etc.

Tampoco es indiferente el ácido empleado, y así la reacción coloreada no se produce ni aparece en ninguna de sus fases, si en lugar de emplear el ácido sulfúrico en la forma que queda dicha, se usa el ácido clorhídrico.

Ensayando los fenotrioles, fueron igualmente negativos los resultados de los experimentos, y sólo hubo una excepción, la floroglucina, cuyo cuerpo produce en las condiciones que quedan apuntadas un color amarillo de gran intensidad; pero que es poco característico, en cuanto otras substancias producen análogo fenómeno, el cual, no obstante, tiene su importancia, y es hecho digno de ser notado, porque la floroglucina y la resorcina tienen el punto de coincidencia de pertenecer ambas á la serie *meta*.

Practicada la reacción característica del ácido nopínico con otros cuerpos de variada naturaleza, que además de la función fenólica contengan otras distintas, tales como el guayacol, la morfina y la codeína, en ningún caso he logrado observar la producción de colores en la forma anteriormente descrita.

He podido reconocer en la substancia generada, cuando se trata el ácido nopínico por la resorcina en presencia del ácido sulfúrico, estas propiedades:

Es insoluble con el éter ordinario.

La destruye el agua, pero agregando mayor cantidad de

ácido sulfúrico puro y concentrado, vuelve á aparecer, sin alteraciones.

Se torna amarilla, rojiza, en presencia del alcohol amílico.

Viene ahora el problema de investigar la naturaleza y la composición que debe tener la materia colorante formada cuando se trata el ácido nopínico por la resorcina en presencia del ácido sulfúrico, y bien se entiende cómo el asunto es de importancia. Para esclarecerlo, valdrán los ensayos de síntesis á los cuales estoy consagrado con semejante intento, pero sin poder presentar de momento resultados concluyentes, ni aducir todavía experimentos que tengan valor positivo para dilucidar la cuestión. Sin embargo, y por lo que tocante á ello pudiera importar, me parece oportuno exponer sumariamente las reacciones que pueden efectuarse entre los términos del sistema actuante, pues quizá alguna sea la generadora del cuerpo de que se trata.

No es en manera alguna aplicable al caso presente la conocida teoría general de las reacciones resorcínicas del profesor Denigés y consiste la razón de ello en no ser fácil, dentro de las condiciones de las reacciones estudiadas, el formarse ningún compuesto glioxílico, pues su formación implicaría, de necesidad, la ruptura de los dos anillos que integran la molécula del ácido nopínico y sirven para determinar su origen y su estructura.

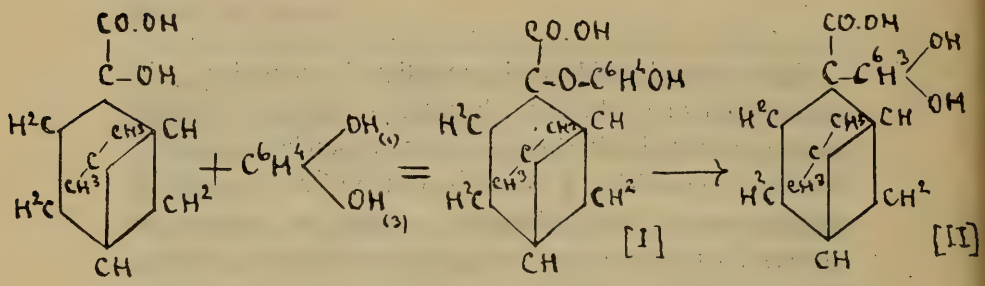
En vista de ello, cabe formular dos hipótesis.

Se puede suponer, sin forzar mucho las cosas, que en presencia del ácido sulfúrico el ácido nopínico esterifica la resorcina, que este fenol actúa sobre el oxhidrilo terciario del ácido de que se trata, generándose de tal suerte un anhidrol (I).

Y también pudiera admitirse que se origine un producto

de condensación, eliminándose agua procedente del citado oxhidrilo terciario y de un hidrógeno del núcleo resorcínico, que en semejante forma reaccionaría (II).

Ambos supuestos se representan en los siguientes esquemas.



(Laboratorio de Química Orgánica de la Facultad de Farmacia de la Universidad de Granada.)

LVI. — Una reacción coloreada de las sales de cinc. (Segunda Nota).

Por Angel del Campo Cerdán.

Hace ya algún tiempo que acerca de este asunto he publicado un trabajo en el que, bajo el título de *Nota preliminar* (*), explicaba en qué consiste la reacción coloreada de las sales de cinc que he descubierto, y es muy apropiada para caracterizarlas, y la técnica que ha de seguirse para practicarla. Desde entonces la experiencia me ha demostrado la necesidad de introducir algunas modificaciones en el modo de operar, cuya utilidad es notoria, y así me ha sido dable el emplearla, á mi entender con indudables ventajas, en el lugar adecuado de la marcha general y sistemática del análisis. Varios de los pormenores de estas nuevas indagaciones han sido ya publicados en el extranjero (**), no obstante lo cual, insistiré acerca de ellos, por juzgarlo así conveniente; ciertos extremos referentes á la citada reacción son inéditos, y unos y otros forman el conjunto de la presente Nota.

Ninguna modificación de las que aquí se proponen atañe al modo y forma de preparar el problema, el cual, de necesidad, ha de contener el cinc en el estado de cincato amónico, y no en otra forma, y es imposible substituir el amo-

---

(*) *Asociación española para el progreso de las Ciencias. Memorias del Congreso celebrado en Zaragoza en 1908.*

Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid. Octubre 1908.

Anal. de la Soc. Esp. de Fis. y Quim. Febrero 1909.

Chemiker Zeitung. Marzo 9-1909.

(**) *Annales de Chimie Analytique. Paris, Junio 15-1909.*

níaco, empleando en su lugar un álcali fijo, pues entonces no aparece jamás la coloración azul peculiar y característica de la reacción que se examina, viéndose, en cambio, otras de tonos pardos, y aun verdosos, más ó menos definidos; y he de hacer notar cómo en el caso de tales substituciones aparecen los colores indicados, con mayor ó menor intensidad, aunque el problema no contenga ni vestigios de cinc.

Por lo que hace al reactivo, que en los ensayos he empleado con excelente éxito y que al principio lo constituía una disolución etérea de resorcina, bien fácil de preparar, lo he substituído, luego de haber comprobado sus ventasjas y excelencias, con disoluciones acuosas ó alcohólicas del mismo difenol. Con ello se consigue corregir uno de los principales inconvenientes del método primitivo, que era la lentitud de la reacción, cuya actividad hállase notablemente aumentada y resulta bastante rápida con sólo cambiar el disolvente de la resorcina.

Cuando empleaba la solución etérea de este fenol, acontecía que por no ser miscibles el líquido del problema con el reactivo, asimismo líquido, los fenómenos particulares de la reacción sólo se efectuaban en la capa ó zona de contacto, limitándose á ella y no afectando á la totalidad de la masa. Usando la disolución alcohólica de resorcina, como puede mezclarse fácilmente con el problema, ya en todo el líquido son visibles las sucesivas coloraciones. Sin embargo, es todavía mucho más ventajoso el empleo de las soluciones acuosas de resorcina; las etéreas y las alcohólicas no consienten el calentar los líquidos, hasta el punto que el hacerlo perjudica y aun perturba de manera bien visible la reacción que he estudiado, y así lo comprobé en numerosos ensayos. Acontece, en cambio, lo contrario, si la resorcina ha sido disuelta en agua, porque entonces, lejos de ser una causa perturbadora el calor, resulta en sumo grado conveniente elevar la temperatura del líquido hasta que hierva, y es este

el medio más seguro de favorecer las acciones del compuesto cincino sobre el difenol, pues la aparición de la coloración característica es *instantánea.*

Deben observarse ciertas reglas para llegar con seguridad al resultado indicado, y son, en definitiva, las siguientes:

La solución acuosa de resorcina ha de ser bastante rica de este cuerpo, porque si el reactivo estuviera muy diluído, no tiene eficacia.

Se ha de evitar, con los mayores cuidados, no prolongar demasiado la ebullición, para que el amoníaco del problema no sea totalmente eliminado.

En el caso de ser ya muy exígua la proporción del cinc en éste contenida, la coloración tarda cierto tiempo en aparer, aun calentando.

Lo general para todos los ensayos es que comience débil, y poco á poco se acentúa y determina ganando en intensidad, hasta la característica y peculiar de la substancia formada, que no es permanente, y hállase sujeta á los cambios de color que quedan indicados como peculiares de la reacción objeto de la presente Nota.

Hay que advertir, insistiendo en ello, que la nueva forma operatoria ahora propuesta no excluye en absoluto, ni mucho menos, la explicada primitivamente, y ensayada con los mejores resultados; antes bien, cada una tiene su aplicación adecuada, conforme á la índole peculiar del problema. Un caso en que conviene mejor el primer método que el segundo, es el de un líquido conteniendo cinc en cuyo seno haya algún precipitado, que á causa de su color ó mediante alguna reacción química pueda de alguna suerte modificar los resultados que de otra manera se conseguirían añadiendo la solución acuosa y concentrada de resorcina; entonces salta á la vista la ventaja de la solución etérea del reactivo, porque la zona de sus acciones se limita y circunscribe, lo cual es favorable, en particular al empezar á determinarse la primera coloración. A la rapidez del efecto, que hirviendo el

líquido llega á ser instantáneo, es menester preferir la seguridad de la reacción, por lenta que ésta sea.

Respecto de su empleo en la marcha general sistemática del análisis, es preciso, naturalmente, tener muy en cuenta las acciones del reactivo sobre los demás iones metálicos del grupo análitico del cinc, y son las que aquí se indican.

El *níquel*, además de comunicar la bien conocida coloración azul á las soluciones amoniacales de sus sales, á la larga puede reaccionar como el cinc en presencia del reactivo resorcínico; pero el tono azulado producido es bastante menos bello.

Con las sales de *cobalto* las cosas pasan de manera distinta, y el reactivo sirve para acelerar de manera visible la aparición del color rojizo, que es peculiar y característico de las cobaltaminas.

Perturba asimismo la reacción coloreada del cinc la presencia del *manganeso*.

Bien diferente y variada es la acción del *cromo*, y depende de las proporciones de este cuerpo que el problema contenga. Si la cantidad no es muy excesiva, entonces no son notadas perturbaciones en los fenómenos característicos de la reacción y el hecho tiene no escasa importancia, en cuanto permite la investigación del cinc en presencia de no mucho cromo, alcalinizando el problema con un pequeño exceso de amoníaco y agregando luego el reactivo en solución etérea. Es aplicable este modo operatorio aun en muchos casos en los que las proporciones del metal perturbador llegan á tanto, que intentanto precipitar con la potasa en caliente, la totalidad del cinc sería arrastrada y retenida por el cromo y no podrían separarse.

Siendo condición indispensable del método el operar de contínuo en un medio amoníacal, pues de otra suerte no aparece la coloración azul con los cambios que se han indicado, se comprende al punto que ni el *aluminio*, ni el *hierro* han de tener ninguna clase de influencia sobre la reacción.

De los demás iones extraños al grupo que se considera, son de notar, por lo que perturban y perjudican la investigación del cinc, el *cadmio* y el *cobre* principalmente. Sin embargo, su presencia no es presumible en el caso de que se trata, á no ser por alguna circunstancia especialísima y fortuita; y así, la importancia del hecho, desde el punto de vista analítico, y las mismas acciones de los citados cuerpos, son, en realidad, de bien poca monta en este lugar de la marcha general y sistemática; y en cuanto á otros iones, tampoco han sido notadas perturbaciones que deban ser tenidas en cuenta.

Merecen, en cambio, considerarse las de otro género, y prevenirlas á tiempo, pues su presencia influye grandemente en la reacción; en tal caso se hallan, en primer término, los oxidantes y los reductores dotados de cierta energía, cualquiera que sea su naturaleza, y ya al principio de esta Nota va especificada la acción perturbadora de la potasa y de la sosa é indicado cómo se ha de operar en líquido alcalinizado precisamente con el amoníaco en exceso.

Infiérese, como consecuencia de cuanto va apuntado, el método operatorio para utilizar la reacción coloreada del cinc en las investigaciones del análisis cualitativo, y es de la manera que aquí se pone en calidad de resumen.

Primero se separan el níquel y el cobalto en la forma acostumbrada.

Si no hay manganeso en el problema, pueden precipitarse los restantes metales del grupo empleando un exceso de amoníaco, y sin filtrar se agrega el reactivo, esta vez en solución etérea, ó bien separar el precipitado, y en el líquido filtrado añadir la resorcina, ahora en solución acuosa ó alcohólica, ambas de igual eficacia.

Asimismo, no habiendo temor de que al ser eliminado el cromo arrastre y retenga el cinc, puede precipitarse empleando un exceso de potasa, filtrar y hervir el líquido filtrado con la bastante cantidad de cloruro amónico para que quede

alcalinizado por el amoníaco, y utilizar enseguida el reactivo resorcínico; pero la reacción, clara y precisa, es en este caso bastante más lenta.

Menester será advertír, por ser de importancia, que algunas potasas comerciales de las que corren y son consideradas muy puras suelen contener cinc, cuya presencia es demostrable aplicando la nueva reacción, y aun otras ya conocidas antes del propio metal, y así lo he comprobado en repetidas ocasiones. Conviene, por lo tanto, antes de proceder á ninguna investigación, practicar un ensayo en blanco para cerciorarse de la calidad y pureza de la potasa que haya de utilizarse.

(Laboratorio de Análisis químico general
de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Madrid.—1910.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

Págs.

Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1909.
Académicos de número..... 5
Académicos electos..... 6
Académicos Corresponsales nacionales..... 7
Académicos Corresponsales extranjeros..... 8

Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*. (Conferencias 1.ª á 13ª)..... 11, 97, 197, 281, 306, 381, 489, 603, 624, 698, 785, 818 y 913

Método para determinar la dirección de los vientos superiores por las ondulaciones de los bordes de los astros, por *Vicente Ventosa*..... 29 y 116

Estudio espectrográfico de las «Blendas». Investigación acerca de la Blenda de «Picos de Europa». Presencia del «Germanio» en la misma, por *Georges Urbain*, *Angel del Campo* y *Clair Scal*..... 49

Contribución al estudio de las esencias de trementina españolas, por *Obdulio Fernández*..... 63

Sobre la conductibilidad de disoluciones de *ClK* y *ClNa* en mezclas de agua y alcohol metílico. (Variaciones con el tanto por ciento de alcohol, la concentración y la temperatura), por *Aurelio Garzón y Carmona*..... 70

Consideraciones acerca de algunos métodos empleados en el análisis de las aguas minerales, por *José Casares Gil*..... 131

Observaciones morfológicas sobre la sangre de Llama (Auchenia Lama), por *Gustavo Pittaluga*..... 141

Procedimiento rápido de valoración del vanadio en los minerales y productos industriales vanadíferos, por *E. Piñerúa Alvarez*..... 160

Reacciones del cinc, el níquel y el cobalto, utilizables en análisis, por *E. Piñerúa Alvarez*..... 163

Determinación de las diferencias de longitud entre Madrid, Barcelona y Desierto de las Palmas (Castellón), por medio del transporte de hora con cronómetros Ditisheim, por *José Galbis*..... 168

Págs.

Determinación de algunas constantes físicas de la manganina, por *B. Cabrera* ..... 217 y 408
Sobre un problema de física, por *Juan Jacobo Durán-Loriga* .. 242
Observaciones acerca del método de Weszeleszky para la determinación del bromo y del iodo, por *José Casares Gil* 272
Contribución al análisis del nitro de Chile, por *Juan Fages Virgili* 329
Sobre la isomería de los ácidos estánicos, por *Werner Mecklenburg* 338
Viaje de estudio á la Guinea española. Observaciones acerca del «Trypanosoma gambiense» y algunos otros Protozoos parásitos del hombre y de los animales, por *Gustavo Pittaluga* ..... 347, 446, 554 y 673
Neurópteros de los alrededores de Madrid, por el *R. P. Longinos Navás, S. J.* 370
Sobre los diagramas de estado de los sistemas estaño-azufre, estaño-selenio y estaño-telurio, por *Wilhem Biltz* y *Werner Mecklenburg* 430
Nueva teoría para el desarrollo de las ecuaciones finales, por *Gualterio M. Seco* 460
Programa de premios para el concurso del año 1911 482
Noticias sobre algunos moluscos de España, por *Joaquín González Hidalgo* 515
Estudio analítico de los elementos de retroceso de las curvas alabeadas, por *Miguel Vegas* 525
Le Sous-azoture de carbone $C^4 N^2$, par *Ch. Moureu et J. Ch. Bongrand* 531
Teoría elemental de los péndulos horizontales, por *Eduardo Mier* 540
Contribución al estudio de las aminas cíclicas, por *F. Lavilla Llorens* 548
Estudio estereoquímico comparativo de los cuerpos, Oxiexano-2-5 y Dimetilfurfurano-1-4, por *Angel del Campo y Cerdán* 563
Informes sobre tres Memorias presentadas á la Academia, con opción á premio, en el Concurso de 1904. Ponente, *J. M. de Madariaga* 585
Estudio completo de una clase especial de Integraciones singulares, por *Lauro Clariana* ..... 642, 756, 845 y 976
Nota sobre la *Scapania Casaresana* St. y las Scapanias españolas, por *A. Casares Gil* 670
Informe acerca de la obra de Mecánica Racional del Sr. Ruiz Castizo. Ponente, *Nicolás Ugarte* 689

Págs.

El Museo del Instituto Oceanográfico de Mónaco, por *Joaquín G. Hidalgo* 721
De algunos fenómenos particulares de los cuerpos fotoluminescentes, por *José Rodríguez Mourelo* 737
Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia), por *José Giral Pereira* y *Julio C. Sánchez Angoso* ..... 771 y 996
Dosificación volumétrica del ferrocianuro y del ferricianuro potásicos, por *Werner Mecklenburg* 871
Nuevo método de extracción del azufre de los minerales que lo contienen en estado nativo, por *Antonio de Gregorio Rocasolano* 895
Acción biológica del calcio y del magnesio, por *José Gómez Ocaña* 947
Sobre una reacción del ácido nopínico, por *Obdulio Fernández* 1018
Una reacción coloreada de las sales de cinc (segunda nota), por *Angel del Campo Cerdán* 1023

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

LI. — Cuestiones de Análisis. Aplicación á la Física matemática, por *José Echegaray*..... 913
LII. — Acción biológica del calcio y del magnesio, por el Doctor *D. José Gómez Ocaña*..... 947
LIII. — Estudio completo de una clase especial de integrales singulares (continuación), por *Lauro Clariana.* 976
LIV. — Estudio acerca de las aguas minero-medicinales de Valdelazura (Plasencia), continuación, por *José Giral Pereira* y *Julio C. Sánchez Angoso*..... 996
LV. — Sobre una reación del ácido nopínico, por *Obdulio Fernández*..... 1018
LVI. — Una reacción coloreada de las sales de cinc (Segunda Nota), por *Angel del Campo Cerdán*..... 1023

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 6 pesetas en España y 6 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas.**

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01224 1576